МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1987

УДК 539.374

МЕТОД КВАЗИКОНСТАНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ НЕСТАРЕЮЩИХ МАТЕРИАЛОВ

МАЛЫЙ В. И., ТРУФАНОВ Н. А.

Применение принципа Вольтерра [1, 2] позволяет свести решение широкого круга краевых задач линейной вязкоупругости для нестареющих анизотропных материалов к чисто математической проблеме построения линейных операторов, являющихся некоторыми, чаще всего очень сложными, функциями нескольких независимых операторов, характеризующих вязкоупругие свойства материала.

Разработанные приближенные методы расшифровки функций от нескольких независимых операторов [2–4] обычно предполагают предварительную аппроксимацию вязкоупругих свойств анизотропного материала на основе одного оператора, замену ряда операторов константами, что вносит значительную погрешность в определяющие соотношения. Применяется также приближенное обращение преобразования Лапласа [5]. Следует отметить значительную трудоемкость вычислений даже при использовании этих приближений.

В данной работе обобщается на случай анизотропной вязкоупругости предложенный ранее для изотропных материалов метод квазиконстантных операторов [6]. Метод имеет простые условия применимости, которые могут быть проверены заранее, пригоден как для аналитического, так и для численного решения краевых задач анизотропной вязкоупругости. Приводятся неравенства для погрешности выполнения всех действий с квазиконстантными операторами, необходимых для построения решения краевых задач в квазиконстантном приближении.

1. Линейный интегральный оператор вида

$$\mathrm{M}\varphi(t)=\int\limits_0^t M(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau,\quad \varphi'(t)=d\varphi(t)/dt \tag{1.1}$$

характеризующийся откликом $M(t)=\mathrm{M}\theta(t)$ на единичную ступенчатую функцию Хевисайда $\theta(t)$, называется квазиконстантным [6] с показателем квазиконстантности μ, если выполняется условие

$$|tM'(t)/M(t)|\leqslant\mu\ll 1\qquad (t>0) \tag{1.2}$$

Показатель квазиконстантности μ легко определяется, если известно ядро $M(t)$ оператора М. Вязкоупругие операторы довольно многих практически интересных видов материалов можно с большой степенью точности считать квазиконстантными [6] [1].

Введение понятия квазиконстантности позволяет получить простые приближенные соотношения для перемножения, обращения и аналитических функций квазиконстантных операторов и даже объектов более сложной структуры, возникающих, например, при построении решений вязкоупругой задачи в случае, когда воздействия изменяются непропорционально одному параметру. Погрешность таких соотношений оценивается как величина второго порядка малости по показателям квазиконстантности вязкоупругих операторов [6]. Более того, можно оценить не только порядок, но и саму величину погрешности указанных операций с квазиконстантными операторами [7].

[1] См. также: *Труфанов Н. А.* Исследование вязкоупругого поведения конструкций из композиционных материалов: Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. М.: Моск. ин-т электрон. машиностроения. 1982. 14 с.

Рассмотрим произведение квазиконстантных операторов **M** и **N**, характеризуемых откликами $M(t)$ и $N(t)$ и показателями квазиконстантности μ и ν. Отклик произведения **MN** таких операторов равен [6]:

$$\mathbf{MN}\theta(t)=M(t)N(t)(1+\Delta(t))=(1+\Delta(t))(\mathbf{MN})_k\theta(t) \tag{1.3}$$

где $\Delta(t)$ — относительная погрешность, величина которой оценивается соотношением

$$|\Delta(t)|=\left|\frac{\mathbf{MN}\theta(t)}{M(t)N(t)}-1\right|\leqslant\nu\int\limits_0^1(1-y)^{-1-\nu}(y^{-\mu}-1)\,dy \tag{1.4}$$

Поскольку μ и ν малы, подынтегральное выражение обладает интегрируемыми особенностями при $y\to0$ и $y\to1$, но если попытаться разбить этот интеграл на разность двух интегралов типа бета-функции, то их подынтегральные выражения будут иметь неинтегрируемые особенности при $y\to1$. Поэтому при таком разбиении каждому из указанных расходящихся интегралов необходимо придавать значение канонической регуляризации [8]. В результате значение рассматриваемого интеграла определяется в явном виде ($\Gamma(x)$ — гамма-функция):

$$|\Delta(t)|\leqslant\nu\int\limits_0^1(1-y)^{-1-\nu}y^{-\mu}\,dy-\nu\int\limits_0^1(1-y)^{-1-\nu}\,dy=$$
$$=1-\Gamma(1-\mu)\Gamma(1-\nu)/\Gamma(1-\mu-\nu) \tag{1.5}$$

