

УДК 539.214

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ

ЗАДОЯН М. А.

Рассматривается упругопластическое состояние длинной толстостенной цилиндрической трубы, находящейся под совместным воздействием равномерно распределенных нормальных и касательных сил на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях, растягивающих осевых сил и крутящих моментов, приложенных на торцевых сечениях.

Решение аналогичной упругопластической задачи для трубы при внутреннем и внешнем давлении приведено в [1-4]. Предельное пластическое состояние цилиндрической трубы при различных внешних воздействиях исследовано в [5-10]<sup>1</sup>.

**1. Исходные уравнения и граничные условия.** Материал трубы принимается идеально пластическим, несжимаемым и удовлетворяющим соотношениям деформационной теории пластичности [1-5, 1, 2]. При осесимметричном деформировании эти соотношения в цилиндрических координатах состоят из дифференциальных уравнений равновесия, соотношений между компонентами деформаций и перемещений, условия пластичности Губера - Мизеса и соотношений между деформациями и напряжениями

$$\partial\sigma_r/\partial r + \partial\tau_{rz}/\partial z + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0 \quad (1.1)$$

$$\partial\tau_{r\theta}/\partial r + \partial\tau_{\theta z}/\partial z + 2\tau_{r\theta}/r = 0, \quad \partial\tau_{rz}/\partial r + \partial\sigma_z/\partial z + \tau_{rz}/r = 0$$

$$\varepsilon_r = \partial u/\partial r, \quad \varepsilon_\theta = u/r, \quad \varepsilon_z = \partial w/\partial z \quad (1.2)$$

$$2\gamma_{r\theta} = \partial v/\partial r - v/r, \quad 2\gamma_{\theta z} = \partial v/\partial z, \quad 2\gamma_{rz} = \partial u/\partial z + \partial w/\partial r$$

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{rz}^2) = 6 \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_r/(\sigma_r - \sigma) = \dots = \gamma_{r\theta}/\tau_{r\theta} = \dots = \lambda \quad (1.4)$$

Здесь компоненты напряжения отнесены к пластической постоянной  $k$ ,  $\lambda$  — в пластической зоне неизвестная функция координат, а в упругой принимает значение  $1/(2G)$ , где  $G$  — отнесенный к  $k$  модуль сдвига,  $\sigma$  — гидростатическое давление.

Ось  $z$  цилиндрической координатной системы совпадает с осью трубы так, что плоскость  $z=0$  проходит по срединному поперечному сечению. Положительное направление  $\theta$  считаем против вращения часовой стрелки (фиг. 1).

На внутренней  $r=a$  и внешней  $r=b$  цилиндрических поверхностях заданы соответственно значения внешних сил

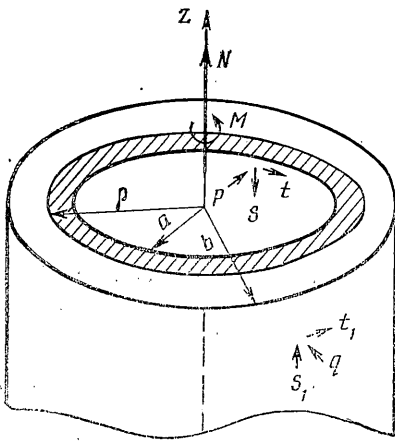
$$\sigma_r|_{r=a} = -p, \quad \sigma_r|_{r=b} = -q, \quad \tau_{rz}|_{r=a} = s \quad (1.5)$$

$$\tau_{rz}|_{r=b} = s_1, \quad \tau_{r\theta}|_{r=a} = t, \quad \tau_{r\theta}|_{r=b} = t_1$$

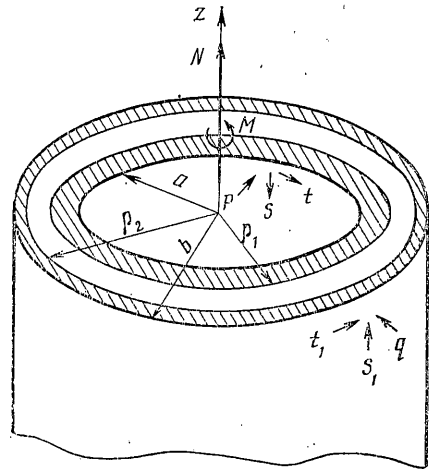
На торцевых сечениях  $z=\pm l$  приложены осевые растягивающие силы  $N$  и крутящие моменты  $M$ . Соответственно принимаем интегральные уравнения равновесия

$$2\pi \int_a^b \sigma_z r dr = N, \quad 2\pi \int_a^b \tau_{\theta z} r^2 dr = M \quad (1.6)$$

<sup>1</sup> В статье автора [10] допущены опечатки: фиг. 1 должна соответствовать фиг. 4 (и наоборот); фиг. 2 должна соответствовать фиг. 5 (и наоборот); на исправленной фиг. 2 деформируемая труба обозначается цифрой 2 вместо 1.



Фиг. 1



Фиг. 2

В зависимости от вклада крутящего момента в интенсивности внешних сил пластические деформации могут впервые появляться на внутренней или внешней поверхностях трубы. Полагаем, что при некотором уровне интенсивности внешних сил и сравнительно небольшом крутящем моменте с внутренней поверхности  $r=a$  трубы распространяется пластическая зона.

**2. Уругоупругое состояние трубы.** Исходя из характера деформирования трубы, полагаем, что тензор деформаций как в пластической, так и в упругой зоне не зависит от продольной координаты  $z$  и граничная поверхность между пластической и упругой зонами принимается цилиндрической, на которой следует соблюдать условия сопряжения решений двух соседних зон (Фиг. 1).

В пластической зоне ( $a \leq r \leq \rho$ ) компоненты напряжений и перемещений представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p + 2Ba^2 \int_a^r \frac{\omega}{r^3} dr, & \sigma_\theta &= \sigma_r + 2B \frac{a^2}{r^2} \omega \\ \sigma_z &= \sigma_r + (\sqrt{3}A + Ba^2/r^2) \omega, & \tau_{\theta z} &= Cr\omega/\rho \\ \tau_{zr} &= sa/r, & \tau_{r\theta} &= ta^2/r^2, & u &= -Ar/(2\sqrt{3}G) + Ba^2/(2Gr) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$v = \frac{Er}{G\rho} + \frac{Crz}{G\rho} - \frac{r}{G} \int_r^\rho \frac{\tau_{r\theta}}{\omega} \frac{dr}{r}, \quad w = \frac{D}{G} + \frac{Az}{\sqrt{3}G} - \frac{1}{G} \int_r^\rho \frac{\tau_{rz}}{\omega} dr$$

$$\omega = (1 - \tau_{rz}^2 - \tau_{r\theta}^2)^{1/2} (A^2 + B^2 a^4/r^4 + C^2 r^2/\rho^2)^{-1/2}$$

Здесь и дальше заглавные буквы латинского алфавита обозначают произвольные постоянные, а  $r=\rho$  — граничная между пластической и упругой зонами цилиндрическая поверхность, положение которой следует определить в зависимости от интенсивности внешних сил.

Выражения (2.1) удовлетворяют уравнениям теории пластичности (1.1) — (1.4) и граничным условиям (1.5) на внутренней поверхности трубы. В упругой зоне ( $\rho \leq r \leq b$ ) компоненты напряжений и перемещений можно представить в виде ( $v=a/b$ ):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} &= -q + B_1 \left( v^2 \mp \frac{a^2}{r^2} \right), & \sigma_z &= -q + \sqrt{3} A_1 + v^2 B_1 \\ \tau_{\theta z} &= C_1 r/\rho, & \tau_{rz} &= s_1 b/r, & \tau_{r\theta} &= t_1 b^2/r^2 \\ u &= -A_1 r/(2\sqrt{3}G) + B_1 a^2/(2Gr) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$v = E_1 r / G \rho + C_1 r z / G \rho - (1/2 t_1 r / G) (b^2 / r^2 - b^2 / \rho^2).$$

$$w = D_1 / G + A_1 z / (\sqrt{3} G) + (s_1 b / G) \ln (r / \rho)$$

Приведенные выражения (2.2) удовлетворяют уравнениям теории упругости (1.1), (1.2), (1.4) и граничным условиям (1.5) на внешней поверхности трубы.

Определяя неизвестные постоянные из граничных условий на внутренней поверхности и условий на торцах (1.6) при чисто упругом состоянии и вводя обозначения  $r = ax$ ,  $N = \pi (b^2 - a^2) n$ ,  $M = 1/2 \pi (b^4 - a^4) m / a$ , для интенсивности касательных напряжений получаем

$$\sigma_0 = \left\{ \frac{1}{3} \left( n - \frac{v^2 p - q}{1 - v^2} \right)^2 + m^2 x^2 + \frac{s^2}{x^2} + \left[ \frac{(p - q)^2}{(1 - v^2)^2} + t^2 \right] \frac{1}{x^4} \right\}^{1/2} \quad (2.3)$$

При  $m = 0$  имеем  $\sigma_0'(x) < 0$ , а при  $m \neq 0$  функция  $\sigma_0(x)$  имеет единственную точку экстремума  $x = x_*$ , в которой она принимает минимальное значение. Значение  $x_*$  можно представить в виде

$$x_* = 3^{-1/4} (s/m)^{1/2} \{ [\psi + (\psi^2 - 1)^{1/2}]^{1/3} +$$

$$+ [\psi - (\psi^2 - 1)^{1/2}]^{1/3} \}^{1/2} \quad (\psi > 1)$$

$$x_* = [2s \cos (1/3 \arccos \psi) / (\sqrt{3} m)]^{1/2} \quad (\psi \leq 1)$$

$$\psi = 3\sqrt{3} (m/s^3) [(p - q)^2 + (1 - v^2)^2 t^2] (1 - v^2)^{-2}$$

В случае  $m = 0$ , очевидно, пластическая зона начинается с внутренней поверхности трубы. При  $m \neq 0$  в зависимости от расположения точки  $x = x_*$  пластические деформации могут начинаться как с внутренней, так и с внешней поверхности трубы. Видно, что исключается возможность начала пластических деформаций с промежуточных ( $1 < x < b/a$ ) поверхностей трубы.

Когда внутренняя поверхность трубы переходит в пластическое состояние, из (2.3) находим зависимость между внешними силами

$$(p_0 - q_0)^2 / (1 - v^2)^2 + t_0^2 + s_0^2 + m_0^2 + 1/3 [n_0 - (v^2 p_0 - q_0) / (1 - v^2)]^2 = 1 \quad (2.4)$$

В случае, когда пластическая зона начинается на внешней поверхности трубы, будем иметь

$$v^4 (p_0 - q_0)^2 / (1 - v^2)^2 + v^4 t_0^2 + v^2 s_0^2 + m_0^2 / v^2 +$$

$$+ 1/3 [n_0 - (v^2 p_0 - q_0) / (1 - v^2)]^2 = 1 \quad (2.5)$$

Уравнения шестимерной поверхности (2.4), (2.5) описывают предельные упругие состояния трубы, после чего труба переходит в упругопластическое состояние.

На поверхности  $r = \rho$  необходимо выполнение условия сопряжения решений двух зон. Из условий непрерывности перемещения следует

$$A_1 = A, \quad B_1 = B, \quad C_1 = C, \quad D_1 = D, \quad E_1 = E \quad (2.6)$$

а из непрерывности нормального и касательных напряжений на поверхности  $r = \rho$  будем иметь

$$p - q = B \left( \frac{a^2}{\rho^2} - v^2 \right) + 2Ba^2 \int_a^\rho \frac{\omega}{r^3} dr \quad (2.7)$$

$$s_1 = vs, \quad t_1 = v^2 t \quad (2.8)$$

Из условий непрерывности интенсивности касательных напряжений находим уравнение

$$A^2 + B^2 a^4 / \rho^4 + C^2 = 1 - \tau_{\theta\theta}^2(\rho) - \tau_{r\theta}^2(\rho) \quad (2.9)$$

Отсюда, определяя  $B$  и подставляя в выражения (2.1) для напряжений и перемещений в пластической зоне ( $a \leq r \leq \rho$ ), получим

$$\sigma_r = -p + 2Q \int_a^r \frac{\Omega}{r} dr, \quad \sigma_\theta = \sigma_r + 2Q\Omega \quad (2.10)$$

$$\sigma_z = \sigma_r + (\sqrt{3}Ar^2/\rho^2 + Q)\Omega, \quad \tau_{\theta z} = Cr^3\Omega/\rho^3$$

$$\tau_{zr} = sa/r, \quad \tau_{r\theta} = ta^2/r^2, \quad u = -Ar/(2\sqrt{3}G) + Q\rho^2/(2Gr).$$

$$v = \frac{Er}{G\rho} + \frac{Crz}{G\rho} - \frac{\rho^2 r}{G} \int_r^\rho \frac{\tau_{r\theta}}{\Omega} \frac{dr}{r^3}, \quad w = \frac{D}{G} + \frac{Az}{\sqrt{3}G} - \frac{\rho^2}{G} \int_r^\rho \frac{\tau_{rz}}{\Omega} \frac{dr}{r^2}$$

где введены функции

$$Q(\rho) = [1 - \tau_{rz}^2(\rho) - \tau_{r\theta}^2(\rho) - A^2 - C^2]^{1/2} \quad (2.11)$$

$$\Omega(r, \rho) = [1 - \tau_{rz}^2(r) - \tau_{r\theta}^2(r)]^{1/2} [1 - \tau_{rz}^2(\rho) - \tau_{r\theta}^2(\rho) - A^2(1 - r^4/\rho^4) - C^2(1 - r^6/\rho^6)]^{-1/2} \quad (2.12)$$

В упругой зоне ( $\rho \leq r \leq b$ ), учитывая (2.6), (2.8) и исключая  $B$ , из (2.2) находим

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} = -q + Q \left\{ \begin{array}{l} \rho^2 \\ b^2 \mp r^2 \end{array} \right\}$$

$$\sigma_z = -q + \sqrt{3}A + Q\rho^2/b^2, \quad \tau_{\theta z} = Cr/\rho, \quad \tau_{rz} = sa/r$$

$$\tau_{r\theta} = ta^2/r^2, \quad u = -Ar/(2\sqrt{3}G) + \rho^2 Q/(2Gr).$$

$$v = Er/G\rho + Grz/G\rho - (1/2tr/G)(a^2/r^2 - a^2/\rho^2) \quad (2.13)$$

$$w = D/G + Az/(\sqrt{3}G) + (sa/G) \ln(r/\rho)$$

После исключения  $B$  уравнение (2.7) запишется в виде

$$\frac{p-q}{Q(\rho)} = 1 - \frac{\rho^2}{b^2} + 2 \int_a^\rho \frac{\Omega(r, \rho)}{r} dr \quad (a \leq \rho \leq b) \quad (2.14)$$

Условие на торцах для нормальных сил переписется в виде

$$\int_a^\rho \sigma_z r dr + \int_\rho^b \sigma_z r dr = \frac{N}{2\pi}$$

Подставляя сюда соответствующие выражения для  $\sigma_z$  в пластической и упругой зонах, производя интегрирование по частям в полученном двукратном интеграле и используя (2.14), приходим к уравнению

$$A \left[ b^2 - \rho^2 + \frac{2}{\rho^2} \int_a^\rho \Omega(r, \rho) r^3 dr \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{N}{\pi} - \rho a^2 + qb^2 \right) \quad (2.15)$$

Аналогичным образом из второго условия (1.6) находим

$$C \left[ b^4 - \rho^4 + \frac{4}{\rho^2} \int_a^\rho \Omega(r, \rho) r^5 dr \right] = \frac{2\rho}{\pi} M \quad (2.16)$$

Уравнения (2.14)–(2.16) определяют значения параметров  $A$ ,  $C$  и  $\rho$ . Определив численным способом эти параметры, можно найти компоненты напряжений в пластической и упругой зонах. Перемещения определяются с точностью постоянных  $D$  и  $E$ :

3. