

УДК 539.374

МЕХАНИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МНОГОЦЕНТРОВОГО ОТВЕРЖДЕНИЯ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ

МЕТЛОВ В. В., ТУРУСОВ Р. А.

Целью настоящей работы является исследование механических явлений при многоцентровом отверждении вязкой среды. Такой процесс происходит, например, при изотермическом макроскопически однородном по объему олигомера отверждении, которое при более детальном рассмотрении носит фронтальный характер за счет термофлуктуационного образования центров роста твердого вещества [1]. Зернистая структура поликристаллических тел свидетельствует о том, что аналогичный многоцентровый процесс происходит при затвердевании расплавов металлов и сплавов, кристаллических полимеров и т. п. Теоретическое и практическое значение рассматриваемой проблемы обусловлено тем, что именно в процессе многоцентрового отверждения формируется обладающая внутренними остаточными напряжениями зернистая, пористая, трещиноватая структура твердого материала, которая определяет его физико-механические свойства.

1. Воспользуемся развитым в [2] континуальным подходом в механике фронтального отверждения, согласно которому сингулярная поверхность фронта отверждения является пределом размытого фронта усадки при устремлении его ширины к нулю. Размытый фронт есть непрерывно движущийся по заданному закону слой, внутри которого параметр отверждения η монотонно изменяется от 2 до 1 по нормали к фронту в направлении его движения. Выпишем основные предельные соотношения внутри фронта [2]. Уравнение связи имеет вид

$$\sigma'(\eta) = A(\eta)(\varepsilon'(\eta) - e(\eta)) \quad (1.1)$$

где σ' , ε' , e — скорости тензоров напряжения, деформации и свободной усадки относительно изменения η , $A(\eta)$ — тензор упругомгновенных модулей в состоянии η .

Условия равенства нулю скорости вектора напряжения и скоростей деформаций в касательной плоскости к поверхности фронта $S^*(t)$ есть

$$\sigma'(\eta)n = 0, \quad \varepsilon'(\eta) = \frac{1}{2}(b'(\eta) \otimes n + n \otimes b'(\eta)) \quad (1.2)$$

где n — единичный вектор нормали к S^* , а компоненты вектора b' равны скоростям отличных от нуля удлинения и сдвигов внутри фронта в элементе, находящемся в состоянии η .

Исключая ε' и σ' из (1.1), (1.2), приходим к линейному уравнению для определения вектора b' :

$$\{A(\frac{1}{2}(b' \otimes n + n \otimes b') - e)\}n = 0 \quad (1.3)$$

Определив отсюда $b'(\eta)$ и подставив значение b' в (1.1), (1.2), найдем величины $\sigma'(\eta)$ и $\varepsilon'(\eta)$, интегрируя которые по η от 1 до 2, найдем полные изменения тензоров напряжения и деформации в элементе при прохождении через него фронта отверждения.

В силу геометрического смысла вектора $b'(\eta)$ изменение материальной скорости при переходе через фронт будет

$$[v]_2^1 = b s_n, \quad b = \int_1^2 b'(\eta) d\eta \quad (1.4)$$

где s_n — скорость движения S^* по нормали.

Для изотропной усадки $\mathbf{e}(\eta) = e(\eta)\mathbf{I}$ (\mathbf{I} — единичный тензор, $e(\eta)$ — линейная свободная усадка) в изотропном материале с модулем $E(\eta)$ и коэффициентом Пуассона $\nu(\eta)$ из (1.3) будем иметь

$$\mathbf{b} = \theta \mathbf{n}, \quad \theta = \int_1^2 e(\eta) \frac{1 + \nu(\eta)}{1 - \nu(\eta)} d\eta \quad (1.5)$$

где θ — объемная усадка фронта. Из последнего соотношения вытекает отсутствие сдвиговых деформаций фронта и разрыва касательной компоненты скорости.

