

УДК 539.375

## **МОДЕЛЬ ДИЛАТАНСИИ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ С ТРЕЩИНАМИ ПРИ СЖАТИИ**

**ДЫСКИН А. В., САЛГАНИК Р. Л.**

Для хрупкого материала, содержащего в малой концентрации хаотически ориентированные начальные трещины, рассмотрена модель увеличения объема (дилатансии) при одноосном и равнокомпонентном двухосном сжатии, связывающая это увеличение с раскрытием трещин, прорастающих из начальных трещин в направлении сжатия.

Расчеты по соотношениям модели сопоставлены с экспериментальными данными.

Явление дилатансии во многих случаях служит признаком перехода хрупкого материала к разрушению или сильному увеличению нарушенности. Как полагают, оно играет важную роль в возникновении землетрясений. Поэтому особенно большое внимание изучению этого явления уделяется в механике горных пород.

Само явление дилатансии при испытаниях образцов на сжатие выражается в том, что по мере увеличения сжимающей нагрузки объем образца сначала уменьшается, затем, начиная с некоторой нагрузки, постепенно перестает уменьшаться, после чего возрастает [1-7].

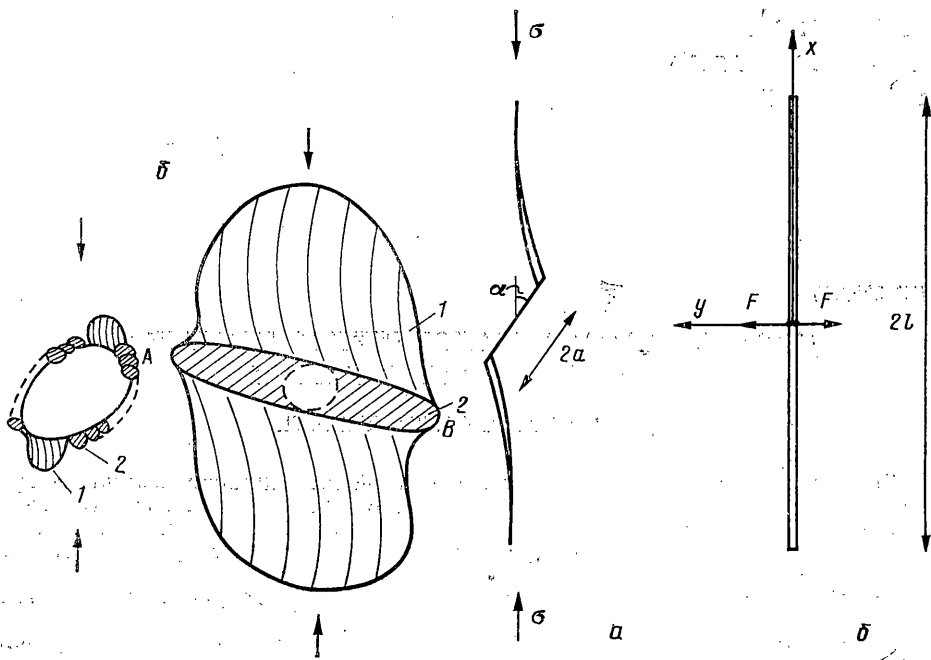
В настоящее время предложен ряд механизмов, объясняющих дилатансию хрупких твердых тел [2, 4-7]. Все эти механизмы связывают дилатансию с происходящим тем или иным путем увеличения внутренней пустотности образца в результате развития в нем дефектов (трещин или пор [8]) под действием сжимающих напряжений.

В зависимости от вида дефектности материала можно выделить два основных случая возникновения в нем дилатансии.

Первый случай относится к условиям, когда в материале имеется довольно большая концентрация дефектов примерно одинаковой интенсивности (характеризующей способность дефектов к прорастанию при данном виде нагружения), так что развивающиеся из них дефекты или трещины почти сразу вступают во взаимодействие, вызывая крутое нарастание дилатансии. Второй случай относится к условиям, когда имеется группа относительно редко расположенных дефектов достаточно большой интенсивности (например, группа трещин наибольших размеров), развитием которых в основном и определяется явление дилатансии, тогда как остальные дефекты практически не развиваются. При этом взаимодействие между растущими дефектами наступает лишь после того, как их размеры сильно увеличатся по сравнению с первоначальными, так что в значительном интервале сжимающих напряжений дилатансия представляет собой суммарное увеличение объема дефектов (трещин), развивающихся независимо. В этом случае относительно крутому нарастанию дилатансии, характерному для условий существенного взаимодействия дефектов, предшествует стадия сравнительно пологого нарастания дилатансии, определяемая ростом невзаимодействующих дефектов. Для того чтобы эта стадия была возможна, начальные дефекты должны быть, во-первых, расположены достаточно редко и, во-вторых, обладать достаточной интенсивностью, обеспечивающей начало их роста при относительно низких сжимающих напряжениях, когда прочие дефекты еще не могут развиваться.

