МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1987

УДК 624.07:534.1

ТЕОРИЯ ПРОДОЛЬНОГО КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ В ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЕ

ФИЛИППОВ И. Г.

Исследования по колебаниям удлиненных тел, находящихся в деформируемой среде, представляют теоретический и прикладной интерес. В частности, к таким задачам относятся продольные колебания круглых стержней, контактирующих с деформируемой средой. Трудность решения этой задачи обусловлена влиянием окружающей среды и сложностью условий контакта по поверхности стержня, особенно при учете трения.

Первые результаты, где формулируются и решаются задачи для стержней, получены в [1–5]. В частности, в [3] окружающая среда рассматривается как винклеровская и выводится уравнение продольного колебания круглого упругого стержня при законе сухого трения Кулона, близкое к классическому, т. е. уравнение в частных производных второго порядка.

В публикуемой работе выводятся уравнения продольного колебания круглого вязкоупругого стержня, находящегося в деформируемой среде, при учете трения и при других условиях контакта. Из полученного уравнения получаются приближенные уравнения любого порядка по производным.

1. Постановка общей задачи. Пусть в изотропной однородной вязкоупругой среде находится бесконечный стержень радиуса r_0 из вязкоупругого материала. Задачу будем формулировать в точной трехмерной линейной постановке. Зависимости напряжений σ_{ij} от деформаций ε_{ij} в стержне и в среде примем в виде

$$\sigma_{jj}^{(m)}=L_m[\varepsilon^{(m)}]+2M_m[\varepsilon_{jj}^{(m)}]\quad (m=0,1) \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij}^{(m)}=M_m[\varepsilon_{ij}^{(m)}]\quad (i\neq j;\ i,j=r,\theta,z)$$

$$L_m(\zeta)=\lambda_m\left[\zeta(t)-\int_0^t f_{1m}(t-\xi)\zeta(\xi)\,d\xi\right],$$

$$M_m(\zeta)=\mu_m\left[\zeta(t)-\int_0^t f_{2m}(t-\xi)\zeta(\xi)\,d\xi\right]$$

где $m=0$ относится к стержню, а $m=1$ — к среде, L_m и M_m — вязкоупругие операторы, $f_{jm}(t)$ — ядра вязкоупругих операторов, λ_m, μ_m — упругие постоянные.

Уравнения движения материала стержня и среды имеют вид

$$N_m(\Delta\Phi_m)=\rho_m\partial^2\Phi_m/\partial t^2,\quad N_m=L_m+2M_m$$

$$M_m(\Delta\Psi_{2m})=\rho_m\partial^2\Psi_{2m}/\partial t^2 \tag{1.2}$$

В данной задаче искомые величины от угла θ не зависят; вектор перемещений $\mathbf{U}_m$ через потенциалы Φ_m и Ψ_{2m} определяется по формуле

$$\mathbf{U}_m=\operatorname{grad}\Phi_m+\operatorname{rot}[\operatorname{rot}(\mathbf{e}_z\Psi_{2m})]$$

Продольные колебания стержня вызываются внешними усилиями f_r и f_{rz}, заданными на поверхности стержня $r=r_0$, граничные условия имеют вид (начальные условия нулевые).

При условии сухого трения по Кулону

$$\sigma_{rr}^{(0)}=\sigma_{rr}^{(1)}+f_r(z,t),\qquad \sigma_{rz}^{(0)}=-\eta_0\sigma_{rr}^{(0)} \tag{1.3}$$

$$\sigma_{rz}^{(1)}=\eta_0\sigma_{rr}^{(1)}+r_{rz}(z,t),\qquad u_r^{(0)}=u_r^{(1)}\quad (r=r_0)$$

При жестком контакте

$$\sigma_{rr}^{(0)}=\sigma_{rr}^{(1)}+f_r(z,t),\qquad u_r^{(0)}=u_r^{(1)} \tag{1.4}$$

$$\sigma_{rz}^{(0)}=\sigma_{rz}^{(1)}+f_{rz}(z,t),\qquad u_z^{(0)}=u_z^{(1)}$$

Известно, что коэффициент трения η_0 в динамике отличается от статического и его знак зависит от знака скорости относительного проскальзывания частиц по поверхности контакта. Поэтому в общем случае задача при граничных условиях (1.3) является нелинейной краевой задачей.

