МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1987

УДК 539.376

УСТОЙЧИВОСТЬ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ НЕОДНОРОДНО ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

ДРОЗДОВ А. Д., СОЛОМЕНЦЕВ Ю. Е.

Устойчивость неоднородно стареющих тел на конечном и бесконечном интервалах времени исследовалась в [1–4]. В [2–4] показано, что условия устойчивости на бесконечном интервале времени не зависят от возраста материала в момент загружения и определяются предельным ядром ползучести. В данной работе предложен метод анализа устойчивости неоднородно вязкоупругих стержней на конечном и бесконечном интервалах времени. Получены условия устойчивости, существенно зависящие от возраста материала. Рассмотрено влияние наращивания материала на критическое время и критическую нагрузку.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоский изгиб прямолинейного стержня длины l, изготовленного из неоднородно стареющего вязкоупругого материала. Поперечное сечение стержня имеет ось симметрии. Изгиб происходит в плоскости, проходящей через продольную ось стержня и его ось симметрии. Введем ось x, направленную вдоль продольной оси стержня в недеформированном состоянии.

В момент времени $t=0$ к стержню приложена внешняя нагрузка. Обозначим через $\rho(x)$ возраст элемента материала стержня в окрестности точки x в момент загружения. Функция $\rho(x)$ кусочно-непрерывная и ограниченная.

При одноосном напряженном состоянии деформация $\varepsilon(t, x)$ и напряжение $\sigma(t, x)$ связаны соотношениями

$$\varepsilon=E^{-1}(I+K)\sigma \tag{1.1}$$

$$K\sigma=\int_0^t K^\circ(t+\rho(x),\ \tau+\rho(x),\ x)\sigma(\tau,x)\,d\tau$$

Здесь I — единичный оператор, K — оператор ползучести со слабосингулярным ядром $K^\circ(t, \tau, x)$, E — постоянный модуль упругомгновенной деформации. Оператор ползучести с ядром (1.1) позволяет описать неоднородность материала, вызванную тем, что элементы стержня зарождаются в разные моменты времени и изготавливаются из материалов с различными механическими характеристиками.

Поведение стержня исследуется в квазистатическом приближении. Предполагается, что прогиб стержня $y(t, x)$ достаточно мал (так что величиной $(y')^2=(\partial y/\partial x)^2$ можно пренебречь по сравнению с единицей) и справедлива гипотеза плоских сечений.

2. Устойчивость консоли под действием сжимающей нагрузки. Рассмотрим стержень, один конец которого жестко защемлен, а другой свободен. На стержень действует сжимающая сила P и распределенная поперечная нагрузка интенсивности $q(t, x)$. Пусть y_0 — критическое значение прогиба, q_0 — максимальное значение интенсивности поперечной нагрузки. Критическое время T_0 определяется как момент первого достижения прогибом величины y_0:

$$\sup_x|y(t, x)|<y_0,\quad \sup_x|y(T_0, x)|=y_0\ \ (t\in[0, T_0],\ x\in[0, l])$$

Стержень называется устойчивым по Четаеву на интервале времени $[0, T]$, если $T_0 > T$ для любой поперечной нагрузки $q(t, x)$, $\sup_{t,x}|q(t, x)| < q_0$ $(t \in [0, T],\ x \in [0, l])$.

Уравнение изогнутой оси стержня и граничные условия имеют вид (J — момент инерции сечения стержня):

$$y'' + \alpha(I+K)y = -(I+K)m, \quad \alpha = P(EJ)^{-1}$$

$$m(t,x) = (EJ)^{-1}\int_0^x (x-\xi)\,q(t,\xi)\,d\xi \tag{2.1}$$

$$y(t, 0) = 0, \quad y'(t, l) = 0 \tag{2.2}$$

Введем обозначения

$$u_i^2(t) = \int_0^l \left[\frac{\partial^i y(t,x)}{\partial x^i}\right]^2 dx, \quad v_i(t) = \sup_\tau u_i(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \quad (i = 0, 1, 2)$$

Обозначим через U множество дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, l]$ функций $\psi(x)$, удовлетворяющих граничным условиям (2.2). Пусть λ_1 — минимальное положительное собственное значение краевой задачи $\psi'' + \lambda_1\psi = 0$, $\psi(x) \in U$, а λ_2 — наибольшее число, при котором для любой функции $\psi(x) \in U$ справедлива оценка

$$\left[\int_0^l \psi^4(x)\,dx\right]^{1/2} \leqslant \lambda_2^{-2}\int_0^l [\psi'(x)]^2\,dx$$

Существование параметра $\lambda_2 > 0$ следует из [5].