Рассмотрение явления дилатансии в таких условиях и составляет предмет данной работы. При этом начальные дефекты этого типа моделируются плоскими трещинами примерно дискообразной формы, а материал между трещинами считается упругим и изотропным.

**1. Рост отдельной трещины при сжатии.** Рассмотрим сначала случай одноосного сжатия и какую-либо одну начальную трещину (считаем ее плоской и примерно дискообразной). Пусть для определенности ось сжатия вертикальна, а плоскость трещины наклонена к ней под углом  $\alpha$ . При сжатии, как показывают модельные опыты на образцах полиметилметакрилата с дискообразной трещиной [9], трещина, прорастающая вследствие взаимного соскальзывания берегов, приобретает вначале вид, схематически



Фиг. 1

Фиг. 2

изображенный на фиг. 1, а вертикальными стрелками показано направление сжатия). Рост трещины в вертикальном направлении происходит вследствие образования трещин нормального отрыва (участки 1 на фиг. 1, а), отходящих от частей границы, подверженных действию поперечного сдвига (аналогично тому, как растет сквозная начальная трещина поперечного сдвига в пластине, см. [9, 10]). Возле участков контура трещины, подверженных действию также и продольного сдвига, появляются малые вторичные трещины отрыва (на фиг. 1, а обозначены цифрой 2), обуславливающие тенденцию к развитию начальной трещины в боковом направлении (см., например, рис. 9, з работы [41], иллюстрирующий представление о росте трещины продольного сдвига за счет образования у ее контура вторичных трещин отрыва).

Можно полагать, что с ростом сжимающей нагрузки количество и размеры вторичных трещин будут увеличиваться, что вызовет реальное подрастание начальной трещины в боковом направлении, происходящее примерно в своей плоскости, за счет разрушения материала между вторичными трещинами (новый контур показан на фиг. 1, а, штриховой линией). Это приведет к тому, что участки 1 наряду с ростом в вертикальном направлении будут расширяться. В результате, на поздних стадиях нагружения трещина должна приобрести форму типа показанной на фиг. 1, б (1 — участки поверхности, образовавшиеся по механизму нормального отрыва, 2 — участки, образовавшиеся вследствие роста начальной трещины примерно в своей плоскости эффективно по механизму продольного сдвига). При этом в значительном интервале изменения напряжений развитие трещины должно происходить устойчиво.

Приведенные соображения остаются в силе и в случае двухосного сжатия для начальной трещины, наклоненной к плоскости действия сжимающей нагрузки. При этом следует ожидать, что рост трещины будет происходить примерно в той же плоскости, причем для равнокомпонентного двухосного сжатия площадки отрыва будут расти в направлении, перпендикулярном линии пересечения начальной трещины с плоскостью сжатия, примерно так же, как и при одноосном сжатии (когда сжатие действует в том же направлении).

Ограничимся упрощенным количественным рассмотрением охарактеризованного выше процесса развития сложной пространственной трещины при одноосном сжатии. Рассмотрим стадию нагружения, соответствующую

значительному прорастанию трещины (согласно данным работы [12] трещины в образцах гранита в процессе нагружения увеличивают свои размеры в несколько раз).

Каждое вертикальное сечение трещины (фиг. 2, а) будем рассматривать в приближении плоской деформации (для сечений, близких к краям трещины, такое приближение может оказаться слишком грубым, однако поскольку основной вклад в изменение объема дает центральная часть трещины, возможной погрешностью, связанной с этим приближением, будем пренебрегать). Приближенно представим такое сечение вертикальной трещиной нормального отрыва, поддерживаемой в раскрытом состоянии сосредоточенными силами (фиг. 2, б), эквивалентными действию базовой наклонной площадки (образованной начальной трещиной и частью поверхности, выросшей в плоскости начальной трещины вследствие продольного сдвига) и приложенными в месте ее расположения. Эта схематизация аналогична рассматривавшейся в работе [13]. При таком представлении не учитывается влияние трещин на осевую деформацию (почти во всех рассмотренных далее экспериментах неупругость осевого деформирования можно пренебречь). Величину этих сосредоточенных сил будем считать пропорциональной горизонтальной проекции начальной сдвигающей силы  $2a\tau$ , где  $\tau = \frac{1}{2}\sigma \sin 2\alpha$  — касательное напряжение, которое действовало бы в сплошном материале на месте площадки контакта при одноосном сжатии напряжением величины  $\sigma$ ,  $2a$  — ширина площадки контакта в данном сечении. Действием вертикальной проекции этой силы пренебрегаем.