Далее, будем предполагать, что коэффициент трения η_0 по модулю совпадает со статическим коэффициентом трения и, кроме того, сохраняет тот или иной знак в течение исследуемого промежутка времени. В силу наложенных ограничений коэффициент η_0 можно считать постоянным и независящим от искомых функций, а сама задача сводится к линейной. В случае идеального контакта в граничных условиях (1.3) коэффициент трения η_0 необходимо положить равным нулю.

Внешнее усилие f_r в общем случае включает в себя и стационарное давление внешней среды на стержень. Функции внешних усилий f_r, f_{rz} представим в виде [5, 6]:

$$f_r(z,t)=\int_0^\infty \left.\begin{matrix}\sin(kz)\\ -\cos(kz)\end{matrix}\right\} dk\int_{(l)} f_r^{(0)}(k,p)\exp(pt)\,dp \tag{1.5}$$

$$f_{rz}(z,t)=\int_0^\infty \left.\begin{matrix}\cos(kz)\\ \sin(kz)\end{matrix}\right\} dk\int_{(l)} f_{rz}^{(0)}(k,p)\exp(pt)\,dp$$

и будем считать, что $f_r^{(0)}$, $f_{rz}^{(0)}$ малы вне области $k\leqslant k_0$; $|\operatorname{Im} p|\leqslant\omega_1$, что накладывает ограничения на частоты распространяющихся в стержне волн (в противном случае стержень уже нельзя будет заменять одномерным телом).

В силу (1.5) потенциалы Φ_m и Ψ_{2m} также будем искать в виде

$$\Phi_m=\int_0^\infty \left.\begin{matrix}\sin(kz)\\ -\cos(kz)\end{matrix}\right\} dk\int_{(l)} \Phi_m^{(0)}\exp(pt)\,dp,$$

$$\Psi_{2m}=\int_0^\infty \left.\begin{matrix}\cos(kz)\\ \sin(kz)\end{matrix}\right\} dk\int_{(l)} \Psi_{2m}^{(0)}\exp(pt)\,dp \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в уравнения (1.2), для $\Phi_m^{(0)}$, $\Psi_{2m}^{(0)}$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2\Phi_m^{(0)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Phi_m^{(0)}}{dr}-\alpha_m^2\Phi_m^{(0)}=0 \tag{1.7}$$

$$\frac{d^2\Psi_{2m}^{(0)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Psi_{2m}^{(0)}}{dr}-\beta_m^2\Psi_{2m}^{(0)}=0$$

$$\alpha_m^2=\rho_m p^2[N_m^{(0)}]^{-1}+k^2,\qquad \beta_m^2=\rho_m p^2[M_m^{(0)}]^{-1}+k^2$$

где $N_m^{(0)}$, $M_m^{(0)}$ — преобразованные по Лапласу вязкоупругие операторы N_m и M_m.

Граничные условия (1.3) и (1.4) преобразуются к форме

$$\sigma_{rr,0}^{(0)}=\sigma_{rr,0}^{(1)}+f_r^{(0)}(k,p),\qquad \sigma_{rz,0}=-\eta_0\sigma_{rr,0}^{(0)} \tag{1.8}$$

$$\sigma_{rz,0}^{(1)}=\eta_0\sigma_{rr,0}^{(1)}+f_{rz}^{(0)}(k,p),\qquad u_{r,0}^{(0)}=u_{r,0}^{(1)}\quad (r=r_0)$$

$$\sigma_{rr,0}^{(0)}=\sigma_{rr,0}^{(1)}+f_r^{(0)}(k,p),\qquad u_{r,0}^{(0)}=u_{r,0}^{(1)} \tag{1.9}$$

$$\sigma_{rz,0}^{(0)}=\sigma_{rz,0}^{(1)}+f_{rz}^{(0)}(k,p),\qquad u_{z,0}^{(0)}=u_{z,0}^{(1)}$$

Решения уравнений (1.7), ограниченные при $r=0$ и $r=\infty$, имеют вид ($I_\nu(\zeta)$ и $K_\nu(\zeta)$ – модифицированные функции Бесселя):

$$\Phi_0^{(0)}=A_0I_0(\alpha_0,r),\qquad \Psi_{20}^{(0)}=B_0I_0(\beta_0r),\qquad \Phi_1^{(0)}=A_1K_0(\alpha_1r),$$
$$\Psi_{21}^{(0)}=B_1K_0(\beta_1r) \tag{1.10}$$

