

УДК 539.214

О КАЧЕНИИ ЦИЛИНДРА ПО ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

КУЗЬМЕНКО В. И.

Контактные задачи о качении (перекатывании) цилиндра вызывают традиционный интерес в механике деформируемого тела. Подробно изучено установившееся качение цилиндра по поверхности упругой и вязкоупругой полуплоскости [1], причем решение с использованием некоторой подвижной системы координат удалось получить аналитическими методами.

Задача о движении цилиндра по поверхности упругопластического тела сложнее аналогичных задач теории упругости и вязкоупругости как по существу проблемы, так и по методам решения. Для задач теории пластичности невозможно исследовать только установившийся процесс качения вне зависимости от предшествующего деформирования. Возникающие вследствие качения процессы нагружения будут существенно сложными, поэтому принципиальная трудность состоит в разработке методов решения, ориентированных на использование вариантов теории пластичности при сложном нагружении.

Значительно отличаются и цели исследования, связанные с различными областями приложения. Качение цилиндра по поверхности упругого и вязкоупругого тела изучалось в связи с задачами движения колесных экипажей, поэтому в центре исследований находился анализ сопротивления перекатыванию. Прикладной аспект исследования качения по поверхности упругопластического тела определяется главным образом технологическими приложениями в машиностроении, обработке давлением, дорожном строительстве. Цилиндр рассматривается лишь как инструмент, и исследование направлено на анализ процессов необратимого деформирования, вызванного движением инструмента.

Существующие решения задач теории пластичности о качении цилиндра получены при значительно упрощенных постановках. В частности, в [2, 3] контактная задача о качении цилиндра по поверхности упруго идеально пластической полуплоскости заменяется более простой краевой задачей о движении заданной распределенной нагрузки, в качестве которой принимается контактное давление при действии цилиндра на упругую полуплоскость. В публикуемой статье предлагается общая постановка контактных задач о процессе деформирования при движении цилиндра по поверхности упругопластического тела, причем размеры площадки контакта и распределение контактного давления в каждый момент времени заранее неизвестны. Используются соотношения связи между скоростями деформаций и скоростями изменения напряжений, соответствующие широкой группе теорий пластичности. Численное решение основано на обобщенной формулировке задачи в виде квазивариационного неравенства. Рассмотрены задачи о движении цилиндра по поверхности упругопластической полосы, а также по поверхности с выступом.

1. Постановка задачи. Рассматривается квазистатический процесс плоского деформирования упругопластического тела под действием движущегося кругового цилиндра. Для указания последовательности протекания процесса введем монотонно возрастающий параметр $t, t \in [0, T]$, называемый в дальнейшем временем. В качестве пространственной системы отсчета используем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, выбранную таким образом, что образующие тела и цилиндра перпендикулярны плоскости $x_3=0$.

Считаем, что векторы перемещений во всех точках тела параллельны плоскости $x_3=0$ и не зависят от расстояния до этой плоскости. Дальнейшее изложение относится к сечению Ω тела плоскостью $x_3=0$. Обозначим через $x=(x_1, x_2)$ точку области Ω и под $u_i(x, t)$, $\varepsilon_{ij}(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$ понимаем, как обычно, компоненты вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений. Точкой сверху будем указывать материальное дифференцирование по времени.

Контур L области Ω представим в виде объединения непересекающихся участков L_u , L_σ , L_c . На участке L_u тело закреплено, а на участке L_σ — свободно от нагрузок. На участке L_c происходит качение цилиндра. Основное внимание уделяется исследованию эффектов качения, связанных с пластическим деформированием, поэтому влиянием трения скольжения будем пренебрегать.

Сформулируем способ описания движения цилиндра относительно кривой L_c . Будем считать L_c гладкой кривой, гомеоморфной отрезку $[\alpha, \beta]$ изменения параметра ξ . Указанное соответствие позволяет ввести на кривой L_c одномерную систему координат ξ , связанную с декартовыми координатами параметрическими уравнениями кривой $x_1 = x_1(\xi)$, $x_2 = x_2(\xi)$. Положение цилиндра в произвольный момент времени t будем определять при помощи пары заданных функций $\xi_0(t)$, $\Delta(t)$ следующим образом. Центр основания цилиндра находится на прямой, проходящей через точку $\xi_0(t)$ в направлении нормали к L_c в этой точке; положение цилиндра на указанной прямой определяется глубиной погружения $\Delta(t)$, равной расстоянию от точки $\xi_0(t)$ до поверхности цилиндра.