Таким образом, будем считать, что эквивалентная трещина раскрывается двумя приложенными в ее центре равными по величине и противоположно направленными силами (в расчете на единицу длины в направлении, перпендикулярном плоскости фиг. 2):

$$F = 2Ca\sigma \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad (4.1)$$

Здесь  $C$  — безразмерный коэффициент, учитывающий геометрию трещины вблизи площадки контакта, а также силы трения, которые будем считать небольшими. Будем полагать также, что в процессе роста трещины площадь контакта меняется мало и коэффициент  $C$  можно считать постоянным. Этот коэффициент, как и подобные ему, будем в дальнейшем опускать, имея в виду, что окончательный результат можно полагать справедливым лишь с точностью до некоторого коэффициента порядка единицы. При этом, однако, чтобы была видна зависимость результата от коэффициента Пуассона, будем в дальнейших соотношениях везде сохранять его.

Дилатансия, в случае когда действует только рассматриваемый механизм, равна суммарному объему раскрывшихся трещин. В предположении, что выросшие трещины не взаимодействуют, достаточно найти зависимость от нагрузки объема отдельной раскрывшейся трещины. Для этого найдем вначале площадь раскрытия ( $S$ ) вертикального сечения, считая ее приближенно равной площади раскрытия эквивалентной трещины (фиг. 2, б). В системе координат  $(x, y)$ , введенной на фиг. 2, б, имеем

$$S = 2 \int_{-l}^l u(x) dx = -2 \int_{-l}^l x u'(x) dx \quad (4.2)$$

Здесь  $u$  — горизонтальное смещение левого берега трещины,  $l$  — полу-длина трещины. При интегрировании по частям учтено, что  $u(\pm l) = 0$ .

Воспользовавшись известным решением задачи о прямолинейной трещине, раскрываемой нормальными напряжениями [14, с. 443], имеем

$$2\mu u' = \text{Im} [\kappa \Phi_+ - \Omega_-] \quad (4.3)$$

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z^2 - l^2}} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{t^2 - l^2} p(t) dt}{t - x}$$

Здесь  $z=x+iy$ ,  $\mu=E/2(1+\nu)$  ( $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона),  $\kappa=3-4\nu$ ; знаками «плюс» и «минус» отмечены предельные значения функции при  $z=x+i0$  и  $z=x-i0$  соответственно. Из (1.2) с уче-

том (1.3) и того, что  $\int_{-l}^l x dx / [(x-t)\sqrt{l^2-x^2}] = \pi$  ( $-l \leq x \leq l$ ) имеем

$$S = \frac{\kappa+1}{2\mu} \int_{-l}^l \sqrt{l^2-t^2} p(t) dt$$

Полагая здесь  $p(t) = F\delta(t)$ , находим

$$S = 8\sigma E^{-1}(1-\nu^2) l a \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad (1.4)$$

Полудлину  $l$  выросшей трещины определим из условия, что контур трещины находится в состоянии предельного равновесия. Это означает, что коэффициент интенсивности напряжений в концах трещины (см. [14, с. 618])

$$K_I = N\sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l p(x) \sqrt{\frac{l-x}{l+x}} dx \quad (1.5)$$

достигает своего предельного значения, выражающего трещиностойкость материала по отношению к отрыву.

Трещиностойкость по отношению к малым трещинам, сравнимым по размерам со структурными элементами (зернами) породы, может значительно отличаться от характеризующей обычно величиной  $K_{Ic}$  (предельное значение  $K_I$ ) трещиностойкости по отношению к макроскопическим трещинам, определяемой процессами в концевой области, которая сама может включать малые трещины.

Наличие этих малых трещин приведет к дополнительным затратам энергии на их рост, что эффективно выразится в увеличении трещиностойкости (подробнее о зависимости трещиностойкости от соотношения размеров трещины и структурных элементов материала см. [15, 16]). В связи с этим отметим, что использование в работе [17] трещиностойкости, определенной в опытах с макроскопической трещиной, для расчета пределов прочности на растяжение образцов горных пород (размеры микротрещин принимались равными наибольшему размеру минеральных зерен) даст завышенные по сравнению с экспериментальными данными значения (в частности, для гранита Westerly почти в два раза). Чтобы подчеркнуть это обстоятельство в обозначениях, будем для рассматриваемых малых трещин использовать в качестве меры трещиностойкости модуль сцепления  $K$  [14] (предельное значение величины  $\sqrt{\pi}/2K_I$ ). Таким образом,  $l$  и  $S$  равны

$$l = F^2 / (2K^2) \quad (1.6)$$

$$S = 16(1-\nu^2) (\sin^2 \alpha \cos \alpha)^3 a^3 \sigma^3 / (K^2 E) \quad (1.7)$$