При рассмотрении многоцентрового отверждения ограничимся изотропным случаем (1.5). Введем скорость w движения фронта относительно материальных точек на S^* в твердой области Ω_2 :

$$w = s_n - v_n^{*(2)} \quad (1.6)$$

где звездочкой помечается граничное значение функции на S^* . Произведение w на плотность $\rho^{*(2)}$ дает величину прироста массы в Ω_2 за единицу времени через единицу площади S^* . Поэтому величина w характеризует собственно наращивание зоны Ω_2 и будет именоваться скоростью роста. Подставляя в условие (1.4) соотношения (1.5) и (1.6) и пренебрегая величиной θ по сравнению с единицей, получим

$$\mathbf{v}^{*(1)} = \mathbf{v}^{*(2)} + \theta \mathbf{n} w \quad (1.7)$$

При отсутствии усадки фронта ($\theta = 0$) соотношение (1.7) переходит в условие прилипания, которому соответствуют обычные силы вязкого сопротивления, действующие на твердые тела при их движении в вязкой среде. Наличие усадки фронта θ приводит к скачку скорости на поверхности S^* , а следовательно, к появлению дополнительных сил, действующих со стороны вязкой среды на зародыши твердой фазы. Эти силы (именуемые далее силами взаимодействия) в отсутствие прочих воздействий могут быть первопричиной движения зародышей твердого вещества.

Усадка фронта приводит к дополнительному притоку жидкости к S^* по нормали при $\theta < 0$ и оттоку от S^* при $\theta > 0$. Пусть для определенности $\theta < 0$. Тогда за счет притока жидкости к поверхности центров роста твердого тела области жидкости между центрами становятся более разреженными и давление в этих областях падает, что приводит к движению зародышей в направлении этих областей, т. е. зародыши как бы притягиваются друг к другу.

Пусть жидкая среда несжимаемая и линейно-вязкая. Квазистатическое течение такой среды подчиняется следующим уравнениям в декартовой системе координат (x_h) [3]:

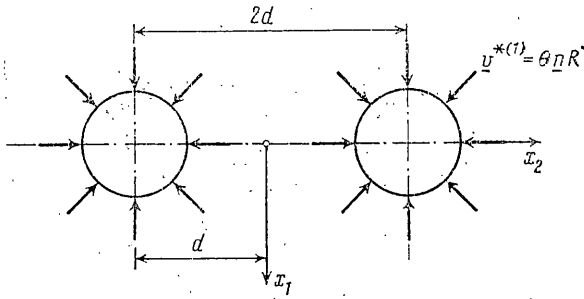
$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.8)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжения, p — давление, v_i — компоненты материальной скорости, μ — коэффициент вязкости; по повторяющемуся индексу производится суммирование от 1 до 3.

В силу линейности уравнения (1.6) течение среды, соответствующее граничному условию (1.7), будет суперпозицией течений, соответствующих условию прилипания ($\mathbf{v}^{*(1)} = \mathbf{v}^{*(2)}$) и условию стока $\mathbf{v}^{*(1)} = \theta \mathbf{n} w$. Соответственно этому и силы, действующие со стороны вязкой среды на центры роста твердой фазы, равны сумме сил вязкого сопротивления и сил взаимодействия. Для вычисления сил взаимодействия необходимо найти решение уравнений (1.8) в Ω_1 при граничном условии

$$\mathbf{v}^{*(1)} = \theta \mathbf{n} w \quad (1.9)$$

Таким образом, независимо от свойств материала в твердом состоянии определение сил взаимодействия в зависимости от конфигурации системы является отдельной задачей и необходимым этапом нахождения движения системы растущих зародышей твердого материала.



Задача (1.8), (1.9) эквивалентна задаче теории упругости для несжимаемой среды, если положить μ равным модулю сдвига, а v_i трактовать как компоненты перемещения. Рассмотрим плоскую задачу об определении сил взаимодействия, т. е. положим, что центры отверждения представляют собой цилиндрические тела с бесконечными образующими, параллельными оси x_3 , причем $v_3=0$, а v_1, v_2 зависят лишь от x_1, x_2 . При этом силы рассчитываются на единицу длины цилиндров.