Преобразованные величины перемещений $u_{r,0}^{(m)}, u_{z,0}^{(m)}$ в стержне и в среде равны

$$u_{r,0}^{(0)}=\alpha_0A_0I_1(\alpha_0r)-k\beta_0B_0I_1(\beta_0r)$$
$$u_{z,0}^{(0)}=kA_0I_0(\alpha_0r)-\beta_0^2B_0I_0(\beta_0r) \tag{1.11}$$
$$u_{r,0}^{(1)}=-\alpha_1A_1K_1(\alpha_1r)+k\beta_1K_1(\beta_1r)B_1$$
$$u_{z,0}^{(1)}=kA_1K_0(\alpha_1r)-\beta_1^2K_0(\beta_1r)B_1$$

Разложим величины $u_{r,0}^{(0)}, u_{z,0}^{(0)}$ для стержня в степенные ряды

$$u_{r,0}^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}(A_0\alpha_0^{2n+2}-kB_0\beta_0^{n+2})\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!\,(n+1)!}$$
$$u_{z,0}^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}(kA_0\alpha_0^{2n}-B_0\beta_0^{2n+2})\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2} \tag{1.12}$$

При классическом подходе к исследованию продольных колебаний стержня задачу сводят к нахождению смещений точек оси стержня, т. е. при $r=0$. Аналогично этому введем главные части выражений (1.12):

$$U_0=\alpha_0^2A_0-k\beta_0^2B_0,\qquad W_0=kA_0-\beta_0^2B_0 \tag{1.13}$$

которые являются первыми слагаемыми в рядах (1.12).

Переходя от постоянных интегрирования A_0, B_0 к главным частям преобразованных величин перемещений (1.13), для $u_{r,0}^{(0)}, u_{z,0}^{(0)}$ вместо (1.12) получим выражения ($\varkappa=(n-q-1)$):

$$u_{r,0}^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}[(\beta_0^{2n}+C_0\alpha_0^2Q_n^{(0)})U_0-kC_0\alpha_0^2Q_n^{(0)}W_0]\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!\,(n+1)!} \tag{1.14}$$
$$u_{z,0}^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}[kC_0Q_n^{(0)}U_0+(\beta_0^{2n}-k^2C_0Q_n^{(0)})W_0]\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}$$
$$C_0=1-N_0^{(0)}[M_0^{(0)}]^{-1},\qquad Q_n^{(0)}=\sum_{q=0}^{n-1}\alpha_0^{2\varkappa}\beta_0^{2q},\qquad Q_0^{(0)}\equiv 0$$

Обращая (1.14) по k и p или переходя от преобразованных величин перемещений к самим перемещениям $u_r^{(0)}$, $u_z^{(0)}$ и их главным частям U,

W, получим

$$
\begin{aligned}
u_r^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\lambda_2^{(n)} + C\lambda_1^{(1)} Q_n) U - C\lambda_1^{(1)} Q_n \frac{\partial W}{\partial z} \right] \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!\,(n+1)!} \\
u_z^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[-CQ_n \frac{\partial U}{\partial z} + \left(\lambda_2^{(n)} + CQ_n \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W \right] \frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

$$
C = (1 - N_0 M_0^{-1}), \qquad Q_n = \sum_{q=0}^{n-1} \lambda_1^{(\varkappa)} \lambda_2^{(q)}
$$

$$
\lambda_1^{(n)} = \left[\rho_0 N_0^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]^{(n)}, \qquad \lambda_2^{(n)} = \left[\rho_0 M_0^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]^{(n)}
$$

т. е. операторы $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_2^{(1)}$ являются одномерными операторами типа волновых (в случае упругих стержней), описывающих одномерные вязкоупругие продольные или поперечные волны.

Соотношения (1.15) получены лишь из общих решений уравнений (1.2) при нулевых начальных условиях. Для нахождения самих главных частей или для нахождения уравнений, их описывающих, имеем граничные условия (1.3) или (1.4).

