МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1987

УДК 539.376

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПУТЯХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ОБРАБОТКИ МАТЕРИАЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

ЦВЕЛОДУБ И. Ю.

Как известно [1], процесс ползучести сопровождается накоплением в материале поврежденности, что в конечном итоге может привести к его разрушению. В рамках феноменологического подхода этот факт учитывается введением в определяющие уравнения ползучести скалярного параметра поврежденности, изменяющегося от нуля в естественном недеформированном состоянии до единицы в момент разрушения. Этот параметр дает количественную оценку поврежденности материала и, следовательно, его остаточного прочностного ресурса. Возникает задача о нахождении оптимального пути деформирования, приводящего за заданное время к заданным остаточным деформациям при наименьшей поврежденности. Эта проблема становится актуальной в связи с развитием методов обработки материалов давлением в режиме ползучести [2].

В данной работе такие оптимальные пути найдены для достаточно широкого класса материалов, описываемых уравнениями [1], содержащими упомянутый параметр поврежденности. Рассмотрены некоторые приложения к задачам формоизменения пластин в условиях ползучести. При больших длительностях обработки, когда упругими деформациями можно пренебречь, в случае больших (много больше толщины пластины) и малых (меньше толщины) прогибов для последних получены простые зависимости, определяющие указанный оптимальный процесс, который может быть осуществлен практически. При умеренных временах учтены упругие деформации и связанный с ними эффект «распружинивания» [2] пластины после снятия внешних нагрузок.

1. Процесс одноосной ползучести разупрочняющегося материала вплоть до его разрушения вполне удовлетворительно описывается зависимостями вида [1]:

$$\eta=B_1\sigma^n(1-\Omega)^{-m},\quad \dot{\Omega}=B_2\sigma^p(1-\Omega)^{-q} \tag{1.1}$$

где $\sigma>0$ — напряжение, η — скорость деформации ползучести, Ω $(0\leqslant\Omega\leqslant1)$ — параметр поврежденности, B_1, B_2, n, m, p, q — положительные константы материала.

Обобщим соотношения (1.1) на случай сложного напряженного состояния аналогично [1]:

$$\eta_{kl}=B_1 s^n(1-\Omega)^{-m}\partial s/\partial\sigma_{kl}\quad (k,\ l=1,\ 2,\ 3)$$
$$\dot{\Omega}=B_2 s^p(1-\Omega)^{-q} \tag{1.2}$$

где $s=s(\sigma_{kl})$, $s>0$ — некоторый инвариант тензора напряжений, являющийся выпуклой однородной функцией первой степени относительно компонент напряжений σ_{kl} и совпадающий при одноосном растяжении с σ; точка означает дифференцирование по времени t. В качестве s могут быть выбраны интенсивность напряжений, удвоенное максимальное касательное напряжение и так далее.

Заметим, что при $p=n+1$, $q=m$ зависимости (1.2) соответствуют энергетическому варианту теории ползучести и длительной прочности [3], когда параметр Ω представляет собой отношение удельной рассеянной энергии к ее критическому значению A_*, которое является характеристикой материала; в этом случае $B_2=B_1/A_*$. При $p=n$, $q=m$ будем иметь деформационный критерий разрушения, когда параметр Ω пропорционален величине $\int H(\eta_{kl})dt$ (интегрирование от 0 до t), аналогичной параметру Одквиста [1] и совпадающей при одноосном растяжении с деформацией ползучести (инвариант $H=H(\eta_{kl})$ будет определен ниже).

Сформулируем задачу оптимального деформирования: каким образом следует деформировать элемент среды, напряженно-деформированное состояние которого можно считать однородным, в течение заданного времени t_*, чтобы в момент $t=t_*$ получить заданные значения деформаций ползучести $\overset{c}{\varepsilon}_{kl**}$ и параметр поврежденности Ω при этом был минимальным? Другими словами, среди всех возможных путей, приводящих за время t_* к заданным остаточным деформациям $\overset{c}{\varepsilon}_{kl**}$, необходимо выбрать такой, при котором накапливается наименьшая поврежденность Ω. Считаем, что $\Omega=0$ и $\varepsilon_{kl}{}^c=0$ $(k, l=1, 2, 3)$ при $t=0$.

Докажем следующее утверждение: если для констант n и p из (1.2) справедливо неравенство $p\geqslant n$, то оптимальным (в указанном смысле) является путь, для которого скорости деформаций ползучести постоянны при $0\leqslant t<t_*$, т. е. $\eta_{kl}=\overset{c}{\varepsilon}_{kl**}/t_*$.

Для доказательства обратим зависимости (1.2). Представим мощность удельной рассеянной при ползучести энергии $W=\eta_{kl}\sigma_{kl}$ в виде $W=Hs$, $H=H(\eta_{kl})$ — однородная функция первой степени относительно η_{kl}, которую будем считать выпуклой.