Точная оценка (1.5) погрешности определения отклика произведения квазиконстантных операторов в соотношении (1.3) при малых показателях μ и ν имеет асимптотику

$$|\Delta(t)|\leqslant\{\Gamma''(1)-[\Gamma'(1)]^2\}\mu\nu+o(\mu\nu)\approx\psi'(1)\mu\nu=\pi^2\mu\nu/6 \tag{1.6}$$

Здесь использованы известные свойства производных гамма-функции и ее логарифмической производной $\psi(x)$ [9].

Таким образом, погрешность определения отклика произведения квазиконстантных операторов, а тем самым и построения самого произведения **MN**, согласно выражению (1.3), оценивается величиной $\pi^2\mu\nu/6$ или более точно формулой (1.5). Оператор $(\mathbf{MN})_k$ является тоже квазиконстантным с показателем квазиконстантности $\mu+\nu$ [6].

Так как оператор $\mathbf{M}_k^{-1}$, обладающий откликом $\mathbf{M}_k^{-1}\theta(t)=[M(t)]^{-1}$, также квазиконстантен и характеризуется показателем квазиконстантности μ, то он близок к обратному $\mathbf{M}^{-1}$ с точностью $O(\mu^2)$ [6]. Согласно (1.3), (1.5) и (1.6), можно утверждать также, что близость $\mathbf{M}_k^{-1}$ и $\mathbf{M}^{-1}$ такова, что

$$\mathbf{M}_k^{-1}\mathbf{M}\theta(t)=\theta(t)[1+\Delta(t)]$$
$$|\Delta(t)|\leqslant1-[\Gamma(1-\mu)]^2/\Gamma(1-2\mu)=\pi^2\mu^2/6+o(\mu^2)$$

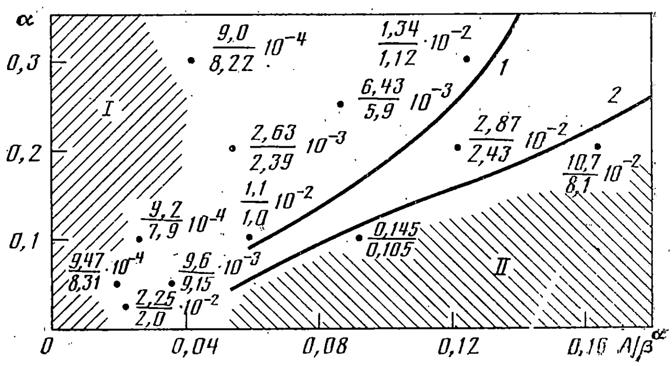
Тем не менее оценить аналогичную относительную погрешность $\Delta_1(t)$ определения отклика обратного оператора по формуле квазиконстантного обращения [6]:

$$\mathbf{M}^{-1}\theta(t)=[1+\Delta_1(t)]\mathbf{M}_k^{-1}\theta(t)=[1+\Delta_1(t)]/M(t) \tag{1.7}$$

в явном виде не удается. Однако выполненный численный анализ оценок погрешностей квазиконстантного обращения для случая ядер, при которых точное обращение выполняется аналитически или представлено в виде таблиц, показал, что в этих случаях и для квазиконстантного обращения (1.7) выполняется оценка

$$|\Delta_1(t)|\leqslant1-[\Gamma(1-\mu)]^2/\Gamma(1-2\mu)=\pi^2\mu^2/6+o(\mu^2) \tag{1.8}$$

В частности, для проверки правильности предположения (1.8) была исследована погрешность квазиконстантного обращения довольно широ-



кого класса интегральных операторов $\mathbf{M}$, построенных на основе ядра Ржаницына, для которых

$$\mathbf{M}\theta(t)=M(t)=M_0\left(1-\int_0^t T(\tau)\,d\tau\right),\qquad T(t)=Ae^{-\beta t}t^{\alpha-1}$$