2. Уравнения продольного колебания стержня при учете сил трения. Удовлетворяя найденные решения для преобразованных потенциалов $\Phi_m^{(0)}$ и $\Psi_{2m}^{(0)}$ или для преобразованных перемещений граничным условиям (1.8) и исключая из этой системы постоянные интегрирования A_1, B_1 для окружающей среды, для постоянных интегрирования A_0, B_0 получим систему алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
&\left\{ 1 + \eta_0 \left[\frac{k(\beta_1^2 + k^2)}{\alpha_1(\beta_1^2 - k^2)} \frac{K_0(\alpha_1 r_0)}{K_1(\alpha_1 r_0)} + \frac{2k\beta_1}{(\beta_1^2 - k^2)} \frac{K_0(\beta_1 r_0)}{K_1(\beta_1 r_0)} + \right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{4k}{r_0(\beta_1^2 - k^2)} \right] \right\} \left\{ \left[(\beta_0^2 + k^2) I_0(\alpha_0 r_0) - \frac{2\alpha_0}{r_0} I_1(\alpha_0 r_0) \right] A_0 - \right. \\
&\left. -2k \left[\beta_0^2 I_0(\beta_0 r_0) - \frac{\beta_0}{r_0} I_1(\beta_0 r_0) \right] B_0 \right\} + \\
&+ \frac{M_1^{(0)}}{M_0^{(0)}} \left\{ \left[\frac{(\beta_1^2 + k^2)^2}{\alpha_1(\beta_1^2 - k^2)} \frac{K_0(\alpha_1 r_0)}{K_1(\alpha_1 r_0)} - \frac{4k^2\beta_1}{(\beta_1^2 - k^2)} \frac{K_0(\beta_1 r_0)}{K_1(\beta_1 r_0)} + \right.\right. \\
&\left.\left. + 2/r_0 \right] \right\} [\alpha_0 I_1(\alpha_0 r_0) A_0 - k\beta_0 I_1(\beta_0 r_0) B_0] = F_1^{(0)}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&[2\alpha_0 k I_1(\alpha_0 r_0) A_0 - \beta_0(\beta_0^2 + k^2) I_1(\beta_0 r_0) B_0] = \\
&= -\eta_0 \{ [(\beta_0^2 + k^2) I_0(\alpha_0 r_0) - (2\alpha_0/r_0) I_1(\alpha_0 r_0)] A_0 - \\
&-2k [\beta_0^2 I_0(\beta_0 r_0) - (\beta_0/r_0) I_1(\beta_0 r_0)] B_0 \}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
F_1^{(0)} &= [M_0^{(0)}]^{-1} f_r^{(0)}(k, p) - \eta_0 [f_{rz}^{(0)}(k, p) - \eta_0 f_r^{(0)}(k, p)] \times \\
&\times \left[\frac{k(\beta_1^2 + k^2)}{\alpha_1(\beta_1^2 - k^2)} \frac{K_0(\alpha_1 r_0)}{K_1(\alpha_1 r_0)} + \frac{2k\beta_1}{\beta_1^2 - k^2} \frac{K_0(\beta_1 r_0)}{K_1(\beta_1 r_0)} + \frac{4k}{r_0(\beta_1^2 - k^2)} \right]
\end{aligned}
$$

при этом A_1, B_1 через A_0, B_0 выражаются по формулам

$$
A_1 K_1(\alpha_1 r_0) = -\frac{(\beta_1^2 + k^2) u_{r,0}^{(0)} + k[\eta_0 \sigma_{rr,0}^{(0)} + (f_{rz}^{(0)} - \eta_0 f_r^{(0)})][M_1^{(0)}]^{-1}}{\alpha_1(\beta_1^2 - k^2)}
$$

$$
B_1 K_1(\beta_1 r_0) = -\frac{2k u_{r,0}^{(0)} - [\eta_0 \sigma_{rr,0}^{(0)} + (f_{rz}^{(0)} - \eta_0 f_r^{(0)})][M_1^{(0)}]^{-1}}{\beta_1(\beta_1^2 - k^2)}
$$

При исследовании волновых процессов в стержне аргументы модифицированных функций Бесселя $K_\nu(\gamma r_0)$ велики (большие значения p), и поэтому соотношения

$$K_0(\gamma r_0)/K_1(\gamma r_0)\cong 1 \quad (\gamma=\alpha_1;\ \beta_1) \tag{2.3}$$

Учитывая (2.3) и переходя в (2.1), (2.2) от A_0, B_0 к главным частям U_0, W_0, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+\eta_0 R_1^{(0)})\Big\{\Big[(\beta_0^2+k^2)C_0Q_n^{(0)}+(1-C_0)\beta_0^{2n}- \tag{2.4}$$

$$-\frac{1}{n+1}(\beta_0^{2n}+C_0\alpha_0^2Q_n^{(0)})\Big]U_0-k\Big[(\beta_0^2+k^2)C_0Q_n^{(0)}-(1+C_0)\beta_0^{2n}-$$

$$-\frac{\alpha_0^2}{n+1}C_0Q_n^{(0)}\Big]W_0\Big\}\frac{(r_0/2)^{2n}}{(n!)^2}+\frac{M_1^{(0)}}{M_0^{(0)}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+{}^1/{}_2r_0R_0)}{n+1}[(\beta_0^{2n}+C_0\alpha_0^2Q_n^{(0)})U_0-$$

$$-kC_0Q_n^{(0)}\alpha_0^2W_0]\frac{(r_0/2)^{2n}}{(n!)^2}=F_1^{(0)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{k[2\alpha_0^2C_0Q_n^{(0)}+(1+C_0)\beta_0^{2n}]U_0-$$

$$-\alpha_0^2[2k^2C_0Q_n^{(0)}-(1-C_0)\beta_0^{2n}]W_0\}\frac{(r_0/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}+$$

$$+\eta_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(n+1)}{r_0}\Big\{\Big[(\beta_0^2+k^2)C_0Q_n^{(0)}+(1-C_0)\beta_0^{2n}-\frac{1}{n+1}(\beta_0^{2n}+C_0\alpha_0^2Q_n^{(0)})\Big]U_0-$$

$$-k\Big[(\beta_0^2+k^2)C_0Q_n^{(0)}-(1+C_0)\beta_0^{2n}-\frac{\alpha_0^2}{n+1}C_0Q_n^{(0)}\Big]W_0\Big\}\frac{(r_0/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}=0$$

$$R_0=\frac{(\beta_1^2+k^2)^2-4k^2\alpha_1\beta_1}{\alpha_1(\beta_1^2-k^2)} \tag{2.5}$$

$$R_1^{(0)}=\Big[\frac{k(\beta_1^2+2\alpha_1\beta_1+k^2)}{\alpha_1(\beta_1^2-k^2)}+\frac{4k}{r_0(\beta_1^2-k^2)}\Big] \tag{2.6}$$

Нетрудно видеть, что в числителе (2.5) имеем уравнение для скорости поверхностной волны Релея.

В качестве искомой величины примем W_0, а U_0 определяется через W_0 посредством одного из соотношений (2.4). Исключая из (2.4) величину U_0 и обращая полученное выражение по k и p, для W с точностью до условия (2.3) получаем общее уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Big[(1+\eta_0R_1)\Big\{\Big[(1-C)^2\lambda_1^{(1)}+(1+C)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}-$$

$$-\frac{1}{n+1}(1-C)\lambda_1^{(1)}\Big]\lambda_2^{(n+m)}+2\frac{n+2}{n+1}C\lambda_1^{(1)}Q_m\lambda_2^{(n)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+$$

$$+C\Big(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)Q_n\lambda_2^{(m)}\Big[\Big(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)-\frac{1}{n+1}\lambda_1^{(1)}\Big]\Big\}+$$

$$+\frac{1}{n+1}M_1M_0^{-1}\Big(1+\frac{r_0}{2}R\Big)\Big[(1-C)\lambda_1^{(1)}\lambda_2^{(n+m)}+ \tag{2.7}$$

$$+C\lambda_1^{(1)}\Big(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)Q_n\lambda_2^{(m)}+2C\lambda_1^{(1)}Q_m\lambda_2^{(n)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big]-$$

$$-\frac{2(m+1)}{r_0}\eta_0(1+\eta_0 R_1)\frac{\partial}{\partial z}\Big\{2\Big(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)C(Q_m\lambda_2^{(n)}-Q_n\lambda_2^{(m)})-$$

$$-\frac{1}{n+1}\Big[2C\lambda_1^{(1)}Q_n\lambda_2^{(m)}+(1+C)\lambda_2^{(n+m)}+C\Big(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)Q_m\lambda_2^{(n)}\Big]-$$

$$-\frac{1}{m+1}\Big[2C\lambda_1^{(1)}Q_m\lambda_2^{(n)}-C\Big(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)Q_n\lambda_2^{(m)}+(1+C)\lambda_2^{(n+m)}\Big]+$$

$$+\frac{1}{(n+1)(m+1)}C\lambda_1^{(1)}(Q_m\lambda_2^{(n)}-Q_n\lambda_2^{(m)})\Big\}+$$

$$+2\Big(\frac{m+1}{n+1}\Big)\frac{\eta_0}{r_0}M_1M_0^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\Big(1+\frac{r_0}{2}R\Big)\Big[(1+C)\lambda_2^{(m)}(C\lambda_1^{(1)}Q_n+\lambda_2^{(n)})+$$

$$+C(1-C)\lambda_1^{(1)}Q_n\lambda_2^{(m)}+\frac{1}{n+1}C\lambda_1^{(1)}(Q_m\lambda_2^{(n)}-Q_n\lambda_2^{(m)})\Big]\Big]\times$$

$$\times(W)\frac{(r_0/2)^l}{(n!)^2m!\,(m+1)!}=\varphi(F_1)\qquad(l=2(n+m)+1)$$

$$\varphi(F_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\lambda_1^{(1)}\Big[(1-C)\lambda_2^{(n)}+2CQ_n\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big]+$$

$$+\frac{2(n+1)}{r_0}\eta_0\frac{\partial}{\partial z}\Big[(1+C)\lambda_2^{(n)}-C\Big(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)Q_n+$$

$$+\frac{1}{n+1}\lambda_1^{(1)}CQ_n\Big]\Big\}(F_1)\frac{(r_0/2)^{2n+1}}{n!\,(n+1)!}$$

Операторы R и R_1 определяют закон влияния окружающей среды на продольное колебание стержня при наличии трения по границе контакта $r=r_0$. В общем случае операторы R и R_1 сложны и, например, оператор R имеет вид

$$R(W)=b_1^2\Big(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)^2T(t,z,a_1)+4b_1^2\lambda_1^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}T(t,z,b_1)$$

$$T(t,z,\gamma)=\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^{(\gamma\xi)}(t-\xi)^2W(z-\eta;t-\xi)\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{\gamma^2\xi^2-\eta^2}}$$

при этом среда предполагалась упругой.

Однако для волновых быстропротекающих процессов операторы R и R_1 приближенно равны

$$R(\zeta)=(\rho_1N_1)^{1/2}M_1^{-1}(\partial\zeta/\partial t)\tag{2.8}$$

$$R_1(\zeta)=M_1M_0^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\Big\{[(\rho_1^{-1}N_1)^{1/2}+2(\rho_1^{-1}M_1)^{1/2}]\int_0^t\zeta(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{4}{\rho_1r_0}M_1\int_0^t(t-\xi)\zeta(\xi)d\xi\Big\}$$

Уравнение (2.7) содержит производные бесконечно высокого порядка по производным и непригодно для решения частных задач. Для решения частных задач из общего уравнения (2.7) можно получить приближенные уравнения типа классического или более высокого порядка по производным. Например, полагая в (2.7) $n=m=0$ или ограничиваясь в нем производными не выше второго порядка, получим с учетом (2.8) уравнение (для упругих стержня и среды):

$$\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}-\frac{2\eta_0}{r_0}D_0\frac{a_0^2-2b_0^2}{b_0^2}\times$$
$$\times\left[\left(2+\frac{\mu_1}{\mu_0}\right)\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{r_0}{2}\frac{\mu_1 a_1}{\mu_0 b_1^2}\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right]=\varphi(F_1) \tag{2.9}$$

$$c_1^2=c_0^2\left[1+\frac{\mu_1}{\mu_0}a_0^2(3a_0^2-4b_0^2)^{-1}\right]\left[1+\frac{\mu_1}{\mu_0}b_0^2(3a_0^2-4b_0^2)^{-1}\right]$$
$$c_0^2=b_0^2(3a_0^2-4b_0^2)(a_0^2-b_0^2)^{-1} \tag{2.10}$$
$$D_0=\left[\frac{3a_0^2-4b_0^2}{b_0^2}\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_0}\frac{a_0^2}{3a_0^2-4b_0^2}\right)\right]^{-1}$$

Если в уравнении (2.9) положить коэффициент трения $\eta_0=0$, то для случая гладкого идеального контакта величина c_1 является скоростью одномерной волны сжатия в стержне, которая зависит от параметра стержня и среды. Если среда отсутствует, то скорость c_1 равна скорости c_0 распространения упругих волн в стержне в классической постановке.

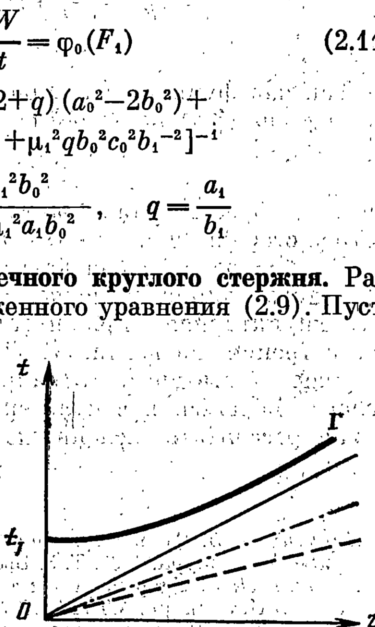
При $\eta_0\neq 0$ скорость волны сжатия в стержне будет зависеть также и от коэффициента трения η_0, так как в уравнении (2.9) имеется вторая смешанная производная от W по z и t. Как видно из уравнения (2.9), окружающая среда при учете трения ведет себя не как винклеровская, а как среда типа модели Фойгта.

Из общего уравнения (2.7) можно получать и другие приближенные уравнения, ограничиваясь производными более высокого порядка, которые будут учитывать влияние инерции деформирования поперечного сечения стержня и другие более тонкие эффекты по сечению, обусловленные явлением дисперсии волн в стержне.

Аналогично выводятся уравнения продольных колебаний стержня в среде в случае жесткого контакта при $r=r_0$, т. е. при граничных условиях (1.9). Например, в случае (1.9) можно получить приближенное уравнение типа (2.9), которое имеет вид

$$\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\frac{1}{c_3^2}\frac{\partial W}{\partial t}=\varphi_0(F_1) \tag{2.11}$$
$$c_2^2=c_0^2[\mu_0^2(3a_0^2-4b_0^2)-\mu_1\mu_0(2+q)(a_0^2-2b_0^2)+$$
$$+\mu_1^2 b_0^2(2+q)^2][\mu_0^2(3a_0^2-4b_0^2)+\mu_1^2 q b_0^2 c_0^2 b_1^{-2}]^{-1}$$
$$c_3^2=\frac{r_0}{2}c_0^2\frac{\mu_1\mu_0(a_0^2-b_0^2)+\mu_1^2 b_0^2}{\mu_0^2 b_1(3a_0^2-4b_0^2)+\mu_1^2 a_1 b_0^2},\quad q=\frac{a_1}{b_1}$$

3. Удар по торцу упругого полубесконечного круглого стержня. Рассмотрим частную задачу на основе приближенного уравнения (2.9). Пусть по торцу $z=0$ полубесконечного стержня $z\geqslant 0$ в момент $t=0$ происходит удар интенсивности $f(t)$. Внешние усилия будем считать равными нулю, т. е. $F_1=0$. Граничное условие при $z=0$ принимает вид (начальные условия нулевые):



$$\frac{\partial W}{\partial z}=-\frac{1}{E_0}f(t),\quad E_0=\mu_0\frac{3\lambda_0+2\mu_0}{\lambda_0+\mu_0} \tag{3.1}$$

Предполагая коэффициент трения имеющим один знак, что справедливо по крайней мере в окрестности волны сжатия, применим к уравнению (2.9) преобразование Лапласа по t:

$$\frac{d^2W_0}{dz^2}+2(\alpha p+\beta)\frac{dW_0}{dz}-\frac{p^2}{c_1^2}W_0=0 \tag{3.2}$$

$$\alpha=D_0\frac{\eta_0}{2}\frac{a_0^2-2b_0^2}{b_0^2}\frac{\mu_1 a_1}{\mu_0 b_1^2},\quad \beta=D_0\frac{\eta_0}{2}\left(2+\frac{\mu_1}{\mu_0}\right)\frac{a_0^2-2b_0^2}{b_0^2}$$

Решение уравнения (3.2), затухающее на бесконечности, имеет вид

$$\begin{gathered} W_0=A\exp\{-[(\alpha p+\beta)+\gamma((p+p_0)^2+q_0^2)^{1/2}]z\} \\ A=f_0(p)E_0^{-1}\{(\alpha p+\beta)+\gamma[(p+p_0)^2+q_0^2]^{1/2}\} \\ \gamma=(\alpha^2+c_1^{-2}),\quad p_0=\alpha\beta\gamma^{-2},\quad q_0^2=\beta^2c_1^{-2}\gamma^{-2} \end{gathered} \tag{3.3}$$

Обращая полученное решение (3.3) по Лапласу, для напряжения σ_{zz} и скорости частиц v получаем формулы

$$\begin{gathered} \sigma_{zz}=-e^{-\beta z}\left\{\exp(-\gamma p_0 z)f(t-\gamma z-\alpha z)+\right. \\ \left.+\gamma q_0 z\int\limits_{\gamma z}^{(t-\alpha z)}f(t-\xi-\alpha z)e^{-p_0\xi}\frac{I_1(q_0\sqrt{\xi^2-\gamma^2z^2})}{\sqrt{\xi^2-\gamma^2z^2}}d\xi\right\} \\ v=e^{-\beta z}\left\{\exp(-\gamma p_0 z)F(t-\gamma z-\alpha z)+\right. \\ \left.+\gamma q_0 z\int\limits_{\gamma z}^{(t-\alpha z)}F(t-\xi-\alpha z)e^{-p_0\xi}\frac{I_1(q_0\sqrt{\xi^2-\gamma^2z^2})}{\sqrt{\xi^2-\gamma^2z^2}}d\xi\right\} \\ F(t)=\frac{c_1^2}{E_0}\left\{\alpha f(t)+\beta\int\limits_0^t f(\xi)d\xi-\gamma\left[\int\limits_0^t\frac{\partial}{\partial\xi}[e^{-p_0\xi}J_0(q_0\xi)]f(t-\xi)d\xi+\right.\right. \\ \left.\left.+(p_0^2+q_0^2)\int\limits_0^t f(t-\xi)\left[\int\limits_0^\xi e^{-p_0\eta}J_0(q_0\eta)d\eta\right]d\xi\right]\right\} \end{gathered} \tag{3.4}$$

Так как функция $f(t)$ при отрицательных значениях аргумента равна нулю, то из (3.4) получаем выражение

$$c=c_1[(1+\alpha^2c_1^2)^{1/2}+\alpha c_1]^{-1}$$

где c — скорость волны сжатия в стержне, которая зависит как от параметров стержня и среды, так и от коэффициента трения η_0.

На фигуре показана качественная картина напряжений в стержне. Штриховая линия разделяет область возмущения при отсутствии среды, штрихпунктирная — при идеальном контакте, сплошная прямая — при учете трения по контакту. Линия Г отделяет возмущенную область в стержне от статического напряженного состояния, которая находится из условия обращения в нуль скорости v, при этом $F(t_1)=0$. Вид линии Г можно рассчитать численно из условия $v=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никитин Л. В.* Распространение волн в упругом стержне при наличии сухого трения // Инж. журн. 1963. Т. 3. Вып. 1. С. 126–130.
2. *Никитин Л. В.* Удар жестким телом по упругому стержню с внешним сухим трением // Инж. журн. МТТ. 1967. № 2. С. 166–170.
3. *Филиппов А. Н.* Распространение продольных упругих волн в стержне, окруженном средой типа Винклера // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1983. № 1. С. 74–78.

4. *Филиппов А. Н.* Распространение волн в упругом стержне при наличии окружающей среды // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд-во АН АрмССР. 1984. С. 340—341.
5. *Филиппов И. Г., Егорычев О. А.* Волновые процессы в линейных вязкоупругих средах. М.: Машиностроение. 1983. 269 с.
6. *Филиппов И. Г.* Точные уравнения колебания вязкоупругих пластин и стержней // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд-во АН АрмССР. 1984. С. 307—311.

Москва

Поступила в редакцию
20.II.1986