Например, если величина s в (1.2) совпадает с интенсивностью напряжений σ_i, то $H=\eta_i$, где η_i — интенсивность скоростей деформаций ползучести [4], причем функция $\eta_i=\eta_i(\eta_{kl})$ является выпуклой. Если в качестве s выбрать максимальное касательное напряжение, то H будет совпадать с максимальной главной скоростью сдвига. Более общая зависимость для s в случае изотропной несжимаемой среды имеет вид [4, 5]:

$$s=\sigma_i f(\xi),\quad f(\xi)=\exp\left(-\int_{-\pi/6}^{\xi}\operatorname{tg}\omega\, d\xi\right)$$

где ξ $(-\pi/6\leqslant\xi\leqslant\pi/6)$ — угол вида напряженного состояния, $\omega=\xi-\psi$ — фаза подобия девиаторов, ψ $(-\pi/6\leqslant\psi\leqslant\pi/6)$ — угол вида скоростей деформаций ползучести, при этом $\psi=\psi(\xi)$. Условие строгой выпуклости s эквивалентно неравенству [5]: $f+f''>0$ или $d\omega/d\xi<1$, т. е. $d\psi/d\xi>0$, что определяет однозначную функцию $\xi=\xi(\psi)$, а тем самым и $\omega=\omega(\psi)$. Поскольку $W=\eta_i\sigma_i\cos\omega$ [4] и $\xi(-\pi/6)=-\pi/6$ [6], то можно показать, что в этом случае

$$H=\eta_i f_1(\psi),\quad f_1(\psi)=\exp\left(\int_{-\pi/6}^{\psi}\operatorname{tg}\omega\, d\psi\right)$$

При этом условие выпуклости H аналогично приведенному выше для функции s, т. е. $f_1+f_1''>0$ или $d\xi/d\psi>0$, что будет выполнено, поскольку $d\psi/d\xi>0$.

Умножая первые соотношения (1.2) на σ_{kl}, суммируя по индексам k и l и учитывая однородность s, получим $W=B_1 s^{n+1}(1-\Omega)^{-m}$. Отсюда, сравнивая с выражением $W=Hs$, найдем

$$H=B_1 s^n(1-\Omega)^{-m},\quad \eta_{kl}=H\partial s/\partial\sigma_{kl}\quad (k, l=1, 2, 3)\tag{1.3}$$

Продифференцируем равенство $\sigma_{ij}\eta_{ij}=sH$ по η_{kl}:

$$\sigma_{kl}+\eta_{ij}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\eta_{kl}}=s\frac{\partial H}{\partial\eta_{kl}}+H\frac{\partial s}{\partial\eta_{kl}}=s\frac{\partial H}{\partial\eta_{kl}}+H\frac{\partial s}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\eta_{kl}}$$

Поскольку $H\partial s/\partial\sigma_{ij}=\eta_{ij}$, то получим

$$\sigma_{kl}=s\partial H/\partial\eta_{kl}\quad (k, l=1, 2, 3)\tag{1.4}$$

В случае несжимаемой среды σ_{kl} в (1.4) следует заменить на компоненты девиатора напряжений [1]. Из (1.3) найдем выражение для $s=B_1^{-1/n}H^{1/n}(1-\Omega)^{m/n}$, подставляя которое в (1.2), получим

$$\Omega^{\cdot}=\Phi(1-\Omega)^{\beta},\quad \Phi=B_0H^{\alpha},\quad B_0=B_2B_1^{-\alpha}\tag{1.5}$$

$$\alpha=p/n,\quad \beta=pm/n-q$$

Интегрируя (1.5) и учитывая, что $\Omega=0$ при $t=0$, будем иметь

$$(1-\Omega)^{1-\beta}=1-(1-\beta)\int_0^t \Phi\,dt \quad (\beta\neq 1) \tag{1.6}$$

$$\ln(1-\Omega)=-\int_0^t \Phi\,dt \quad (\beta=1)$$

Можно показать, что при $\alpha\geqslant 1$ функция $\Phi=\Phi(\eta_{kl})$ из (1.5) будет выпуклой. Все величины, относящиеся к деформированию, для которого $\eta_{kl}=\overset{c}{\varepsilon}_{kl**}/t_*$, будем обозначать индексом «нуль». Рассмотрим три случая.

1. $1-\beta>0$. Для любого пути, приводящего при $t=t_*$ к заданным деформациям $\overset{c}{\varepsilon}_{kl**}$, с использованием (1.6) и известного неравенства для выпуклых функций $(\Phi-\Phi_0\geqslant\partial\Phi/\partial\eta_{kl}\,|_{\eta_{kl}=\eta_{kl0}}(\eta_{kl}-\eta_{kl_0}))$ получим

$$(1-\Omega_0(t_*))^{1-\beta}-(1-\Omega(t_*))^{1-\beta}=(1-\beta)\int_0^{t_*}(\Phi-\Phi_0)\,dt\geqslant$$

$$\geqslant(1-\beta)\int_0^{t_*}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\eta_{kl}}\right|_{\eta_{kl}=\eta_{kl0}}(\eta_{kl}-\eta_{kl0})\,dt=(1-\beta)\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\eta_{kl}}\right|_{\eta_{kl}=\eta_{kl0}}(\overset{c}{\varepsilon}_{kl**}-\overset{c}{\varepsilon}_{kl**0})=0$$

поскольку компоненты $\partial\Phi/\partial\eta_{kl}|_{\eta_{kl}=\eta_{kl0}}$ не зависят от t и $\overset{c}{\varepsilon}_{kl**0}=\varepsilon_{kl**}$. Это неравенство, поскольку $1-\beta>0$, эквивалентно неравенству $\Omega(t_*)\geqslant\geqslant\Omega_0(t_*)$.