Заданные функции $\xi_0(t)$, $\Delta(t)$ позволяют ввести в некоторой окрестности $(\xi_0(t) - \eta_1(t), \xi_0(t) + \eta_2(t))$ точки $\xi_0(t)$ расстояние $\Phi(\xi, t)$ от точки ξ на кривой L_c до поверхности цилиндра, измеренное в момент времени t вдоль направления внешней по отношению к Ω нормали к L_c в точке ξ .

Сформулируем условия взаимодействия цилиндра с телом. Нижними индексами v и τ будем указывать нормальные и касательные компоненты векторов в точках линии L_c . Отсутствие трения скольжения означает, что

$$(\sigma_\tau)_i(\xi, t) = 0 \quad V \xi \in [\alpha, \beta], \quad V t \in [0, T] \quad (1.1)$$

Нормальные компоненты векторов перемещений и напряжений на L_c должны быть подчинены следующим условиям [4, 5]:

$$u_v(\xi, t) \leq \Phi(\xi, t), \quad \sigma_v(\xi, t) \leq 0, \quad \sigma_v(\xi, t)[u_v(\xi, t) - \Phi(\xi, t)] = 0 \quad (1.2)$$

$$V \xi \in (\xi_0(t) - \eta_1(t), \xi_0(t) + \eta_2(t)), \quad V t \in [0, T]$$

Условия (1.2) выражают требование взаимного непроникания поверхностей тела и цилиндра, а также отсутствия растягивающих нормальных контактных напряжений.

Качение цилиндра по поверхности упругопластического тела в общем случае сопровождается процессами существенно сложного нагружения, включая разгрузку и повторное пластическое деформирование. Для описания механических свойств материала при сложном нагружении используем соотношения связи между скоростями изменения напряжений и скоростями деформаций в виде

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijkm}(x, \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r) \dot{\epsilon}_{km} \quad (1.3)$$

где $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r$ — некоторые функционалы истории деформирования. В виде (1.3) могут быть представлены определяющие соотношения широкой группы разработанных вариантов теории пластичности.

Начально-краевая задача состоит в определении функций $u_i(x, t)$, $\epsilon_{ij}(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$, удовлетворяющих уравнениям равновесия, соотношениям Коши связи между деформациями и перемещениями, определяющим соотношениям (1.3), условиям (1.1), (1.2) на L_c , нулевым граничным условиям на L_u и L_σ , а также начальным условиям $u_i(x, 0) = \epsilon_{ij}(x, 0) = \sigma_{ij}(x, 0) = 0$, $V x \in \Omega$. В связи с последними условиями необходимо потребовать, чтобы $\Delta(0) \leq 0$.

Особенностью поставленной задачи является то, что соотношения (1.3) в общем случае неинтегрируемы, поэтому для эффективного решения задачи все остальные соотношения целесообразно преобразовать к виду в скоростях. Однако условия (1.2) содержат неравенства и не могут быть представлены в скоростях при помощи почленного дифференцирования по времени.

2. Метод численного решения. Сформулированная в п. 1 задача относится к общему классу контактных задач теории пластичности при сложном нагружении [5]; исследование таких задач и построение алгоритма численного решения основано на обобщенной формулировке в виде квазивариационного неравенства.

В соответствии с [5] введем множество K допустимых скоростей перемещений $v_i^*(x, t) \in L^2(0, T; W_2^1(\Omega))$, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям

$$\int_0^t v_v^*(\xi, s) ds \leq \Phi(\xi, t) \quad \forall \xi \in (\xi_0(t) - \eta_1(t), \xi_0(t) + \eta_2(t))$$

$$v_i^*(x, t) = 0 \quad \forall x \in L_u, \quad \forall t \in [0, T]$$

Тогда действительные скорости перемещений $u_i^*(x, t)$ и соответствующие скорости деформаций $\varepsilon_{ij}^*(x, t)$ удовлетворяют квазивариационному неравенству [5], имеющему в условиях данной задачи следующий вид:

$$\int_0^T \left\{ \int_{\Omega} A_{ijk} \varepsilon_{km}^*(\xi_{ij}^* - \xi_{ij}) d\Omega - \int_{L_c} \psi(\sigma_v, v_v - u_v) dL \right\} dt \geq 0 \quad \forall v_i^* \in K \quad (2.1)$$

где $\psi(\sigma_v, v_v - u_v) = +\infty$, если $\sigma_v < 0$, $v_v < u_v$, и $\psi(\sigma_v, v_v - u_v) = 0$ в остальных случаях под ξ_{ij}^* понимаем компоненты тензора скоростей деформаций, соответствующего допустимым скоростям перемещений $v_i^*(x, t)$.