Анализ точности обращения с использованием такого ядра интересен, с одной стороны, тем, что оно хорошо, по крайней мере качественно, описывает релаксационные процессы, с другой — наличием таблиц [10] функций $T(t)$, интеграла от них и резольвенты $K(t)$ ядра $T(t)$. Используя аналитические представления для ядер $T(t)$ и $K(t)$ [10], можно показать, что величина погрешности Δ_1, определяемая соотношениями

$$\Delta_1=\max_t|\Delta_1(t)| \tag{1.9}$$

$$\Delta_1(t)=M(t)\mathbf{M}^{-1}\theta(t)-1=\left(1-\int_0^t T(\tau)\,d\tau\right)\left(1+\int_0^t K(\tau)\,d\tau\right)-1$$

и ее оценка (1.8) являются функциями только параметров α и A/β^α.

Полученные результаты представлены на фигуре. Для значений α и A/β^α, отмеченных точками, в числителе приводится оценка (1.8), в знаменателе — погрешность Δ_1. определенная по таблицам. Кривые *1* и *2* соответствуют параметрам ядра, при которых показатель квазиконстантности равен 0,1 и 0,2 соответственно. В заштрихованной области I параметров α и A/β^α квазиконстантное обращение по формуле (1.7) обеспечивает точность в пределах точности самих таблиц [10]. В остальной области значение оценки погрешности по (1.8) всегда превышает точное значение погрешности, определенное по (1.9), т. е. величина (1.8) действительно является оценкой сверху погрешности Δ_1 квазиконстантного обращения. Заштрихованная область II соответствует большим значениям параметра A/β^α. В известной литературе по аппроксимации вязкоупругих свойств материалов в линейной области ядрами Ржаницына — Колтунова таких совокупностей параметров не встречается. Таким образом, погрешность определения отклика оператора, обратного к квазиконстантному оператору $\mathbf{M}$, а тем самым и построения самого обратного оператора $\mathbf{M}^{-1}$ по выражению (1.7) оценивается величиной (1.8).

Построение решений краевых задач вязкоупругости в довольно общем случае [6] сводится к интегрированию с весом вдоль некоторого замкнутого контура Γ комплексных квазиконстантных операторов вида $(z-\mathbf{M})^{-1}$, где $z=x+iy\in\Gamma$. Поэтому представляет интерес и оценка погрешностей построения комплексных операторов $(z-\mathbf{M})^{-1}$ по методу квазиконстантных операторов. С помощью очевидного соотношения $(z-\mathbf{M})^{-1}=(z-\mathbf{M})^{-1}(\bar{z}-\mathbf{M})(\bar{z}-\mathbf{M})^{-1}=\mathbf{H}^{-1}(\bar{z}-\mathbf{M})$, $\mathbf{H}=|z|^2-2x\mathbf{M}+\mathbf{M}\mathbf{M}$, где $\mathbf{H}$ — новый оператор вида (1.1) с ядром $H(t)=\mathbf{H}\theta(t)=|z|^2-2xM(t)+M_2(t)$, $M_2(t)=\mathbf{M}\mathbf{M}\theta(t)$, построение $(z-\mathbf{M})^{-1}$ для квазиконстантного оператора $\mathbf{M}$ сводится к трем операциям, погрешность которых может быть оценена.

Во-первых, отклик оператора $\mathbf{H}$ равен $H(t)\approx|z|^2-2xM(t)+M^2(t)$ с погрешностью $\Delta(t)M^2(t)$, которая оценивается с помощью выражений (1.5) или (1.6) при $\nu=\mu$. Построенный таким образом оператор $\mathbf{H}$ имеет показатель квазиконстантности η, оцениваемый величиной

$$\eta=\max_t |tH'(t)/H(t)| \leqslant 2\mu M_+/M_-=\eta^* \tag{1.10}$$

$$M_+ \geqslant |xM(t)-M^2(t)|,\ M_- \leqslant ||z|^2-2xM(t)+M^2(t)| \tag{1.11}$$