2. $1-\beta<0$. В этом случае

$$(1-\Omega(t_*))^{1-\beta}-(1-\Omega_0(t_*))^{1-\beta}=-(1-\beta)\int_0^{t_*}(\Phi-\Phi_0)\,dt\geqslant$$

$$\geqslant-(1-\beta)\int_0^{t_*}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\eta_{kl}}\right|_{\eta_{kl}=\eta_{kl0}}(\eta_{kl}-\eta_{kl0})\,dt=0$$

что эквивалентно неравенству $\Omega(t_*)\geqslant\Omega_0(t_*)$, поскольку $1-\beta<0$.

3. $1-\beta=0$. Из второго равенства (1.6) будем иметь

$$\ln(1-\Omega_0(t_*))-\ln(1-\Omega(t_*))=\int_0^{t_*}(\Phi-\Phi_0)\,dt\geqslant 0$$

откуда $\Omega(t_*)\geqslant\Omega_0(t_*)$. Таким образом, путь, для которого $\eta_{kl}=\overset{c}{\varepsilon}_{kl**}/t_*$, при $\alpha\geqslant 1$ $(p\geqslant n)$ является оптимальным в указанном смысле независимо от величины β. При этом значение параметра поврежденности в момент $t=t_*$ определяется из (1.6):

$$\Omega(t_*)=1-[1-(1-\beta)B_0[H(\overset{c}{\varepsilon}_{kl**}/t_*)]^{\alpha}t_*]^{1/(1-\beta)}=$$

$$=1-[1-(1-\beta)B_0\varepsilon_{**}^{\alpha}t_*^{1-\alpha}]^{1/(1-\beta)}\quad(\beta\neq 1) \tag{1.7}$$

$$\Omega(t_*)=1-\exp(-B_0\varepsilon_{**}^{\alpha}t_*^{1-\alpha})\quad(\beta=1),\quad \varepsilon_{**}=H(\overset{c}{\varepsilon}_{kl**})$$

В (1.7) учтено, что $H=H(\eta_{kl})$ — однородная функция первой степени. Как видно из (1.7), при $\alpha>1$ функция $\Omega=\Omega(t_*)$ является монотонно убывающей, т. е. чем больше интервал времени $[0, t_*]$, тем меньшая поврежденность накопится в материале к моменту $t=t_*$ при деформировании с постоянной скоростью.

Если оценивать уровень напряженного состояния величиной s, которая играет роль эквивалентного напряжения, то из (1.3), (1.7) следует, что для оптимального процесса при $\beta\neq1$ зависимость $s=s(t)$ имеет вид

$$s=B_1^{-1/n}\,(\varepsilon_{**}/t_*)^{1/n}[1-(1-\beta)B_0(\varepsilon_{**}/t_*)^{\alpha}t]^{m/[n(1-\beta)]} \qquad (1.8)$$

Соответствующие компоненты напряжений могут быть найдены из (1.4). Справедливость доказанного утверждения об оптимальности деформирования с постоянной скоростью сохраняется, если функцию $\Phi=B_0H^{\alpha}$, фигурирующую в (1.5), заменить на любую другую выпуклую функцию компонент скоростей деформаций ползучести.

2. Рассмотрим некоторые задачи обработки материалов давлением в режиме ползучести, в частности задачи об оптимальном деформировании тонких пластин постоянной толщины h в заданную остаточную форму, которая в основном определяется прогибом w, поскольку перемещения u_k ($k=1$, 2) в плоскости пластины много меньше w. Пусть за время t_* требуется получить остаточный прогиб $w_{**}=w_{**}(x_1, x_2)$, причем $w_{**}\gg h$, так что изгибными деформациями можно пренебречь, т. е. считать пластину мембраной с однородным по толщине распределением напряжений и деформаций. Для компонент деформаций будем иметь [7] (x_1, x_2 — декартовы координаты в плоскости пластины; нижний индекс после запятой означает частную производную по соответствующей пространственной координате):

$$\varepsilon_{kl}={}^1/_2(u_{k,\,l}+u_{l,\,k})+{}^1/_2w_{,k}w_{,l}\quad (k,\ l=1,\ 2) \qquad (2.1)$$