При численном решении производится предварительная дискретизация квазивариационного неравенства (2.1) по времени. Отрезок $[0, T]$ разбивается на n промежутков, вообще говоря, различной длины. В пределах каждого промежутка функция $v_i^*(x, t)$ заменяется линейной функцией по времени, так что аппроксимирующая функция $v_{in}^*(x, t)$ является кусочно-линейной. В результате дискретизации по времени возникает последовательность задач решения вариационных неравенств, соответствующих временным узлам. Каждое вариационное неравенство заменяется эквивалентной экстремальной задачей. Такие экстремальные задачи формально совпадают с соответствующими задачами линейной теории упругости, если заменить скорости перемещениями. Для дискретизации экстремальных задач используется хорошо разработанный метод конечных элементов. Возникающие задачи нелинейного программирования решаются с помощью метода последовательной верхней релаксации [6] с проекцией на допустимое множество. При решении задач на ЕС ЭВМ используется комплекс программ исследования контактных задач теории пластичности для упругопластической полосы при сложном нагружении [7].

3. Качение цилиндра по поверхности упругопластической полосы. Рассмотрим процесс деформирования упругопластической полосы шириной $2a$ и высотой b при качении кругового цилиндра радиуса основания R . Выберем начало декартовой системы координат Ox_1x_2 на середине верхней грани полосы. Предполагается, что нижняя грань $x_2 = -b$ и боковые грани $x_1 = \pm a$ закреплены, а качение цилиндра производится по поверхности верхней грани $x_2 = 0$.

Введем параметр ξ при помощи соотношения $\xi = x_1/a$. Цилиндр в течение времени $0,25T$ вдавливается на глубину Δ_0 вдоль линии $\xi = 0,5$, а затем производится качение с постоянной скоростью $V_0 = \frac{1}{3}a/T$ при постоянной глубине погружения Δ_0 . Таким образом, движение цилиндра описывается при помощи двух функций $\xi_0(t)$, $\Delta(t)$, определенных следующим образом:

$$\xi_0(t) = \begin{cases} 0,5 & (t \leq 0,25) \\ 0,5 + V_0(t - 0,25)/a & (t > 0,25) \end{cases}$$

$$\Delta(t) = \begin{cases} 4\Delta_0 t/T & (t \leq 0,25) \\ \Delta_0 & (t > 0,25) \end{cases}$$

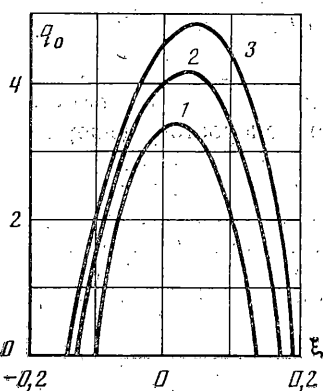
Построение функции $\Phi(\xi, t)$ на отрезке $(\xi_0(t) - R/a, \xi_0(t) + R/a)$ в данном случае очевидно.

Обозначим через G модуль упругости на сдвиг, через ν_0 — коэффициент Пуассона, через τ_s — предел текучести при кручении. Конкретные расчеты выполнялись по теории течения с кинематическим упрочнением А. Ю. Ишлинского — В. Прагера [8]. В рамках этой теории упрочнение считается линейным и характеризуется угловым коэффициентом G_t диаграммы кручения при $\tau > \tau_s$.

Исследование на ЭВМ выполнено при $b=0,8a$, $R=0,1Ga/\tau_s$, $G_t/G=0,1$; $\nu_0=0,3$ для следующих величин глубины погружения: $\Delta_0 G/(\tau_s a)=0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$.

При численном решении для дискретизации квазивариационного неравенства по времени отрезок $[0, T]$ разбивался на 80 частей равной длины. Для аппроксимации экстремальных задач при помощи метода конечных элементов использовалось 1500 треугольных элементов с линейной функцией формы. Время решения зависит от Δ_0 и составляет от 23 до 49 мин на ЕС-1045.