где константы M_+ и M_- могут быть определены для каждого конкретного ядра $H(t)$. Например, если выбрать контур Γ в виде окружности, $x=R\cos\varphi$, $\varphi\in[0,\ 2\pi]$ и учесть, что $M(t)$ не обращается в нуль при $t>0$, т. е. знакопостоянна [6], то

$$|xM(t)-M^2(t)|=|R\cos\varphi-M(t)||M(t)| \leqslant (R+|M(t)|)|M(t)|$$

$$|R^2-2R\cos\varphi M(t)+M^2(t)| \geqslant (R-|M(t)|)^2$$

$$M_+=\max_{t>0}\{|M(t)|[R+|M(t)|]\},\ M_-=\min_{t>0}\{(R-|M(t)|^2\}$$

При выборе контура Γ следует стремиться, по возможности, уменьшить величину η^*.

Во-вторых, отклик оператора $\mathbf{H}^{-1}$ равен $\mathbf{H}^{-1}\theta(t)\approx[H(t)]^{-1}=\mathbf{H}_k^{-1}\theta(t)$ с погрешностью $\Delta_1(t)/H(t)$, которая оценивается с помощью выражения (1.8) при $\mu=\eta^*$. Оператор $\mathbf{H}^{-1}$ также имеет показатель квазиконстантности η^*.

В-третьих, отклик произведения операторов $\mathbf{H}_k^{-1}$ и $\bar{z}-\mathbf{M}$ равен $\mathbf{H}_k^{-1}(\bar{z}-\mathbf{M})\theta(t)\approx[z-M(t)]^{-1}$ с погрешностью $\Delta(t)M(t)/H(t)$, которая оценивается с помощью (1.5) или (1.6) при $\nu=\eta^*$.

Таким образом можно контролировать погрешность всех операций, необходимых при построении операторов $(z-\mathbf{M})^{-1}$ по методу квазиконстантных операторов.

2. Использование свойств квазиконстантных операторов позволяет достаточно просто построить приближенное решение краевой задачи вязкоупругости анизотропного тела для ряда практически важных случаев. Вязкоупругие свойства нестареющих анизотропных материалов будем описывать интегральными операторами

$$\mathbf{R}_{ijkl}\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t} R_{ijkl}(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau \tag{2.1}$$

ядра которых являются функциями релаксации $R_{ijkl}(t)$. Известно [1], что в общем случае анизотропии имеется 21 независимый оператор (2.1). Однако на практике чаще всего приходится иметь дело с частными типами анизотропии: трансверсально-изотропным телом (пять независимых операторов) и ортотропным телом (девять независимых операторов). Их число сокращается при рассмотрении двумерных и одномерных задач, а также в тех случаях, когда удается описать две или несколько функций релаксации на базе одной функции времени. В дальнейшем рассматриваются краевые задачи для анизотропных материалов, вязкоупругие свойства которых можно описать несколькими операторами вида (2.1), характеризуемыми величинами показателей квазиконстантности

$$\alpha_{ijkl} \geqslant |tR_{ijkl}(t)/R_{ijkl}(t)| \qquad (t>0) \tag{2.2}$$

Уравнения и граничные условия основных квазистатических краевых задач теории вязкоупругости анизотропных тел имеют вид

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{r},\ t)+f_i(\mathbf{r},\ t)=0 \tag{2.3}$$

$$2\varepsilon_{ij}(\mathbf{r},\ t)=u_{i,j}(\mathbf{r},\ t)+u_{j,i}(\mathbf{r},\ t) \tag{2.4}$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},\ t)=\mathbf{R}_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{r},\ t) \qquad (\mathbf{r}\in V) \tag{2.5}$$

$$u_i(\mathbf{r},\ t)=U_i(\mathbf{r},\ t) \qquad (\mathbf{r}\in S_u) \tag{2.6}$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},\ t)n_j(\mathbf{r})=F_i(\mathbf{r},\ t) \qquad (\mathbf{r}\in S_\sigma) \tag{2.7}$$

где V — занятая телом область пространства, в которой действуют объемные силы f_i; σ_{ij}, ε_{ij} — тензоры напряжений и деформаций; u_i — компоненты вектора перемещений; n_i — компоненты вектора внешней нормали к поверхности тела S; S_u и S_σ — части поверхности $S=S_u \cup S_\sigma$, на которых заданы поверхностные перемещения U_i и усилия F_i соответственно.