Считаем, что компоненты ε_{kl} складываются из упругих деформаций ε_{kl}^{e}, подчиняющихся закону Гука, и деформаций ползучести ε_{kl}^{c}, скорости которых определены в (1.2). Предполагаем, что остаточная поверхность является выпуклой:

$$w_{**,11}<0,\qquad w_{**,11}w_{**,22}-\overset{2}{w}_{**,12}>0 \qquad (2.2)$$

Тогда, как показано в [7], после деформирования мембраны в течение времени t_* и снятия внешних нагрузок остаточные напряжения в ней будут отсутствовать, а остаточные деформации будут совпадать с деформациями ползучести, накопленными к моменту $t=t_*$, т. е. с величинами $\overset{c}{}_{kl**}$. Следовательно, для последних будем иметь соотношения, аналогичные (2.1) (u_{k**} — остаточные перемещения):

$$\overset{c}{\varepsilon}_{kl**}={}^1/_2(u_{k**,l}+u_{l**,k})+{}^1/_2w_{**,k}w_{**,l}\quad (k,l=1,2) \qquad (2.3)$$

Как было показано, оптимальный путь деформирования, при котором величина $\Omega(t_*)$ минимальна, определяется равенствами $\eta_{kl}=\overset{c}{\varepsilon}_{kl**}/t_*$, откуда, учитывая, что $\varepsilon_{kl}^{c}=0$ при $t=0$, получим

$$\varepsilon_{kl}^{c}(t)=(t/t_*)\varepsilon_{kl**}\quad (k,l=1,2) \qquad (2.4)$$

Компоненты напряжений при этом определяются зависимостями (1.4), (1.8), подставляя в которые соотношения (2.3) и добавляя уравнения равновесия с известными касательными нагрузками (например, нулевыми), получим систему уравнений относительно σ_{kl} и u_{k**} (k, $l=1$, 2). Нахождение указанных величин при соответствующих граничных условиях представляет собой весьма сложную задачу [7].

Если наряду с прогибом w_{**} заданы компоненты u_{k**}, а следовательно, и $\overset{c}{\varepsilon}_{kl**}$, то напряжения σ_{kl} определяются в замкнутом виде с помощью (1.4), (1.8). При этом, как следует из уравнений равновесия, касательные составляющие внешней нагрузки, в общем случае, будут отличны от нуля.

Если поле напряжений найдено, то для полных деформаций в силу (2.4) будем иметь зависимости $\varepsilon_{kl}=\varepsilon_{kl}^{e}(\sigma_{mn})+(t/t_*)\overset{c}{\varepsilon}_{kl**}$, подставляя в которые (2.1), (2.3) и исключая компоненты u_k, u_{k**}, получим уравнение для определения неизвестного прогиба w:

$$\overset{2}{w}_{,12}-w_{,11}w_{,22}=\overset{e}{\varepsilon}_{11,22}+\overset{e}{\varepsilon}_{22,11}-2\overset{e}{\varepsilon}_{12,12}+(t/t_*)\,(\overset{2}{w}_{**,12}-w_{**,11}w_{**,22}) \qquad (2.5)$$

которое при отрицательной части и соответствующем граничном условии будет иметь единственное решение (другое решение отличается только знаком) [7]. Таким образом, для реализации оптимального пути деформирования необходимо приложить соответствующим образом распределенные внешние касательные нагрузки, либо, при их отсутствии, сообщить мембране перемещения в ее плоскости, причем величины этих нагрузок или перемещений зависят от времени, а закон изменения прогиба определяется из решения уравнения (2.5). Очевидно, что подобный процесс, в общем случае, трудно (или невозможно) осуществить практически.

Если время t_* велико, то напряжения, а следовательно, и компоненты ε_{kl}^e, будут малыми, поэтому последними можно пренебречь на фоне развитых деформаций ползучести, как это часто делается при решении технологических задач теории ползучести [8]. В этом случае, как видно из (2.5), имеет место простая зависимость

$$w=(t/t_*)^{1/2}w_{**} \tag{2.6}$$

Тогда из (2.1), (2.3), (2.4), (2.6) найдем, что $u_k=(t/t_*)u_{k**}$, где величины u_{k**} определяются из упомянутой выше системы либо являются заданными. Отметим также случай изгиба достаточно толстых пластин, когда прогибы w_{**} малы в сравнении с толщиной h и выражения для компонент деформаций имеют вид $\varepsilon_{kl}=-z\partial^2 w/\partial x_k \partial x_l$ (k, $l=1, 2$). Если считать, что время t_* велико и пренебречь упругими деформациями, то для реализации оптимального процесса деформирования необходимо задать прогиб в виде линейной функции от t: $w=(t/t_*)w_{**}$.

Оптимальный процесс деформирования, определяемый (в пренебрежении упругими деформациями) приведенными зависимостями для w, может быть реально осуществлен с помощью устройства, описанного в [9]. Данное устройство предназначено для изгиба пластин в условиях повышенных температур, когда существенно проявляются свойства ползучести материала. При этом пластина, расположенная горизонтально, зажимается с обеих сторон двойным набором стержней, причем каждая пара этих стержней может перемещаться вертикально по заданному закону независимо от других пар, что позволяет в любой момент времени получать заданный прогиб w при нулевых перемещениях u_k ($k=1$, 2). Очевидно, что при таком деформировании $\varepsilon_{kl}={}^1/_2 w_{,k}w_{,l}$ (k, $l=1$, 2).