Объем раскрывшейся трещины вычислим в предположении, что площадка контакта имеет примерно эллиптическую форму с малой полуосью, равной радиусу начальной трещины ( $a_0$ ) и большой полуосью ( $b$ ), длина которой зависит от величины нагрузки  $\sigma$ . Тогда для вертикального сечения, отстоящего от центрального вертикального сечения на расстояние  $\xi$ , имеем  $a = b\sqrt{1 - (\xi/b)^2}$ . Отсюда и из (1.7) получим, что объем раскрывшейся трещины равен

$$V = 6\pi(1-\nu^2) (\sin^2 \alpha \cos \alpha)^3 b a_0^3 \sigma^3 / (K^2 E) \quad (1.8)$$

Длину большой полуоси ( $b$ ) можно оценить заменив эту площадку одиночной эллиптической трещиной. Эта замена фактически эквивалентна заземлению противоположных берегов площадки вдоль всего контура, что затруднит рост площадки в направлении большой оси (фиг. 1, б). Поэтому найденное далее значение  $b$  будет, скорее всего, заниженным. Ве-

личину  $b$  определим из условия, что границы  $A$  и  $B$  находятся в состоянии предельного равновесия. Выражение для коэффициента интенсивности напряжений  $K_{III}$  от продольного сдвига в точках  $A$  и  $B$  (см. [18], формула (5.34)), с учетом принятых здесь обозначений, имеет вид

$$K_{III} = (1-\nu) \sqrt{\pi b^{-1} a_0} k^2 [(k^2 + \nu k_*^2) E(k) - \nu k_*^2 K(k)]^{-1} \tau \quad (1.9)$$

где  $a_0$  — малая полуось эллипса (равная радиусу начальной трещины),  $k_* = a_0/b$ ,  $k^2 = 1 - k_*^2$ ,  $K(k)$ ,  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода,  $\tau = 1/2 \sigma \sin 2\alpha$  — величина касательного напряжения, действующего в сплошном материале на площадках, параллельных эллиптической трещине.

Рассматривая сильно выросшие трещины ( $b \gg a_0$ ), это выражение можно упростить, так что в результате находим

$$K_{III} = (1-\nu) \sqrt{\pi b^{-1} a_0} \tau \quad (1.10)$$

В состоянии предельного равновесия  $K_{III} = K_s$ , где  $K_s$  — некоторое критическое значение. Учитывая, что в хрупком материале, как отмечалось, развитие трещины продольного сдвига фактически происходит по механизму нормального отрыва, а также имея в виду общий приближенный характер расчета, положим  $K_s = K\sqrt{2/\pi}$ . Отсюда и из (1.10) имеем

$$b = 1/2 \pi^2 (1-\nu)^2 K^{-2} (\sin \alpha \cos \alpha)^2 a_0^2 \sigma^2 \quad (1.11)$$

Окончательно получим

$$V = 3\pi^3 (1-\nu^2) (1-\nu)^2 K^{-4} E^{-1} (\sin^8 \alpha \cos^5 \alpha) a_0^5 \sigma^5 \quad (1.12)$$

**2. Деформация материала с выросшими трещинами.** В общем случае тензор деформации  $\varepsilon_{ij}$  материала, содержащего большое число трещин, можно вычислить при помощи соотношения [19]:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + 1/2 \int (n_i V_j + n_j V_i) F(Y) dY \quad (2.1)$$

где  $\varepsilon_{ij}^0$  — тензор деформаций самого материала,  $V_i$  — проинтегрированная по поверхности трещины  $i$ -я компонента скачка смещения,  $n_i$  — вектор нормали к трещине,  $F$  — функция распределения трещин по совокупности переменных  $Y$ , характеризующих форму и размеры трещин, а также их положение в пространстве и ориентацию.

Для одноосного сжатия в системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$ , ось  $x_3$  которой направлена по оси сжатия, имеем  $n_1 = \cos \varphi$ ,  $n_2 = \sin \varphi$ ,  $n_3 = 0$ , где  $\varphi$  — угол, который вектор нормали образует с положительным направлением оси  $x_3$ . Далее  $V_i = V(\alpha, a_0) n_i$ , где  $V(\alpha, a_0)$  — объем раскрывшейся трещины, определяемый по формуле (1.12); касательная компонента скачка смещения в рассматриваемом приближении отсутствует. Отсюда находим

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \int_G n_i n_j V(\alpha, a_0) F(\alpha, \varphi, a_0) d\alpha d\varphi da_0 \quad (2.2)$$

где  $G$  — область интегрирования, включающая все значения величин  $\alpha$ ,  $\varphi$ ,  $a_0$ , для которых при заданном напряжении возможен рост начальных трещин.