Эпюры нормальных контактных напряжений $q_0 = -\sigma_{22}/\tau_s$ при $\xi_0=0$ показаны на фиг. 1. Кривые 1, 2, 3 соответствуют $\Delta_0 G/(\tau_s a)=0,5; 0,7; 0,9$. Обратим внимание на то,



Фиг. 1

что кривые несимметричны относительно линии $\xi=0$. В задачах качения по поверхности упругого тела такая асимметрия связана только с наличием трения скольжения, а в задачах вязкоупругости зависит также от скорости движения цилиндра. Поскольку в данной задаче трение скольжения не учитывается, а напряженно-деформированное состояние не зависит от скорости нагружения, то возникновение указанной асимметрии следует связывать с особенностями упругопластического деформирования.

На фиг. 2 показаны зоны активных пластических деформаций (плотная штриховка) и зоны разгрузки (редкая штриховка) при $\xi_0=0$ для $\Delta_0 G/(\tau_s a)=0,5$ (а); $0,7$ (б); $0,9$ (в). Отрезок AB на фиг. 2 проходит через ось цилиндра. Справа от AB осуществляется активное пластическое деформирование, слева преобладает зона разгрузки. Различный характер протекания процессов активного пластического деформирования и разгрузки обуславливает асимметрию эпюры контактного давления.

Контактные напряжения приводятся к главному вектору, нормальному к поверхности $x_2=0$ и проходящему через ось цилиндра, и моменту относительно точки ξ_0 . Таким образом, качение цилиндра по поверхности упругопластической полосы требует приложения момента относительно точки ξ_0 . При $\xi_0=0$ величина такого момента качения, отнесенная к $\tau_s a^2$, для $\Delta_0 G/(\tau_s a)=0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$ равна соответственно $0,066; 0,088; 0,124; 0,172; 0,224$. Практически этот момент может быть реализован путем приложения горизонтального усилия к оси цилиндра. Работа, выполняемая такой горизонтальной силой при качении цилиндра, связана с образованием новых областей необратимых пластических деформаций.

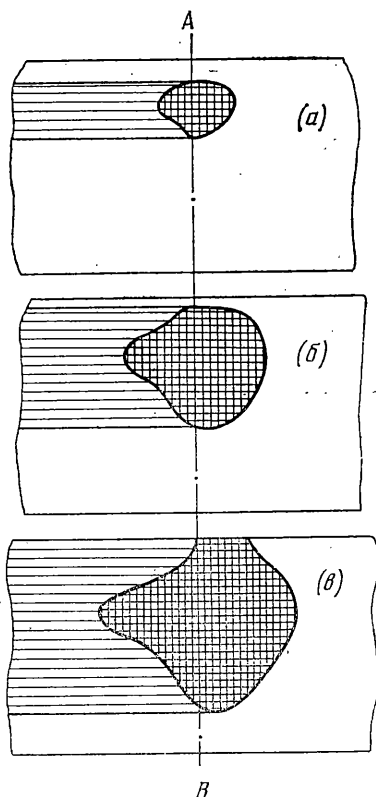
С другой стороны, поскольку при качении цилиндра образуются новые зоны необратимых деформаций, то эпюра нормальных контактных напряжений обязательно должна быть несимметричной. Укажем в связи с этим на некорректность сделанной в [3] замены контактной задачи о качении цилиндра задачей о движении распределенной симметричной нагрузки.

Интересно, что с началом качения величина нормального усилия на единицу длины цилиндра $P_0=P/(\tau_s a)$ уменьшается (фиг. 3; цифрам 1–5 соответствует $\Delta_0 G/(\tau_s a)=0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$), причем различие между нормальной нагрузкой в момент начала качения и в установившейся стадии процесса возрастает с ростом глубины погружения Δ_0 и достигает 20%.

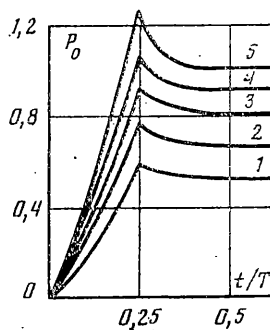
Отметим, что при $\Delta_0 G/(\tau_s a) \leq 0,6$ существует слой (фиг. 2), прилегающий к поверхности качения, в котором происходит только упругое деформирование, а наиболее значительные пластические деформации и связанное с ними упрочнение материала осуществляются на некотором расстоянии от поверхности $x_2=0$. Фиг. 2 позволяет также оценить глубину упрочненного слоя при качении в зависимости от Δ_0 .