Используя отмеченную вязкоупругую аналогию и известные результаты двумерной теории упругости [4], заключаем, что в плоской задаче о взаимодействии растущих тел необходимо задать напряженное состояние и величину $\omega_\infty = (\partial v_1/\partial x_2 - \partial v_2/\partial x_1)|_\infty$ вихря на бесконечности, а также главный вектор сил f , действующих на совокупный контур твердых тел. Для выяснения физического смысла последнего ограничения рассмотрим представление комплексного вектора скорости в окрестности бесконечно удаленной точки [4]:

$$2\mu(v_1 + iv_2) = -\frac{f_1 + if_2}{4\pi} \ln(zz^*) + \mu\omega_\infty z + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)e^{2i\varphi}z + \dots \quad (1.10)$$

где i — мнимая единица, $z = x_1 + ix_2$, $z^* = x_1 - ix_2$; σ_1, σ_2 — главные напряжения, а φ — угол наклона первого главного направления к оси x_1 на бесконечности; многочлен означает ограниченные величины при $z \rightarrow \infty$. Из естественного требования об ограниченности на бесконечности материальной скорости при отсутствии вихря и возмущений гидростатического напряженного состояния заключаем, что при формулировании краевой задачи следует положить $f=0$.

2. Рассмотрим плоскую задачу о взаимодействии двух одинаковых круглых цилиндров радиуса R , растущих со скоростью $w = dR/dt = R^*$. Расстояние между центрами цилиндров равно $2d$ (фигура). На бесконечности — гидростатическое напряженное состояние, вихрь равен нулю, давление равно p_∞ . Введем систему ортогональных биполярных координат (α, β) : $z = ai \operatorname{cth}(\alpha + i\beta)$ [5]. Величины d и R по формулам $\operatorname{ch} \gamma = d/R$, $a = R \operatorname{sh} \gamma$ однозначно определяют параметры a и $\gamma \geq 0$, где $2a$ — расстояние между полюсами, $\alpha = \pm \gamma$ — уравнения контуров цилиндров. Функцию напряжений ищем в виде

$$g\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} g\Phi_n + g\Phi^*, \quad g\Phi_n = f_n(\alpha) \cos n\beta$$

$$f_n(\alpha) = A_n \operatorname{ch}(n+1)\alpha + B_n \operatorname{ch}(n-1)\alpha \quad (2.1)$$

$$g\Phi^* = F\beta \sin \beta, \quad g = |d\xi/dz| = (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)/a, \quad \xi = \alpha + i\beta$$

где A_n, B_n ($n \geq 1$) и F — неопределенные коэффициенты.

Решения $(\Phi_n)_{n \geq 1}$ образуют систему четных по α и β однозначных решений бигармонического уравнения [5], самоуравновешенных на контурах $\alpha = \operatorname{const}$, а решение Φ^* соответствует системе двух противоположно направленных сосредоточенных сил величины $f = -2\pi F$, приложенных в полюсах ($x_1 = 0, x_2 = \pm a$) к несжимаемой среде. При этом $F < 0$ соответствует притяжению цилиндров, а $F > 0$ — их отталкиванию.

Согласно [5], имеем

$$\begin{aligned} a\sigma_\alpha &= \left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right] (g\Phi) \\ a\sigma_\beta &= \left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right] (g\Phi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} a\tau_{\alpha\beta} &= -(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (g\Phi) \\ g\Psi &= \frac{1}{2} \iint \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right] (g\Phi) d\alpha d\beta \\ u &= -\frac{g}{2\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial \beta}, \quad v = \frac{g}{2\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где σ_α , σ_β , $\tau_{\alpha\beta}$ — физические компоненты тензора напряжения в системе координат (α, β) ; u , v — составляющие скорости вдоль направлений α и β .

Используя соотношения (2.2), заключаем, что решения $g\Phi_n$ в (2.1) дают на бесконечности ($\alpha = \beta = 0$) гидростатическое напряженное состояние с давлением $-(A_n + B_n)/a$, а решение $g\Phi^*$ дает нулевые напряжения на бесконечности. При помощи (2.3) можно убедиться также, что компоненты скорости (u , v), соответствующие решениям $g\Phi_n$ и $g\Phi^*$, ограничены на бесконечности. Отсюда и из (1.10) вытекает, что эти частные решения дают на бесконечности нулевой вихрь, а Φ_n самоуравновешено на любом контуре $\alpha = \text{const}$. Таким образом, условие на бесконечности будет (суммирование по n от 1 до ∞):

$$\Sigma(A_n + B_n) = -p_\infty/a \quad (2.4)$$

и решение (2.1) дает силу взаимодействия: $f = -2\pi F$.