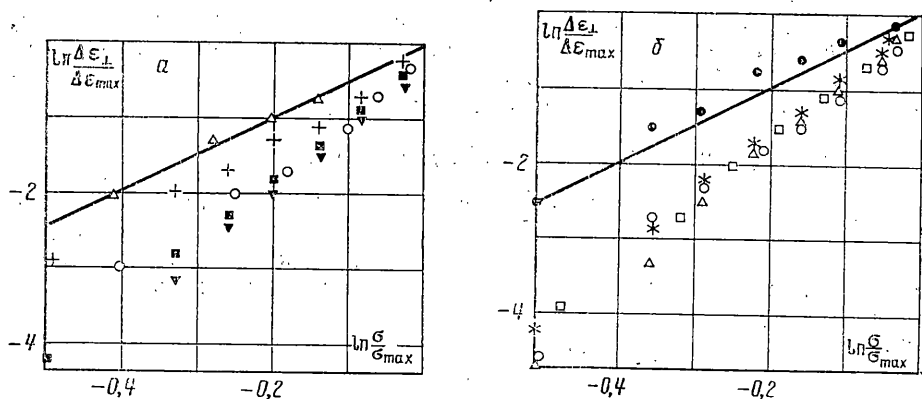
В случае, когда начальные трещины распределены по размерам и ориентациям независимо, функция распределения равна  $F(\alpha, \varphi, a_0) = F_0(a_0) \times F_1(\alpha, \varphi)$ .

Рассмотрим случай изотропно ориентированных начальных трещин, т. е.  $F_1(\alpha, \varphi) = \pi^{-2}$ ,  $\alpha \in [0, \pi/2]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Интегрируя в (2.2) вначале по  $\varphi$ , получим

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \frac{\delta_{ij}(1-\delta_{is})}{\pi} \int_G V(\alpha, a_0) F_0(a_0) d\alpha da_0 \quad (2.3)$$

где по индексу  $i$  суммирование не проводится.

Поскольку объем  $V$  пропорционален  $a_0^5$ , можно при вычислении  $\varepsilon_{ij}$  ограничиться рассмотрением лишь начальных трещин с размерами, близ-



Фиг. 3

кими к максимальному, и считать распределение трещин по размерам достаточно узким. Это обстоятельство вместе с тем, что зависимость  $V$  от  $\alpha$  имеет внутри интервала интегрирования резкий максимум, позволяет без существенной погрешности распространить интегрирование в (2.3) по  $\alpha$  на весь диапазон углов от 0 до  $\pi/2$ , считая все начальные трещины из рассматриваемого интервала значений их радиусов проросшими достаточно сильно. В результате находим

$$\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^0 = 3\pi^2 K^{-4} E^{-1} (1 - \nu^2) (1 - \nu)^2 J N \langle a_0^5 \rangle \sigma^5 \quad (2.4)$$

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin^3 \alpha \cos^5 \alpha d\alpha \approx 6,22 \cdot 10^{-3}, \quad N \langle a_0^5 \rangle = \int a_0^5 F_0(a_0) da_0$$

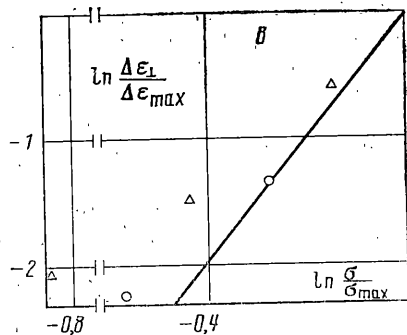
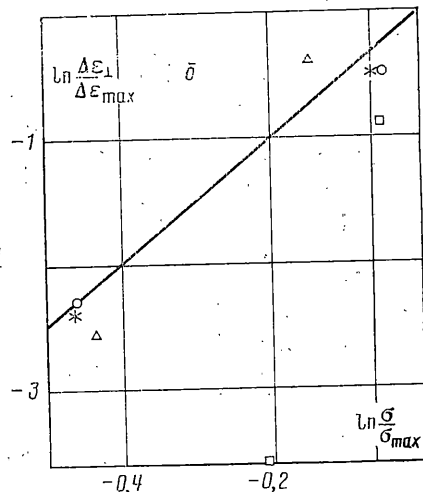
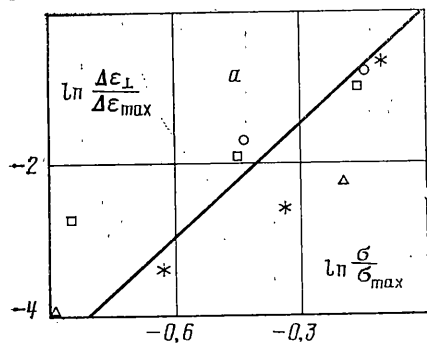
Остальные компоненты деформации совпадают в рассматриваемом приближении с деформациями материала. Таким образом, раскрытие выросших трещин приводит к появлению дополнительной поперечной деформации, растущей пропорционально пятой степени сжимающего напряжения.