4. Качение цилиндра по поверхности с выступом. Упругопластическая полоса с теми же размерами и механическими характеристиками, что и в п. 3, имеет на верхней грани выступ, форма которого описывается уравнением $x_2 = h\tau_s a / [G\{[x_1/(la)]^2 - 1\}^2]$ ($-la \leq x_1 \leq la$). Безразмерный параметр h характеризует высоту выступа, l — ширину основания выступа.

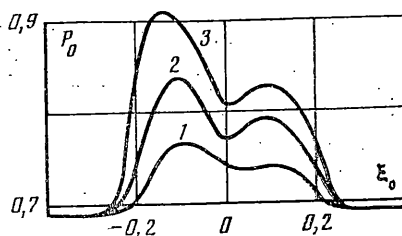
Введем систему координат ξ на верхней грани, так же как и в п. 3, при помощи соотношения $\xi = x_1/a$. Считаем, что высота выступа $h\tau_s a/G$ мала по сравнению с основанием $2la$ и в качестве направления нормали к поверхности в точке ξ выступа принимаем направление нормали к плоскости $x_2=0$ в точке $x_1=\xi a$. Закон движения.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

цилиндра выбирается таким же, как и в п. 3, причем под глубиной погружения понимаем расстояние до поверхности цилиндра, отсчитанное от плоскости $x_2=0$, а не от поверхности выступа. Поставленная задача моделирует процессы выглаживания неровностей обкатыванием в машиностроении, дорожном строительстве и т. п.

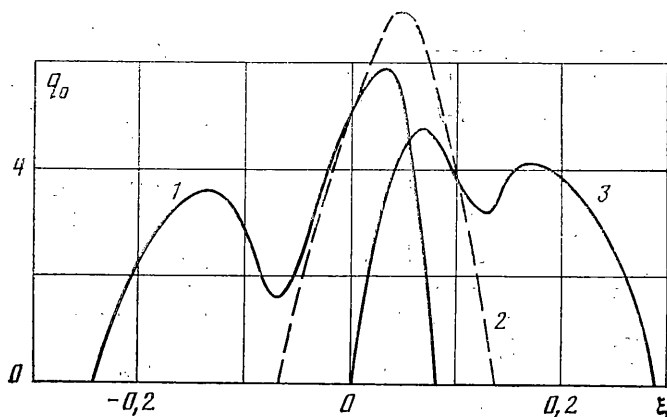
Расчеты выполнены для $\Delta_0 G/(\tau_s a) = 0,6$; $l = 0,1$ при $h = 0,2$; $0,4$; $0,6$; остальные характеристики выбирались такими же, как и в п. 3. Поскольку высота выступа мала по сравнению с размерами полосы, то при конечноэлементной аппроксимации область Ω рассматривалась как прямоугольная. Время решения на ЭВМ ЕС-1045 для разных h составляет от 45 до 50 мин.

На фиг. 4 показано изменение главного вектора давления $P_0 = P/(\tau_s a)$ при прохождении цилиндра через выступ. Цифры 1, 2, 3 соответствуют $h = 0,2$; $0,4$; $0,6$. Величина P имеет три экстремума — два максимума и один минимум, причем при $\xi_0 = 0$ нормальное усилие достигает локального минимума. Для объяснения этого, в определенной мере неожиданного результата, рассмотрим распределение нормальных контактных напряжений $q_0 = -\sigma_{22}/\tau_s$ (фиг. 5) при $\xi_0 = -0,123$ (кривая 1), $\xi_0 = 0$ (кривая 2), $\xi_0 = 0,123$ (кривая 3) для случая $h = 0,6$. Указанные значения ξ_0 близки к точкам локальных экстремумов на фиг. 4. Отметим, что, хотя при $\xi_0 = 0$ максимальные контактные давления несколько выше, чем при $\xi_0 = \pm 0,123$, площадка контакта при $\xi_0 = 0$ существенно меньше, что в конечном счете приводит к тому, что при $\xi_0 = 0$ главный вектор давления меньше, чем при $\xi_0 = \pm 0,123$.