Условие того что упругие деформации пренебрежимо малы по сравнению с остаточными, определяемыми в данном случае как $\overset{c}{\varepsilon}_{kl_{**}}= {}^1/_2 w_{**,k}w_{**,l}$, можно записать в терминах инвариантных величин s и ε_{**} в виде $s/E \ll \varepsilon_{**}$, где E — модуль Юнга, s определена в (1.8). Это дает оценку для значений t_*, при которых такое упрощение возможно. При меньших t_* влияние упругих составляющих деформации может оказаться весьма заметным, что проявляется, например, в эффекте распружинивания пластины после снятия внешних нагрузок при $t=t_*$ [2], т. е. если задать закон изменения прогиба в виде (2.6), то вследствие упругой разгрузки при $t=t_*$ остаточный прогиб не будет совпадать с w_{**}. Нахождение оптимального пути деформирования пластины, а тем более его реализация в этом случае сопряжены со значительными трудностями, о которых упоминалось выше.

В связи с этим рассмотрим процесс, близкий к оптимальному и который может быть реально осуществлен с помощью того же устройства [9]. Будем задавать прогиб и перемещения при $0 \leqslant t < t_*$ в виде: $w=(t/t_*)^{1/2}(w_{**}+w_*)$, $u_k=0$ ($k=1,2$), где w_{**} — по-прежнему остаточный прогиб, w_* — величина неизвестного упругого распружинивания при $t=t_*$ после снятия внешних нагрузок. Очевидно, что при таком деформировании остаточные перемещения $u_{k**}\neq 0$ ($k=1,2$), но, как отмечалось, они практически не влияют на остаточную форму пластины. Считаем, что $w_{**} \gg h$ и выражения для компонент ε_{kl} имеют вид (2.1) при $u_k=0$ ($k=1,2$). При указанном изменении прогиба во времени скорости полных деформаций в каждой точке мембраны будут постоянными при $0 \leqslant t < t_*$:

$$\varepsilon_{kl}^{\boldsymbol{\cdot}}=\varepsilon_{kl}^{e\boldsymbol{\cdot}}+\eta_{kl}=(w_{**}+w_*)_{,k}(w_{**}+w_*)_{,l}/(2t_*) \quad (k,\ l=1,\ 2) \tag{2.7}$$

Рассмотрим для конкретности энергетический вариант теории ползучести [3], когда для констант, фигурирующих в (1.2), будем иметь $p=$

$=n+1$, $q=m$, $B_2=B_1/A_*$ (A_* — критическое значение удельной рассеянной энергии) и выясним, какие упрощения возможны в этом случае при учете упругих деформаций. Для констант α, β и B_0, входящих в (1.5), (1.7) и (1.8), получим $\alpha=(n+1)/n>1$, $\beta=m/n$, $B_0=B_1^{-1/n}/A_*$.

Если величина t_* достаточно велика, то скоростями изменения упругих деформаций $\varepsilon_{kl}^{e\cdot}$ в (2.7) (но, в общем случае, не самими деформациями ε_{kl}^{e}) при $t=t_*$ можно пренебречь, считая, что

$$\eta_{kl}\approx\varepsilon_{kl}^{\cdot}=\varepsilon_{kl}(t_*)/t_*,\ \varepsilon_{kl}(t_*)={}^1/_2(w_{**}+w_*)_{,k}(w_{**}+w_*)_{,l}\ (k,l=1,2) \qquad (2.8)$$

Для выяснения возможности такого упрощения оценим величину $s^{\cdot}(t_*)/E$ и сравним ее с $\varepsilon(t_*)/t_*\equiv H(\varepsilon_{kl}(t_*))/t_*$. Из (2.8) при принятых константах ползучести с использованием (1.8) имеем

$$|s^{\cdot}(t_*)/E|=F(s_0)\varepsilon(t_*)/t_*$$

$$F(s_0)=\frac{m}{n}\frac{s_0^2}{A_*E}\left[1+\frac{m-n}{n}\frac{\varepsilon(t_*)s_0}{A_*}\right]^{(2m-n)/(n-m)} \qquad (2.9)$$

$$s_0=[\varepsilon(t_*)/(B_1t_*)]^{1/n}=s|_{t=0}$$

Функция $F=F(s_0)$ из (2.9) при ${}^1/_2\varepsilon(t_*)s_0/A_*<1$ является монотонно возрастающей, а если учесть, что пластические деформации отсутствуют, т. е. $s_0<\sigma_s$, где σ_s — предел текучести материала мембраны, то достаточным условием выполнимости неравенства $|s^{\cdot}(t_*)/E|\ll\varepsilon(t_*)/t_*$ будет $F(\sigma_s)\ll1$. Поскольку деформации считаются малыми, то величина $\varepsilon(t_*)$ не превосходит 5—10%, при этом указанные $\varepsilon(t_*)\sigma_s/(2A_*)<1$ и $F(\sigma_s)\ll1$ для многих конструкционных материалов, в частности для некоторых титановых сплавов при температуре 500—600° С, будут выполнены.