В случае равнокомпонентного двухосного сжатия, параллельного плоскости  $x_1, x_2$ , единственной компонентой деформаций, отличной от деформаций материала, будет  $\varepsilon_{33}$  и аналогично предыдущему можно убедиться, что

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^0 + 6\pi^2 K^{-4} E^{-1} (1 - \nu^2) (1 - \nu)^2 J N \langle a_0^5 \rangle \sigma^5 \quad (2.5)$$

**3. Сопоставление с экспериментальными данными.** Рассмотрим эксперименты по изучению дилатансии на образцах горных пород и цемента при одноосном или близком к нему сжатию [2-5].

В этих экспериментах использовались образцы следующей формы: в работе [2] — гантелеобразные образцы (высота 15,2 см, диаметр рабочей части 1,27 см); в [4] — полый цилиндр (высота 11,4 см, наружный диаметр 3,7 см, внутренний диаметр 1,3 см); в [3] — цилиндр (высота 5 см, диаметр 1,6 см), в [5] — цилиндр (высота 8 см, диаметр 3 см). Согласно данным этих работ, соотношение размеров образцов было выбрано таким, чтобы исключить влияние торцов и создать в средней рабочей части образцов напряженное состояние, близкое к однородному. На фиг. 3, 4 приведены построенные по данным этих работ экспериментальные зависимости  $\ln \Delta \varepsilon_{\perp} / \Delta \varepsilon_{\max}$  от  $\ln \sigma / \sigma_{\max}$ , где  $\Delta \varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^0$  — превышение поперечной деформации над той, которая была бы во всем рассматриваемом диапазоне напряжений, если бы деформирование было полностью упругим,  $\Delta \varepsilon_{\max}, \sigma_{\max}$  — наибольшие для данного образца значения  $\Delta \varepsilon_{\perp}, \sigma$ . При этом для данных об объемной деформации (дилатансии), снятых с графиков, приведенных в [2-4], величина  $\Delta \varepsilon_{\perp}$  принималась равной половине дилатансии, поскольку, согласно данным этих работ осевая деформация мало отличалась от упругой (что соответствует рассмотренной выше модели). На фигурах приняты следующие обозначения. Фиг. 3, а:



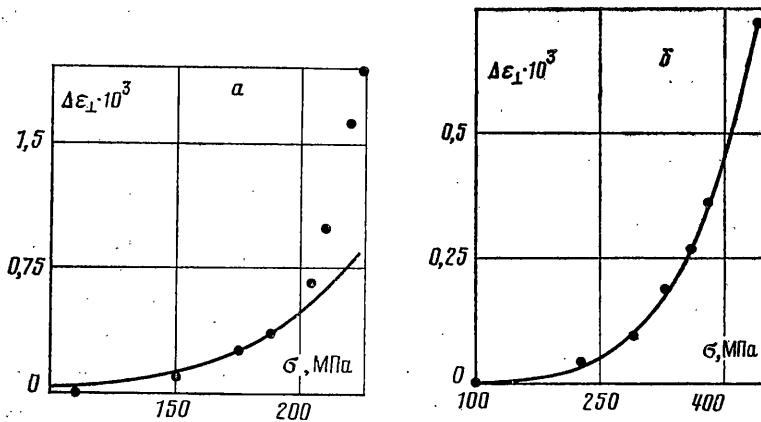
Фиг. 4

1 — (○) — гранит Westerly [2], 2 — (Δ) — кварцит Witwatersrand [4], 3 — (+) — образец № 31, 4 — (▼) — образец № 36, 5 — (■) — образец № 45 (все образцы из гранита Westerly [3]); фиг. 3, б: 6 — (□) — песчаник Pottsville, 7 — (Δ) — габбро San marcos, 8 — (○) — мрамор, 9 — (\*) — кварцит Rutland, 10 — (●) — Colorado rhyolite tuff (все данные из работы [3]). Фиг. 4, а: 1 — (Δ) — песчаник выбросоопасный, 2 — (□) — песчаник П-0, 3 — (○) — песчаник П-01, 4 — (\*) — песчаник П-03; фиг. 4, б: 5 — (Δ) — мрамор 1, 6 — (□) — известняк, 7 — (○) — известняк Д-6, 8 — (\*) — кварцевый диорит Д-2; фиг. 4, в: 9 — (Δ) — цемент, 10 — (○) — каменная соль (все данные взяты из работы [5] и относятся к образцам, для которых в области дилатансии имелось не менее трех экспериментальных точек. Сплошными линиями на всех графиках показана зависимость  $\Delta \epsilon_{\perp} \sim \sigma^5$ .

Видно, что для всех образцов, кроме цементного, дилатансия растет не медленнее чем  $\sigma^5$ , а в ряде случаев, по крайней мере до нагрузок, не очень близких к разрушающим, растет примерно пропорционально  $\sigma^5$ . Можно предположить, что в таких случаях дилатансия определялась главным образом рассмотренным выше механизмом роста только начальных трещин без их существенного взаимодействия и продолжить анализ исходя из этого предложения.