Для любого $t \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$u_0^2(t) \leqslant \lambda_1^{-1}u_1^2(t), \quad \left[\int_0^l y^4(t,x)\,dx\right]^{1/2} \leqslant \lambda_2^{-2}u_1^2(t) \tag{2.3}$$

Умножим равенство (2.1) на $y(t, x)$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до l. Интегрируя по частям, с учетом (2.3) получим

$$(1 - \alpha\lambda_1^{-1})\,u_1(t) \leqslant \alpha\lambda_2^{-2}\int_0^t \Phi(t,\tau)\,u_1(\tau)\,d\tau + \lambda_1^{-1/2}\mu(t) \tag{2.4}$$

$$\Phi^2(t,\tau) = \int_0^l [K^\circ(t+\rho(x), \tau+\rho(x), x)]^2\,dx$$

$$\mu^2(t) = \int_0^l \left[m(t,x) + \int_0^t K^\circ(t+\rho(x), \tau+\rho(x), x)\,m(\tau,x)\,d\tau\right]^2 dx$$

Предположим, что $\alpha < \lambda_1$, т. е. соответствующий упругий стержень устойчив по Эйлеру. Тогда из (2.4) и результатов [6] следует неравенство

$$u_1(t) \leqslant q_0 A(t) \exp\left[\int_0^t \Phi^\circ(t,\tau)\,d\tau\right] \tag{2.5}$$

$$A(t) = \frac{\lambda_1^{1/2}}{2EJ(\lambda_1 - \alpha)}\sup_s \left[\int_0^l \left(1 + \int_0^s K^\circ(s+\rho(x), \tau+\rho(x), x)\,d\tau\right)^2 dx\right]^{1/2}$$

$$\Phi^\circ(t, s) = \alpha\lambda_1[(\lambda_1 - \alpha)\lambda_2^2]^{-1}\sup_\tau \Phi(\tau, s), \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t$$

Согласно (2.2), имеем

$$\sup_x|y(t,\ x)|\leqslant l^{1/2}u_1(t),\qquad x\in[0,\ l] \tag{2.6}$$

Из соотношений (2.5), (2.6) найдем

$$\sup_{t,x}|y(t,\ x)|\leqslant Rq_0 \tag{2.7}$$

$$R=\sup_t A(t)l^{1/2}\exp\left[\int_0^t \Phi^\circ(t,\tau)\,d\tau\right],\qquad t\in[0,T]$$

Теорема 1. Вязкоупругий стержень устойчив по Четаеву на интервале времени $[0,\ T]$, если $P<EJ\lambda_1$ и $R<y_0/q_0$.

Для ядра ползучести [4]

$$K^\circ(t,\ \tau,\ x)=-(\partial/\partial\tau)[\varphi(\tau)(1-\exp(-\gamma(t-\tau)))],\qquad \varphi(\tau)=A_1+A_2/\tau$$

из (2.7) следует, что с увеличением возраста материала критическое время T_0 возрастает. Этот факт подтверждается результатами численного анализа [2].

Теорема 1 справедлива также для стержня, концы которого шарнирно оперты. При этом параметры λ_1 и λ_2 разыскиваются на множестве U функций $\psi(x)$, удовлетворяющих граничным условиям $\psi(0)=\psi(l)=0$.

3. Устойчивость стержня на бесконечном интервале времени. Вязкоупругий стержень называется устойчивым по Ляпунову на бесконечном интервале времени, если для любого $\delta_1>0$ существует такое $\delta_2>0$, что из неравенства $\sup_{t,x}|q(t,\ x)|<\delta_2$ следует оценка $\sup_{t,x}|y(t,\ x)|<\delta_1$ ($t\geqslant0$, $x\in[0,\ l]$). Из соотношения (2.4) вытекает

Теорема 2. Вязкоупругий стержень устойчив на бесконечном интервале времени, если

$$P<EJ\lambda_1(1+\lambda_1\lambda_2^{-2}|\Phi|)^{-1},\qquad |\Phi|=\sup_t\int_0^t \Phi(t,\tau)\,d\tau \tag{3.1}$$

Пусть существует такая функция $K_1(t,\ \tau)$, что

$$0<K^\circ(t+\rho(x),\ \ \tau+\rho(x),\ \ x)\leqslant K_1(t,\ \tau),\qquad |K_1|<\infty \tag{3.2}$$

Существование предельного ядра ползучести [4] не предполагается.