Выражая компоненты скорости через введенные неопределенные коэффициенты при помощи (2.1) и (2.3), получим

$$\begin{aligned} 2\mu u (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) &= \Sigma'_{1/2} \cos(n\beta) [(n+2)C_{n+1} - 2nC_n \operatorname{ch} \alpha + \\ &+ (n-2)C_{n-1} + \delta_{n1} 2F\alpha \operatorname{ch} \alpha] + C_1 - F\alpha \\ 2\mu v (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) &= \Sigma'_{1/2} \sin(n\beta) [2D_n \operatorname{ch} \alpha - D_{n-1} - \\ &- D_{n+1} - 2C_n \operatorname{ch} \alpha - 2F(\operatorname{ch} \alpha - \alpha \operatorname{sh} \alpha)\delta_{n1} + F\delta_{n2}] \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$C_n(\alpha) = A_n \operatorname{sh}(n+1)\alpha + B_n \operatorname{sh}(n-1)\alpha \quad (n \geq 1), \quad C_0 = 0$$

$$\begin{aligned} D_n(\alpha) &= (n+1)A_n \operatorname{ch}(n+1)\alpha + (n-1)B_n \operatorname{ch}(n-1)\alpha \\ &(n \geq 1), \quad D_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5) в граничные условия

$$u|_{\alpha=\gamma} = \theta R^* = \omega, \quad v|_{\alpha=\gamma} = 0 \quad (2.7)$$

и приравнявая коэффициенты при $\cos n\beta$ и $\sin n\beta$ в левых и правых частях полученных равенств, будем иметь

$$\begin{aligned} (n+2)C_{n+1}^* - 2n \operatorname{ch} \gamma C_n^* + (n-2)C_{n-1}^* &= -(2F\gamma \operatorname{ch} \gamma + 4\mu\omega)\delta_{n1} = a_n \quad (n \geq 1), \\ C_1^* &= F\gamma + 2\mu\omega \operatorname{ch} \gamma \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} D_{n+1}^* - 2D_n^* \operatorname{ch} \gamma + D_{n-1}^* &= \delta_{n1} 2F(\gamma \operatorname{sh} \gamma - \operatorname{ch} \gamma) + \delta_{n2} F - 2C_n^* \operatorname{sh} \gamma = b_n \quad (n \geq 1), \\ C_n^* &= C_n(\gamma), \quad D_n^* = D_n(\gamma) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Разрешая (2.6) при $\alpha = \gamma$ относительно A_n , B_n для $n \geq 2$, получим

$$A_n = M_{11}^n C_n^* + M_{12}^n D_n^*, \quad B_n = M_{21}^n C_n^* + M_{22}^n D_n^*$$

$$M_{11}^n = (n-1) \operatorname{ch}(n-1)\gamma / \Delta_n, \quad M_{12}^n = -\operatorname{sh}(n-1)\gamma / \Delta_n \quad (2.10)$$

$$M_{21}^n = -(n+1) \operatorname{ch}(n+1)\gamma / \Delta_n, \quad M_{22}^n = \operatorname{sh}(n+1)\gamma / \Delta_n, \quad \Delta_n = n \operatorname{sh} 2\gamma - \operatorname{sh} 2n\gamma \quad (n \geq 2)$$

При $n=1$ из (2.6) имеем

$$A_1 = D_1^*/(2 \operatorname{ch} 2\gamma), \quad D_1^* = 2C_1^* \operatorname{ch} 2\gamma / \operatorname{sh} 2\gamma \quad (2.11)$$

В силу (2.5) и (2.6) компоненты скорости u , v не зависят от величины B_1 , которая является коэффициентом для частного решения $g\Phi_1 = \cos \beta$, соответствующего однородному гидростатическому напряженному состоянию. Поэтому коэффициент B_1 определяется из условия (2.4).

Соотношения (2.8), (2.9) и второе соотношение (2.11) образуют бесконечную систему уравнений относительно C_n^* , D_n^* ($n \geq 1$), а (2.10) и первое соотношение (2.11) выражают коэффициенты A_n ($n \geq 1$) и B_n ($n \geq 2$) через C_n^* , D_n^* ($n \geq 1$). Система (2.8), (2.9), (2.11) при любом заданном значении F по известной правой части (a_n, b_n) $_{n \geq 1}$ и значениям $C_0^* = D_0^* = 0$ и C_1^* , D_1^* рекуррентно разрешается относительно (C_n^* , D_n^*) $_{n \geq 2}$, что обеспечивает выполнение граничных условий (2.7). Необходимо еще обеспечить сходимость ряда (2.4). Искомое значение F и определяется из условия сходимости ряда (2.4).

Из (2.10) легко получить (полагаем $a_n \sim b_n$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = \operatorname{const} \neq 0$ ($b_n \neq 0$); и $a_n \sim (b_n + c_n)$, если $a_n = a_n' + a_n''$, $a_n' \sim b_n$, $a_n'' \sim c_n$):

$$(A_n + B_n) \sim n e^{-in} C_n^* + e^{-in} D_n^* \quad (2.12)$$

Можно показать, что ряд $\sum n e^{-in} C_n^*$ сходится при любых значениях C_0^* и C_1^* , т. е. при любом значении F . Напротив, ряд $\sum D_n^* e^{-in}$ сходится лишь при единственном значении D_1^* , именно

$$D_1^* = -b^*(\gamma), \quad b^*(\gamma) = \sum b_n e^{-in} \quad (2.13)$$

Поэтому с учетом знакопостоянства рядов C_n и D_n и (2.12) заключаем, что условие (2.13) необходимо и достаточно для сходимости ряда (2.4), т. е. для ограниченности давления на бесконечности.

Для левой части уравнения (2.13) по (2.8), (2.11) получим

$$D_1^* = 2(F\gamma + 2\mu\omega \operatorname{ch} \gamma) \operatorname{cth} 2\gamma \quad (2.14)$$

Для ряда в (2.13) из (2.9) будем иметь

$$b^*(\gamma) = 2F(\gamma \operatorname{sh} \gamma - \operatorname{ch} \gamma) e^{-\gamma} + F e^{-2\gamma} - 2 \operatorname{sh} \gamma C^*(\gamma), \quad C^*(\gamma) = \sum C_n^* e^{-in} \quad (2.15)$$

Используя формулу $C^*(\gamma) = [a^*(\gamma) + 2C_1^*] / (2 \operatorname{sh} \gamma)$ и (2.8), получим $C^*(\gamma) = F\gamma e^{-\gamma} + 2\mu\omega$. Подставляя это выражение в (2.15) будем иметь $b^*(\gamma) = -(F + 4\mu\omega \operatorname{sh} \gamma)$. Подставляя теперь это выражение для $b^*(\gamma)$ и (2.14) в (2.13), придем к уравнению относительно F , разрешив которое, получим $F = -2\mu\omega [\operatorname{sh} \gamma (2\gamma \operatorname{cth} 2\gamma - 1)]^{-1}$.

Таким образом, искомая сила взаимодействия двух растущих в вязкой среде твердых тел будет $f = -4\pi\mu\theta R' [\operatorname{sh} \gamma (2\gamma \operatorname{cth} 2\gamma - 1)]^{-1}$, $\operatorname{ch} \gamma = d/R$.

Выражение $[\operatorname{sh} \gamma (2\gamma \operatorname{cth} 2\gamma - 1)]^{-1}$, характеризующее зависимость силы от R/d , монотонно изменяется от 0 до $+\infty$, когда R/d растет от 0 до 1.

Таким образом, в случае $\theta < 0$ (усадка) при сближении встречных фронтов давление в разделяющем их жидком слое стремится к минус бесконечности. Это означает, что в рассматриваемом слое жидкой фазы неминуемо должно произойти нарушение сплошности, а возникший разрыв может быть зафиксирован в твердой среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Турусов Р. А., Розенберг Б. А., Ениколопан Н. С. О формировании напряжений и разрывов в процессе фронтального отверждения // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1981. Т. 260. № 1. С. 90-94.
2. Метлов В. В., Турусов Р. А. О формировании напряженного состояния вязкоупругих тел, растущих в условиях фронтального отверждения // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 145-160.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука. 1983. 528 с.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 707 с.
5. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат. 1950. 232 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.IX.1986