Таким образом, при сделанных оговорках величинами $\varepsilon_{kl}^{e\cdot}$ при $t=t_*$ в (2.7) можно пренебречь. Тогда для эквивалентного напряжения s при $t=t_*$ из (1.8) найдем

$$s(t_*)=s_0[1+(m-n)\varepsilon(t_*)s_0/(nA_*)]^{m/(n-m)} \qquad (2.10)$$

Заметим, что при $\varepsilon(t_*)s_0/A_*\ll1$ ($\Omega(t_*)\ll1$) можно принять, что $s(t_*)\approx\approx s_0$. Компоненты напряжений σ_{kl} при $t=t_*$ определяются из (1.4) и (2.10).

Разности деформаций и напряжений до и после разгрузки при $t=t_*$ связаны между собой законом Гука [10], а поскольку остаточные напряжения отсутствуют, то будем иметь

$${}^1/_2(w_{**}+w_*)_{,k}(w_{**}+w_*)_{,l}-{}^1/_2(u_{k**,l}+u_{l**,k}+$$
$$+w_{**,k}w_{**,l})=\varepsilon_{kl}^{e}(\sigma_{mn*})\ (k,l=1,2)$$

Исключая из этих равенств компоненты неизвестных остаточных перемещений u_{k**}, получим уравнение, аналогичное (2.5):

$$(w_{**}+w_*)_{,12}^2-(w_{**}+w_*)_{,11}(w_{**}+w_*)_{,22}-$$
$$-(w_{**,12}^2-w_{**,11}w_{**,22})=\overset{e}{\varepsilon}_{11*,22}+\overset{e}{\varepsilon}_{22*,11}-2\overset{e}{\varepsilon}_{12*,12} \qquad (2.11)$$

Это нелинейное относительно w_* уравнение может быть упрощено. Действительно, упругие деформации $\overset{e}{\varepsilon}_{kl*}$ имеют порядок величины $s(t_*)/E$, поэтому малость последней обусловливает, как следует из (2.11), и малость w_*. Тогда тот же порядок будет иметь и величина

$$s_1/E=E^{-1}[\varepsilon_{**1}/(B_1t_*)]^{1/n}\{1+[(m-n)\varepsilon_{**1}/(nA_*)]\times$$
$$\times[\varepsilon_{**1}/(B_1t_*)]^{1/n}\}^{m/(n-m)},\ \varepsilon_{**1}={}^1/_2H(w_{**,k}w_{**,l})$$

Отбрасывая в (2.11) члены более высоких порядков, получим

$$f_{kl}w_{*,kl}=F_1(x_1,x_2),\quad f_{11}=w_{**,22},\quad f_{22}=w_{**,11} \qquad (2.12)$$

$$f_{12}=f_{21}=-w_{**,12},\qquad F_1=2\overset{e}{\varepsilon}_{12*,12}-\varepsilon_{11*,22}-\varepsilon_{22*,11}$$

причем деформации $\overset{e}{\varepsilon}_{kl*}$ связаны законом Гука с напряжениями σ_{kl*}, для которых имеет место представление (1.4) при $s=s_1$ и $\eta_{kl}=w_{**,k}w_{**,l}/(2t_*)$ $(k, l=1, 2)$.

Другими словами, если выбрать в качестве малого параметра величину $\delta=\max(s_1/E)$ и использовать обычную процедуру метода возмущений [10], то уравнение первого приближения для (2.11) будет совпадать с (2.12). Возможны последующие уточнения для w_*, при этом уравнение для любого приближения будет иметь вид (2.12), в котором функция F_1 зависит только от предыдущих приближений.

Уравнение (2.12) относительно функции $w_*=w_*(x_1, x_2)$ в силу условий (2.2) является эллиптическим, поэтому при задании граничного условия (например, $w_*=0$ на контуре γ мембраны) оно будет иметь единственное решение.

Аналогичные рассуждения можно провести и для случая малых прогибов, когда для близкого к оптимальному процесса имеем $w=t/t_*(w_{**}+w_*)$. Тогда скорости деформаций постоянны при $0\leqslant t<t_*$ и справедливы все полученные оценки. Не останавливаясь на соответствующих выкладках, приведем окончательное уравнение для w_*, которое получается из соотношений упругой разгрузки и уравнения равновесия при $t=t_*$ после снятия внешних нагрузок [10]: $\Delta\Delta w_*=-M_{kl*,kl}/D$, где $\Delta\Delta$ — бигармонический оператор, D — цилиндрическая жесткость пластины, M_{kl*} — моменты, соответствующие напряжениям σ_{kl*} при $t=t_*$ перед снятием нагрузок. В первом приближении компоненты σ_{kl*} находятся по известным скоростям деформаций ползучести $\eta_{kl}=-(z/t_*)w_{**,kl}$ $(k, l=1, 2)$.

3. Задача определения величины упругого распруживания w_* из уравнения (2.12) при граничном условии $w_*=0$ на γ допускает вариационную формулировку. Рассмотрим функционал

$$J=-\int_S\left(\frac{1}{2}f_{kl}w_{*,k}w_{*,l}+F_1w_*\right)dx_1\,dx_2 \tag{3.1}$$

где S — область плоскости, занятая пластиной, и покажем, что равенство $\delta J=0$ при условии, что варьируемые функции удовлетворяют граничному условию, т. е. $\delta w_*=0$ на γ, эквивалентно выполнимости уравнения (2.12).

Учитывая, что $f_{kl}=f_{lk}$ $(k, l=1, 2)$, из (3.1) получим

$$\begin{aligned}\delta J&=-\int_S(f_{kl}w_{*,k}\delta w_{*,l}+F_1\delta w_*)\,dx_1\,dx_2=\int_S[-(f_{kl}w_{*,k}\delta w_*)_{,l}+\\&+f_{kl,l}w_{*,k}\delta w_*+f_{kl}w_{*,kl}\delta w_*-F_1\delta w_*]\,dx_1\,dx_2=\\&=-\int_\gamma f_{kl}w_{*,k}n_l\delta w_*\,ds+\int_S(f_{kl}w_{*,kl}-F_1)\,\delta w_*\,dx_1\,dx_2\end{aligned} \tag{3.2}$$

где n_k $(k=1, 2)$ — компоненты единичного вектора внешней к γ нормали, s — длина дуги контура γ. В (3.2) использовались равенства $f_{kl,l}=0$ $(k=1, 2)$, вытекающие из определения функций f_{kl}, а также осуществлен переход от интегрирования по области S к интегрированию по контуру γ. Первый интеграл в последнем соотношении (3.2) обращается в нуль, поскольку $\delta w_*=0$ на γ, поэтому ввиду произвольности вариации δw_* в области S равенство $\delta J=0$ эквивалентно (2.12).

Покажем, что решение указанной краевой задачи, которое будем обозначать w_*, доставляет минимум функционалу J. Для этого заметим, что в силу (2.2) квадратичная форма $-f_{kl}y_ky_l$ является положительно-определенной, поэтому $-{}^1/_2f_{kl}(y_k^\circ y_l^\circ-y_ky_l)\geqslant -f_{kl}y_k(y_l^\circ-y_l)$, причем знак равенства возможен только при $y_k^\circ=y_k$ $(k=1, 2)$, где y_k, y_k° $(k=1, 2)$ — два произвольных набора чисел. С учетом этого для любой функции $w_*^\circ=w_*^\circ(x_1\,x_2)$, такой, что $w_*^\circ=0$ на γ, будем иметь

$$J(w_*^\circ)-J(w_*)=\int_S\left[-\frac{1}{2}f_{kl}(\overset{0}{w}_{*,k}\overset{0}{w}_{*,l}-w_{*,k}w_{*,l})-F_1(w_*^\circ-w_*)\,dx_1\,dx_2\geqslant\right.$$

$$\geqslant \int\limits_S [-f_{kl}w_{*,k}\Delta w_{*,l}-F_1\Delta w_*]dx_1\,dx_2=\int\limits_S [-(f_{kl}w_{*,k}\Delta w_*)_{,l}+f_{kl,l}w_{*,k}\Delta w_*+$$

$$+(f_{kl}w_{*,kl}-F_1)\Delta w_*]dx_1\,dx_2=-\int\limits_\gamma f_{kl}w_{*,k}n_l\Delta w_*\,ds=0$$

Здесь использовались (2.12), равенства $f_{kl,l}=0$ ($k=1, 2$) и введено обозначение $\Delta w_*=w_*^\circ-w_*$. Отсюда $J(w_*^\circ)\geqslant J(w_*)$, причем, как видно, знак равенства возможен только при $w_*^\circ=w_*$, что и доказывает данное утверждение.

Таким образом, исходная задача (2.12) при $w_*=0$ на γ эквивалентна нахождению минимума функционала (3.1), что позволяет находить приближенные решения уравнения (2.12). Так, если условия деформирования таковы, что прогиб на контуре γ равен нулю в течение всего процесса, т. е. $w_*=w_{**}=0$ на γ, то для оценки величины w_* можно приближенно положить $w_*=\lambda w_{**}$, где $\lambda(0<\lambda<1)$ — неизвестная константа. Подставляя это значение в (3.1) и минимизируя функционал J, получим

$$\lambda=-\left(\int\limits_S F_1 w_{**}\,dx_1\,dx_2\right)\left(\int\limits_S f_{kl}w_{**,k}w_{**,l}\,dx_1\,dx_2\right)^{-1} \tag{3.3}$$

В качестве примера рассмотрим задачу о деформировании круглой пластинки радиуса a, которая при $t=t_*$ должна иметь остаточный прогиб $w_{**}=w_{**}(r)$. где r — радиус полярной системы координат. Материал пластинки считаем изотропным и несжимаемым как по упругим деформациям, так и при ползучести. В качестве инварианта s из (1.2) выберем интенсивность напряжений $\sigma_i=(\sigma_r^2+\sigma_\theta^2-\sigma_r\sigma_\theta)^{1/2}$, тогда $H=\eta_i=2/\sqrt{3}(\eta_r^2+\eta_\theta^2+\eta_r\eta_\theta)^{1/2}$, где η_i — интенсивность скоростей деформаций ползучести; индексы r и θ относятся к радиальному и окружному направлениям. Кроме того, считаем, что величина t_* достаточно велика, так что $\Omega(t_*)\ll 1$ и в силу замечания, сделанного после формулы (2.10), можно положить $\sigma_i(t_*)\approx\sigma_{i0}=[\varepsilon_i(t_*)/(B_1t_*)]^{1/n}$, где ε_i — интенсивность деформаций.

Компоненты напряжений σ_{r*} и $\sigma_{\theta*}$, входящие в выражения для упругих деформаций в (2.12), в этом случае определяются из (1.4) при $s=\sigma_{i0}$ и $\eta_r=w_{**}'^2/(2t_*)$, $\eta_\theta=0$ (штрих означает дифференцирование по r):

$$\sigma_{r*}=(2/\sqrt{3})^{(n+1)/n}[w_{**}'^2/(2B_1t_*)]^{1/n},\quad \sigma_{\theta*}={}^1/_2\sigma_{r*}$$

Отсюда для упругих деформаций найдем

$$\varepsilon_{r*}{}^e={}^3/_4\sigma_{r*}/E=B_3(w_{**}')^{2/n},\qquad \varepsilon_{\theta*}{}^e=0 \tag{3.4}$$

$$B_3=(\sqrt{3}/2)^{(n-1)/n}E^{-1}(2B_1t_*)^{-1/n}$$

Для рассматриваемого случая осевой симметрии функции, входящие в (2.12) и (3.1), определяются следующим образом:

$$f_{kl}w_{*,kl}=(w_{**}'w_*')'r^{-1},\quad F_1=[(\varepsilon_{r*}{}^e-\varepsilon_{\theta*}{}^e)'-(r\varepsilon_{\theta*}{}^{e\prime})']r^{-1}$$

$$f_{kl}w_{*,k}w_{*,l}=w_{**}'w_*'^2r^{-1} \tag{3.5}$$

С учетом (3.4), (3.5) и равенства $w_{**}'=0$ при $r=0$ уравнение (2.12) примет вид $w_*'=B_3(w_{**}')^{2/n-1}$, решением которого при условии $w_*=0$ при $r=a$ будет

$$w_*=B_3\int\limits_a^r (w_{**}')^{2/n-1}\,dr \tag{3.6}$$

Очевидно, что (3.6) будет иметь смысл при $n<2$, в противном случае $w_*'=\infty$ при $r=0$.

Если искать приближенное решение в виде $w_*=\lambda w_{**}$, то из (3.3) с учетом (3.5) и (3.4) найдем

$$\lambda=-B_3\left(\int\limits_0^a [(w_{**}')^{2/n}]'\,w_{**}\,dr\right)\left(\int\limits_0^a (w_{**}')^3\,dr\right)^{-1} \tag{3.7}$$

где учтено, что интегрирование по площади S сводится к интегрированию по кругу радиуса a.

Так, например, в случае параболического остаточного прогиба $w_{**}=\alpha_1(a^2-r^2)$ ($\alpha_1>0$ — константа) из (3.6) будем иметь точное решение

$$w_*={}^1/_2nB_3(2\alpha_1)^{2/n-1}(a^{2/n}-r^{2/n}) \tag{3.8}$$

Из (3.7) получим приближенное решение

$$w_*=\lambda\alpha_1(a^2-r^2),\quad \lambda=[n/(n+1)]\alpha_1^{-1}B_3(2\alpha_1)^{2/n-1}a^{2/n-2} \tag{3.9}$$

которое при $1\leqslant n<2$ близко к точному. Так, для величины k, равной отношению максимальных значений w_* из (3.8) и (3.9), будем иметь $k=2/(n+1)$, т. е. ${}^2/_3<k\leqslant 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука. 1966. 752 с.
2. *Горев Б. В., Клопотов И. Д., Раевская Г. А., Соснин О. В.* К вопросу обработки материалов давлением в режиме ползучести // ПМТФ. 1980. № 5. С. 185—191.
3. *Соснин О. В.* Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Ползучесть и разрушение неупрочняющихся материалов. Сооб. I // Проблемы прочности. 1973. № 5. С. 45—49.
4. *Цвелодуб И. Ю.* Устойчивость в малом и ее приложении к исследованию определяющих уравнений ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 2. С. 125—128.
5. *Цвелодуб И. Ю.* О построении определяющих уравнений установившейся ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 3. С. 104—110.
6. *Цвелодуб И. Ю.* О некоторых возможных путях построения теории установившейся ползучести сложных сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 48—55.
7. *Цвелодуб И. Ю.* Обратная задача о деформировании мембраны в условиях ползучести // ПМТФ. 1985. № 5. С. 158—163.
8. *Малинин Н. Н.* Технические задачи пластичности и ползучести. М.: Высш. шк. 1979. 119 с.
9. *Соснин О. В., Шубин И. А., Горев Б. В. и др.* Способ формообразования деталей двойной крутизны и устройство для его осуществления: А. с. 1147471 СССР // Б. И. 1985. № 12. С. 42—43.
10. *Цвелодуб И. Ю.* Некоторые обратные задачи изгиба пластин при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 126—134.

Новосибирск

Поступила в редакцию
25.VI.1986