Согласно [2], стержень устойчив на бесконечном интервале времени, если

$$P<EJ\lambda_1(1+|K_1|)^{-1} \tag{3.3}$$

При $\rho=\mathrm{const}$ соотношение (3.1) дает более грубую, чем (3.3), оценку критической нагрузки. Если возраст материала стержня переменный, то условие (3.1) может оказаться менее жестким, чем (3.3).

4. Устойчивость растущего стержня на конечном интервале времени. Пусть до деформации поперечное сечение стержня представляет собой прямоугольник единичной ширины и толщины h_0. В момент времени $t=0$ к стержню прикладывается внешняя нагрузка, а на его боковой поверхности начинается наращивание материала, которое продолжается на интервале времени $[0,\ T]$. Внешние усилия складываются из сжимающих сил $P=P(t)$, приложенных к торцам стержня, и распределенной поперечной нагрузки интенсивности $q=q(t,\ x)$. В процессе наращивания приток материала осуществляется симметрично относительно нейтральной оси, ширина поперечного сечения стержня постоянна, а толщина изменяется по заданному закону $h=h(t)$. Наращивание материала осуществляется без натяга.

При одноосном напряженном состоянии напряжение и деформация в наращиваемых слоях связаны соотношением

$$\sigma(t,x,z)=E\left[\varepsilon(t,x,z)-\int_{\tau^*(z)}^{t} Q^\circ(t-\tau^*(z),\tau-\tau^*(z))\,\varepsilon(\tau,x,z)\,d\tau\right] \tag{4.1}$$

Здесь $Q^\circ(t, \tau)$ — ядро релаксации материала, $\tau^*(z)$ — момент зарождения элемента стержня, расположенного на расстоянии z от нейтральной оси.

Уравнение для определения прогиба стержня $y(t, x)$ имеет вид

$$[(I-S)y'']''+\alpha_1 y''=q_1, \qquad \alpha_1(t)=P[EJ(t)]^{-1} \tag{4.2}$$

$$q_1(t, x)=q(t, x)[EJ(t)]^{-1}, \quad J(t)=h^3(t)/12$$

Ядро $S^\circ(t, \tau)$ интегрального оператора S определяется по формуле

$$S^\circ(t,\tau)=\left(\frac{h_0}{h(t)}\right)^3 Q^\circ(t,\tau)+\frac{24}{h^3(t)}\left[\int_0^\tau Q^\circ(t-s,\tau-s)h^2(s)h^\cdot(s)\,ds+\right.$$

$$\left.+h^2(\tau)h^\cdot(\tau)\left(1-\int_0^{t-\tau} Q^\circ(t-\tau,s)\,ds\right)\right], \qquad h^\cdot(t)=dh(t)/dt$$

Граничные условия зададим одним из соотношений

$$y(t, 0)=y'(t, 0)=y(t, l)=y'(t, l)=0 \tag{4.3}$$

$$y(t,0)=y'(t,0)=y(t,l)=y''(t,l)=0$$

$$y(t,0)=y''(t,0)=y(t,l)=y''(t,l)=0$$

Для получения условий устойчивости умножим равенство (4.2) на $y(t, x)$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до l. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (4.3), получим

$$u_2^2(t)=\alpha_1(t)u_1^2(t)+\int_0^t S^\circ(t,\tau)\,d\tau\int_0^l y''(t,x)y''(\tau,x)\,dx+$$

$$+\int_0^l q_1(t,x)y(t,x)\,dx$$

Из этого соотношения, неравенства Коши — Буняковского и тождества Релея следует оценка

$$[1-\alpha_1(t)\lambda_3^{-1}]u_2(t)\leqslant\int_0^t S^\circ(t,\tau)u_2(\tau)\,d\tau+q_0 l^{1/2}[EJ(t)\lambda_4^{1/2}]^{-1} \tag{4.4}$$

Здесь λ_3, λ_4 — наименьшие положительные собственные значения краевых задач $d^4\psi/dx^4+\lambda_3\psi''=0$, $d^4\psi/dx^4-\lambda_4\psi=0$ с одним из граничных условий (4.3).