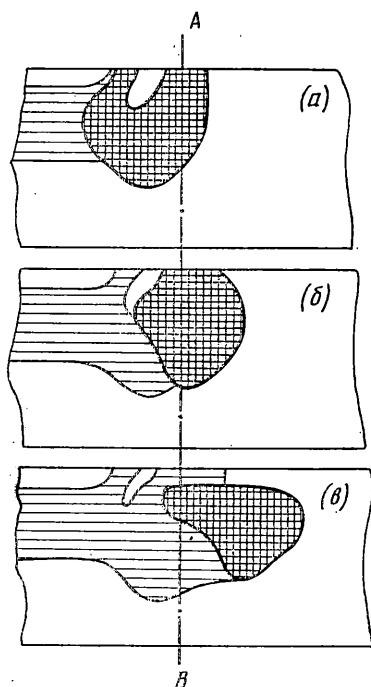
Кривые 1 и 3 имеют два максимума, один из которых (левый на кривой 1 и правый на кривой 3) соответствует аналогичному максимуму при качении по плоской поверхности (фиг. 1), а другой связан с контактным взаимодействием цилиндра и выступа. При $\xi_0 \rightarrow 0$ оба максимума сливаются в один. Формально задачу о качении цилиндра по поверхности с выступом можно рассматривать как качение цилиндра с выступом по плоской поверхности, чем и объясняется наличие двух пиков контактного давления.

На фиг. 6 показаны области активных пластических деформаций и области разгрузки при $\xi_0 = -0,123$ (а); 0 (б); $0,123$ (в). Штриховка областей такая же, как и на фиг. 2. Следует подчеркнуть, что, хотя при $\xi_0 = -0,123$ и $\xi_0 = 0,123$ цилиндр расположен симметрично по отношению к выступу, области пластических деформаций существенно различаются. В частности, под выступом при $\xi_0 = -0,123$ происходит активное пластическое деформирование, а при $\xi_0 = 0,123$ — разгрузка. Этим объясняется различие эпюр контактных напряжений при $\xi_0 = -0,123$ и $\xi_0 = 0,123$ (фиг. 5). Укажем также, что при прохождении выступа глубина области активных пластических деформаций увеличивается по сравнению с качением по плоской поверхности.

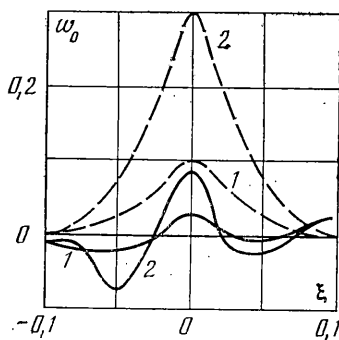
Для анализа получения поверхностей особой точности представит интерес характер сглаживания неровностей при обкатке цилиндром. На фиг. 7 показана форма



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

выступа $w_0 = x_2 G / (\tau_0 a)$ в исходном состоянии (штриховые линии) и после качения цилиндра с последующей разгрузкой (сплошные линии). Профили выступа построены для $h=0,2$ (кривые 1) и $h=0,6$ (кривые 2). Отметим, что в результате качения высота выступа существенно уменьшается, хотя выступ полностью не сглаживается. Поскольку в окрестности выступа контактные напряжения в среднем увеличиваются по сравнению с качением по плоской поверхности, то общая остаточная осадка поверхности полосы при $|\xi| < l$ будет больше, чем в остальной части поверхности. С этим связано и отмеченное ранее увеличение глубины зоны пластических деформаций в области под выступом. Наконец, форма остаточного профиля выступа несимметрична, поскольку при качении происходит выдавливание материала преимущественно в направлении качения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука. 1976. 493 с.
2. Merwin J. E., Johnson K. L. An analysis of plastic deformation in rolling contact // Chartered Mech. Engr. 1963. V. 10. No. 2. P. 94.
3. Bhargava V., Hahn G. T., Rubin C. A. An elastic-plastic finite element model of rolling contact. Pt 1: Analysis of single contacts // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1985. V. 52. No. 1. P. 67-74.
4. Кравчук А. С. К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 2. С. 329-337.

5. Кузьменко В. И. О контактных задачах теории пластичности при сложном нагружении // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 473—481.
6. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир. 1979. 574 с.
7. Кузьменко В. И. Контактные задачи для упругопластической полосы при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 128—135.
8. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. мат. журн. 1954. Т. 6. № 3. С. 314—325.

Днепропетровск .

Поступила в редакцию
24.II.1986