Упругая задача, соответствующая вязкоупругой задаче (2.3)—(2.7), получается при замене вязкоупругого закона (2.5) законом Гука

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},\ t)=R_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{r},\ t) \tag{2.8}$$

Пусть в результате решения упругой краевой задачи (2.3), (2.4), (2.6)—(2.8) получены функции

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}(\mathbf{r},\ t)=\sigma_{ij}^*(\mathbf{r},\ R_{1111},\ldots,R_{3131},\ t)\\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{r},\ t)=\varepsilon_{ij}^*(\mathbf{r},\ R_{1111},\ldots,R_{3131},\ t),\\ u_i(\mathbf{r},\ t)=u_i^*(\mathbf{r},\ R_{1111},\ldots,R_{3131},\ t)\end{gathered} \tag{2.9}$$

и все ядра $R_{ijkl}(t)$ операторов $\mathbf{R}_{ijkl}$ (а значит, и все модули R_{ijkl}) выражаются через N независимых функций $R_1(t),\ R_2(t),\ldots,R_N(t)$ $(N\leqslant 21)$. Тогда все соотношения (2.9) будут иметь вид

$$g(\mathbf{r},\ t)=g^*(\mathbf{r},\ R_1,\ R_2,\ldots,R_N,\ t) \tag{2.10}$$

где под $g(\mathbf{r},\ t)$ понимается любая компонента тензоров σ_{ij}, ε_{ij} и вектора u_i.

Известно, что в случае изотропного тела решения (2.10) являются аналитическими функциями упругих констант [11] в областях, соответствующих физически реальным значениям коэффициента Пуассона и модуля Юнга. В анизотропной теории упругости зависимость решения от упругих характеристик значительно сложнее и практически не исследована. В данной работе аналитичность выражений (2.10) по каждой из упругих констант постулируется. Это позволяет осуществить аналитическое продолжение функции g с отрезков действительной оси в комплексное пространство $C^N=C\times C\times\ldots\times C$ (число сомножителей равно N). Тогда возможны представления аналитической функции g в виде кратных интегралов Коши [12]:

$$g(\mathbf{r},t)=\frac{1}{(2\pi i)^N}\oint\limits_{\Gamma}\ldots\oint\frac{g^*(\mathbf{r},z_1,z_2,\ldots,z_N,t)\,dz_1\,dz_2\ldots dz_N}{(z_1-R_1)(z_2-R_2)\ldots(z_N-R_N)} \tag{2.11}$$

Здесь $\Gamma=\{z:|z_k-a_k|=r_k,\ k=\overline{1,\ N}\}$ — остов поликруга, представляющий собой произведение N окружностей $\gamma_k=\{|z_k-a_k|=r_k\}$ радиусов r_k с центрами a_k. Контуры γ_k выбираются таким образом, чтобы они располагались в областях аналитичности функций g по соответствующему переменному и охватывали точки $z_1=R_1,\ldots,z_N=R_N$. Функции параметров z_i $(i=\overline{1,\ N})$ в (2.11) являются аналитическими продолжениями по z_i упругих решений (2.10) и поэтому они удовлетворяют при всех z_i соотношениям (2.3), (2.4), (2.6)—(2.8), в которых R_i заменены на z_i (R_i входят в соотношения (2.8) через R_{ijkl}).

3. Представление упругих решений в виде интегралов Коши (2.11) дает возможность следующим образом реализовать принцип Вольтерра при построении решения вязкоупругой задачи (2.3)—(2.7):

$$g(\mathbf{r},t)=\frac{1}{(2\pi i)^N}\oint\limits_{\Gamma}\ldots\oint\frac{dz_1\ldots dz_N}{(z_1-\mathbf{R}_1)\ldots(z_N-\mathbf{R}_N)}\,g^*(\mathbf{r},z_1,\ldots,z_N,t) \tag{3.1}$$

Пусть ядра операторов $\mathbf{R}_i$, квазиконстантных с показателями α_i, и контуры γ_i, составляющие остов поликруга Γ, удовлетворяют условиям (1.11). Последовательно применяя к каждому из операторов вида $dz_i/(z_i-\mathbf{R}_i)$ правила квазиконстантного обращения, а затем перемножая полученные квазиконстантные операторы $(dz_i/(z_i-\mathbf{R}_i))_k$, с учетом погрешности выполняемых операций приводим соотношения (3.1) к виду

$$g(\mathbf{r},t)=\frac{1}{(2\pi i)^N}\oint_\Gamma\ldots\oint dz_1\ldots dz_N\int_0^t\frac{d\tau\frac{\partial}{\partial t}g^*(\mathbf{r},z_1,\ldots,z_N,t-\tau)}{[z_1-R_1(\tau)]\ldots[z_N-R_N(\tau)]}+$$

$$+\sum_{j\leqslant i}^{N}\Delta_{ij}(t)=g_k(\mathbf{r},t)+\sum_{j\leqslant i}^{N}\Delta_{ij}(t) \tag{3.2}$$

где для каждого из слагаемых погрешности $\Delta_{ij}(t)$ выполняется оценка $\Delta_{ij}(t)=O(\alpha_i\alpha_j)$; $g_k(\mathbf{r},\ t)$ — приближенное решение вязкоупругой задачи.

Меняя порядок интегрирования по времени и остову поликруга Γ и используя определение кратного интеграла Коши [12], получаем

$$g_k(\mathbf{r},t)=\int_0^t d\tau\frac{\partial}{\partial t}g^*[\mathbf{r},R_1(\tau),\ldots,R_N(\tau),t-\tau] \tag{3.3}$$

Таким образом, использование свойства квазиконстантности вязкоупругих операторов позволяет свести построение решения анизотропной вязкоупругой задачи к аналитическому или численному построению зависимости упругого решения от упругих характеристик.

Большое значение для практических приложений имеет частный случай соотношений (3.3), когда решения g^* соответствующих упругих задач являются квазиконстантными во времени, т. е.

$$\left|\frac{t}{g^*(\mathbf{r},z_1,\ldots,z_N,t)}\frac{\partial}{\partial t}g^*(\mathbf{r},z_1,\ldots,z_N,t)\right|\leqslant\alpha_g\ll 1 \tag{3.4}$$

Тогда, как и в [6], можно представить (3.3) в виде

$$g_k(\mathbf{r},t)=\frac{1}{(2\pi i)^N}\oint_\Gamma\ldots\oint dz_1\ldots dz_N\int_0^t\frac{d\tau\frac{\partial}{\partial t}g^*(\mathbf{r},z_1,\ldots,z_N,t-\tau)}{[z_1-R_1(\tau)]\ldots[z_N-R_N(\tau)]}\approx$$

$$\approx\frac{1}{(2\pi i)^N}\oint_\Gamma\ldots\oint\frac{g^*(\mathbf{r},z_1,\ldots,z_N,t)\,dz_1\ldots dz_N}{[z_1-R_1(t)]\ldots[z_N-R_N(t)]}=g^*[\mathbf{r},R_1(t),\ldots,R_N(t),t] \tag{3.5}$$

В частности, условия (3.4) тривиальным образом реализуются в условиях ползучести, когда на тело действуют постоянные нагрузки, или в условиях релаксации, когда на поверхности тела мгновенно возникают и далее фиксируются перемещения. По форме соотношения (3.5) совпадают с методом переменных модулей [13, 14]. Обсуждение этого результата имеется в [6].

4. В качестве примера использования теории квазиконстантных операторов в анизотропной вязкоупругости рассмотрим задачу о нагружении полой трансверсально-изотропной сферы внутренним давлением $p(t)$. Пусть физические свойства материала сферы характеризуются операторными модулями $\mathbf{E}_r$ и $\mathbf{E}_\theta$ для одноосного растяжения вдоль радиуса r сферы и в направлении θ, перпендикулярном радиусу, операторным коэффициентом Пуассона $\boldsymbol{\nu}_\theta$, а также постоянным коэффициентом Пуассона ν_r. Тогда соотношения (2.5) в сферической системе координат имеют вид [15]:

$$\sigma_r=\mathbf{A}_{11}\varepsilon_r+2\mathbf{A}_{12}\varepsilon_\theta,\quad \sigma_\varphi=\sigma_\theta=\mathbf{A}_{12}\varepsilon_r+\mathbf{A}_{22}\varepsilon_\theta$$

$$\mathbf{A}_{11}=\mathbf{E}_r(1-\boldsymbol{\nu}_\theta)/\mathbf{Q},\quad \mathbf{A}_{22}=\mathbf{E}_\theta/\mathbf{Q},\quad \mathbf{A}_{12}=\nu_r\mathbf{E}_\theta/\mathbf{Q}$$

$$\mathbf{Q}=1-\boldsymbol{\nu}_\theta-2\nu_r^2\mathbf{E}_\theta/\mathbf{E}_r$$

Решение соответствующей упругой задачи имеется в [15], применение принципа Вольтерра позволяет построить вязкоупругое решение. Напряжения на внутренней поверхности сферы имеют вид (c — отношение внутреннего радиуса к внешнему):

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{L_+ c^{2N} - L_-}{1-c^{2N}} p(t), \quad N = \left(\frac{1}{4} + 2\frac{E_\theta}{E_r}\frac{1-\nu_r}{1-\nu_\theta}\right)^{1/2}$$

$$L_+ = \frac{E_\theta (1+\nu_r)(N-{}^1/_2)}{2E_\theta \nu_r + E_r (1-\nu_\theta)(N-{}^1/_2)}, \qquad (4.1)$$

$$L_- = \frac{E_\theta (1-\nu_r)(N+{}^1/_2)}{2E_\theta \nu_r - E_r (1-\nu_\theta)(N+{}^1/_2)}$$

Выполняя расшифровку выражения для σ_θ по правилам теории квазиконстантных операторов, получаем

$$\sigma_\theta(t) = \int_0^t \sigma_\theta^*(\tau)\frac{d}{dt} p(t-\tau)\, d\tau,$$

$$\sigma_\theta^*(t) = \frac{L_+(t) c^{2N(t)} - L_-(t)}{1-c^{2N(t)}}(1+\Delta(t))$$

$$\Delta(t) = O(\alpha_\theta^2) + O(\alpha_r^2) + O(\beta_\theta^2) + O(\alpha_\theta\alpha_r) + O(\alpha_r\beta_\theta) + O(\alpha_\theta\beta_\theta)$$

а $L_+(t)$, $L_-(t)$, $N(t)$ получаются заменой в (4.1) операторов E_θ, E_r, ν_θ с показателями квазиконстантности α_θ, α_r, β_θ на их ядра.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука. 1970. 280 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука. 1977. 383 с.
3. *Брызгалин Г. И.* К расчету на ползучесть пластинок из стеклопластика // ПМТФ. 1963. № 4. С. 132—136.
4. *Коминар В. А., Малинин Н. И.* Об устойчивости прямоугольной пластинки из ортотропного стеклопластика с учетом ползучести // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1968. № 1. С. 69—74.
5. *Афанасенко Н. Н., Екельчик В. С., Ривкинд В. Я., Рябов В. М.* Изгиб коротких балок из наследственно-упругого армированного пластика // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 1. С. 118—126.
6. *Малый В. И.* Квазиконстантные операторы в теории вязкоупругости нестареющих материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 1. С. 77—86.
7. *Малый В. И.* Оценки погрешности основных операций в методе квазиконстантных операторов // Школа-семинар «Теория упругости и вязкоупругости»: Тез. докл. Ереван: Изд-во АН АрмССР. 1982. 37 с.
8. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз. 1959. 470 с.
9. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука. 1964. 344 с.
10. *Колтунов М. А.* Ползучесть и релаксация. М.: Высш. шк. 1976. 277 с.
11. *Михлин С. Г.* Спектр пучка операторов теории упругости // Успехи мат. наук (УМН). 1973. Т. 28. Вып. 3. С. 43—82.
12. *Шабат Б. Е.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука. 1969. 576 с.
13. *Schapery R. A.* A method of viscoelastic stress analysis using elastic solutions // J. Franklin Inst. 1965. V. 279. No. 4. P. 268—289.
14. *Коваленко А. Д., Кильчинский А. А.* О методе переменных модулей в задачах линейной наследственной упругости // Прикл. механика. 1970. Т. 6. Вып. 12. С. 27—34.
15. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука. 1977. 415 с.

Москва, Пермь

Поступила в редакцию 9.I.1986