Предположим, что $P(t)<EJ(t)\lambda_3$ для любого $t\in[0, T]$. Это условие гарантирует устойчивость упругого стержня толщины $h(t)$. Из соотношения (4.4) и результатов [6] найдем

$$u_2(t)\leqslant q_0(l^3/3)^{-1/2}R, \qquad R=\sup_t A(t)\exp\left[\int_0^t \Phi^\circ(t,\tau)\,d\tau\right] \tag{4.5}$$

$$A(t)=\lambda_3 l^2[(3\lambda_4)^{1/2}E]^{-1}\sup_s[(\lambda_3-\alpha_1(s))J(s)]^{-1}$$

$$\Phi^\circ(t, s)=\lambda_3\sup_\tau S^\circ(\tau, s)(\lambda_3-\alpha_1(\tau))^{-1}, \qquad 0\leqslant s\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T$$

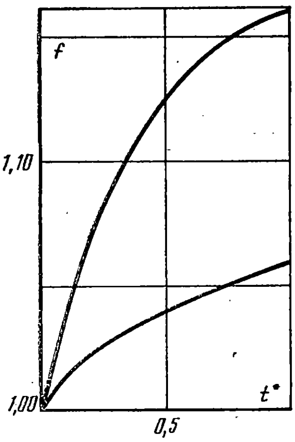
Из соотношений (4.3) и неравенства Коши — Буняковского имеем

$$|y(t, x)|\leqslant(l^3/3)^{1/2}u_2(t) \tag{4.6}$$

Согласно оценкам (4.5), (4.6) справедлива

Теорема 3. Растущий вязкоупругий стержень устойчив по Четаеву на интервале времени $[0, T]$, если $P(t)<EJ(t)\lambda_3$ и $R<y_0/q_0$.

Предположим, что функция $H(t,\tau)=\lambda_3 S^\circ(t,\tau)(\lambda_3-\alpha_1(t))^{-1}$ непрерывно дифференцируема по t и непрерывна по τ. Тогда из (4.4) и [6] следует справедливость теоремы 3, в условии которой можно положить



$$R=A^\circ \sup_t \exp\left[\int_0^t \Phi^\circ(t,\tau)\,d\tau\right]$$

$$A^\circ=\lambda_3 l^2[(3\lambda_4)^{1/2}E]^{-1}\sup_t[(\lambda_3-\alpha_1(t))J(t)]^{-1}$$

$$\Phi^\circ(t,\tau)=H(\tau,\tau)+\int_0^t \frac{\partial H(\tau,s)}{\partial\tau}\,ds \qquad t\in[0,T]$$

Зависимость критического времени от скорости наращивания исследована численно на примере растущего консольного стержня. На стержень действует поперечная нагрузка постоянной интенсивности q, сжимающая сила $P=0$. При плоском изгибе $y(t,x)=f(t)y_0(x)$, где $y_0(x)$ — упругий прогиб стержня начальной толщины. Ядро релаксации принято в виде $Q^\circ(t,\ \tau)=\ -(\partial/\partial\tau)[\varphi(\tau)(1-\exp(-\gamma(t-\tau)))]$, $\varphi(\tau)=A_1+A_2\exp(-\beta\tau)$, $A_1=0{,}03$, $A_2=0{,}47$, $\gamma=0{,}1$ сут$^{-1}$, $\beta=1$ сут$^{-1}$. Время наращивания $T=10$ сут., $h(T)=2h_0$. Скорость наращивания $h^\cdot(t)=v_0$ при $0\leqslant t\leqslant T_*$ и $h^\cdot(t)=0$ при $T_*<t\leqslant T$. На фигуре приведены графики $f(t_*)$, $t_*=t/T$. Кривая *1* соответствует значению $T_*=1$ сут., а кривая *2* — значению $T_*=10$ сут. Результаты численного анализа свидетельствуют, что с увеличением скорости наращивания критическое время возрастает.

Аналогично исследуется устойчивость более сложных тонкостенных конструкций (например, пластин и оболочек), толщина которых возрастает во времени по заданному закону.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Потапов В. Д.* Об устойчивости растущего вязкоупругого стержня, подверженного старению // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1983. Т. 270. № 4. С. 799–803.
2. *Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д.* Устойчивость неоднородно стареющих вязкоупругих тел // Вопросы судостроения. Сер. Проектирование судов. Вып. 42. Л.: ЦНИИ «Румб», 1985. С. 7–18.
3. *Дроздов А. Д., Колмановский В. Б., Потапов В. Д.* Устойчивость стержней из неоднородно стареющего вязкоупругого материала // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 177–187.
4. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука. 1983. 336 с.
5. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973. 407 с.
6. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука. 1976. 152 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.III.1986