На фиг. 5 представлены результаты согласования теоретической зависимости  $\Delta \epsilon_{\perp} = A \sigma^5$  (сплошные линии) с экспериментальными данными (фиг. 5, а — гранит [2], фиг. 5, б — кварцит [4]). Образец кварцита [4] подвергался кроме осевого также действию бокового давления. Это постоянное боковое давление составляло 6% от осевого, соответствующего началу дилатансии, поэтому нагружение считалось приблизительно одноосным. Коэффициент  $A$  выбирался из условия наилучшего согласования теории и эксперимента до нагрузок, не очень близких к разрушающим.

В [2] отмечается, что измерения поперечной деформации, осуществ-



Фиг. 5

влявшиеся тензодатчиками, возможно содержали ошибки при нагрузках, близких к разрушающим. В эксперименте, представленном в [4], дилатансия измерялась интегрально (по изменению объема масла, создававшего внешнее боковое давление). В этом случае, как видно из фиг. 5, б, рассматриваемая теоретическая зависимость согласуется с экспериментальными данными до нагрузок, значительно более близких к разрушающим.

Используя найденные значения коэффициента пропорциональности  $A$ , определим на основании соотношений (2.4) характеристики начальной трещиноватости.

Вследствие резкой зависимости коэффициента  $A$  от размеров начальных трещин можно считать, что на дилатансию влияют лишь наиболее крупные трещины близких между собой размеров. Поэтому пренебрегая распределением трещин по размерам, положим  $N \langle a_0^5 \rangle = N_* a_*^5$ , где  $N_*$  — число трещин выделенной группы в единице объема образца, а  $a_*$  — размер трещин в этой группе.

Выше отмечалось, что трещиностойкость породы по отношению к малым трещинам может сильно отличаться от трещиностойкости, определяемой в опытах с макроскопическими трещинами. Поэтому для определения трещиностойкости  $K$  необходимо рассматривать опыты, в которых участвуют такие же малые трещины. Выразим  $K$  через предел прочности  $\sigma_t$  на разрыв для образцов, аналогичных рассматриваемым, предполагая, что  $\sigma_t$  определяется началом роста в них некоторой дискообразной трещины из той же группы, т. е. трещины радиуса  $a_*$ , ориентированной примерно перпендикулярно оси растяжения. Используя формулу Гриффитса (с учетом связи между удельной энергией разрушения и  $K$ ), находим  $K = \sigma_t \sqrt{2a_*}$ . Тогда, учитывая (2.4), приходим к следующему выражению для  $A$ :

$$A = \frac{3}{4} \pi^2 E^{-1} \sigma_t^{-4} (1 - \nu^2) (1 - \nu)^2 J N_* a_*^3 \quad (3.1)$$

Таким образом, если известны  $E$ ,  $\nu$ ,  $\sigma_t$  и значение коэффициента  $A$ , то можно найти безразмерную концентрацию начальных трещин  $\nu = N_* a_*^3$ . Отметим, что отношение среднего расстояния между начальными трещинами ( $2L$ ) к их диаметру ( $2a_*$ ) примерно равно  $\frac{1}{2} \nu^{-1/3}$ .

Учитывая общий приближенный характер рассмотрения, примем для всех образцов  $\nu = 0, 2$ . Ниже представлены результаты вычисления  $N_* a_*^3$  по (3.1) для всех образцов, у которых возрастание поперечной деформации примерно соответствовало (до нагрузок, не слишком близких к разрушающим) зависимости  $\Delta \epsilon_1 = A \sigma^5$  и были известны значения  $\sigma_t$ ; значения  $E$  были найдены по данным о деформировании, приведенным в [2, 3, 5] (поскольку для каменной соли наблюдалась заметная нелинейность зависимости осевой деформации от осевого напряжения, в качестве  $E$  использован секущий модуль, соответствующий предельной точке



кривой деформирования); значение  $\sigma_c$  для гранита Westerly бралось из [17], а для остальных пород — из [5].

Порода		A, МПа <sup>-5</sup>	E, 10 <sup>4</sup> , МПа	$\sigma_c$ , МПа	$N_* a_*^3, \cdot 10^{-4}$	L/a <sub>*</sub>
Песчаник П-0	[5]	9·10 <sup>-16</sup>	6,4	21	3,6	7
Песчаник П-01	[5]	1,5·10 <sup>-15</sup>	5,4	20	4	6,8
Песчаник П-03	[5]	7·10 <sup>-16</sup>	6	25	5	6,3
Кварцевый диорит Д-2	[5]	7·10 <sup>-16</sup>	8,4	19	2,6	7,8
Каменная соль	[5]	3·10 <sup>-10</sup>	0,2	2,4	8	5,4
Гранит Westerly	[2]	1,5·10 <sup>-15</sup>	6	21	6	5,9
Гранит Westerly образец № 31	[3]	2,5·10 <sup>-16</sup>	6,5	21	1,1	10

Приведенные результаты показывают, что во всех рассмотренных образцах безразмерная концентрация начальных трещин  $N_* a_*^3$  была примерно одного порядка (10<sup>-4</sup>–10<sup>-3</sup>), т. е. среднее расстояние между способными сильно вырасти начальными трещинами примерно на порядок превышает их диаметр. Поэтому трещины действительно могли в значительном диапазоне изменения сжимающего напряжения расти практически не взаимодействуя, как это и предполагается в рассмотренной модели.

В [20] для образцов гранита изучались следы дефектов (в том числе трещиновидных), видимых в сечениях образцов. Полученные выше значения  $N_* a_*^3$  значительно ниже величины, которую можно оценить по данным [20]. Это связано с тем, что в рассмотренном процессе могла участвовать лишь небольшая часть наиболее крупных трещин из тех, что видны в сечении. Заметим в связи с этим, что согласно данным работы [12], в которой изучались сечения также и в образцах после нагружения, доля сильно выросших трещин мала.

Заслуживает внимания обстоятельство, что, судя по полученным результатам, условия для почти независимого роста начальных трещин в значительном диапазоне сжимающих напряжений могли реализоваться у весьма различных горных пород. По-видимому, в образцах, для которых наблюдался более резкий (чем по закону  $\sigma^5$ ) рост дилатансии, концентрация ( $N_* a_*^3$ ) начальных трещин, которые могли начать расти практически при одном и том же напряжении  $\sigma$ , была существенно более высокой, так что взаимодействие между ними начиналось сразу после начала роста, что и дало дополнительный вклад в дилатансию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бриджмен П. Исследования больших пластических деформаций и разрыва. М.: Изд-во иностр. лит. 1955. 444 с.
2. Brace W. F., Paulding B. W., Scholz C. H. Dilatancy in the fracture of crystalline rocks // J. Geophys. Res. 1966. V. 71, No. 16. P. 3939–3953.
3. Scholz C. H. Microfracturing and the inelastic deformation of rock in compression // J. Geophys. Res. 1968. V. 73, No. 4. P. 1417–1432.
4. Cook N. G. W. An experiment proving that dilatancy is a pervasive volumetric property of brittle rock loaded to failure // Rock Mech. 1970. V. 2. No. 4. P. 181–188.
5. Ставрогин А. Н., Прогосеня А. Г. Пластичность горных пород. М.: Недра. 1979. 301 с.
6. Stevens J. L., Holcomb D. L. A theoretical investigation of the sliding crack model of dilatancy // J. Geophys. Res. 1980. V. B85. No. 12. P. 7091–7100.
7. Holcomb D. J., Stevens J. L. The reversible Griffith crack: A viable model for dilatancy // J. Geophys. Res. 1980. V. B85, No. 12. P. 7101–7107.
8. Гольдштейн Р. В., Ладыгин В. М., Осипенко Н. М. Модель хрупкого разрушения слабо пористого материала при сжатии и растяжении // Физ.-техн. пробл. разработки полез. ископаемых. 1974. № 1. С. 3–13.
9. Adams M., Sines G. crack extension from flaws in a brittle material subjected to compression // Tectonophysics. 1978. V. 49. No. 1. P. 97–118.
10. Hoek B., Bieniawski Z. T. Brittle fracture propagation in rock under compression // Intern. J. Fract. Mech. 1965. V. 1. No. 3. P. 137–155.
11. Райс Дж. Механика очага землетрясения. М.: Мир. 1982. 217 с.
12. Peng S., Johnson A. M. Crack growth and faulting in cylindrical specimens of Chelmsford granite // Intern. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr. 1972. V. 9. No. 1. P. 37–86.
13. Fairhurst C., Cook N. G. W. The phenomenon of rock splitting parallel to the direction of maximum compression in the neighbourhood of a surface // Proc. 1st Congr. Intern. Soc. Rock Mech., Lisbon. 1966. V. 1. P. 687–692.

14. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 707 с.
15. *Енгов В. М., Ягуст В. И.* Экспериментальные исследования закономерностей квазистатического развития микротрещин в бетоне // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 4. С. 93—103.
16. *Енгов В. М.* О роли структуры материала в механике разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 110—118.
17. *Grase W. F.* Brittle fracture of rocks // State of stress in the earth's crust: Proc. Intern. Conf. N. Y.: Elsevier. 1964. P. 110—178.
18. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. М.: Мир. 1975. Т. 2. С. 83—203.
19. *Салганик Р. Л.* Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 149—158.
20. *Hadley K.* Comparison of calculated and observed crack densities and seismic velocities in Westerly granite // J. Geophys. Res. 1976. V. 81. No. 20. P. 3484—3494.

Москва

Поступила в редакцию  
14.VII.1986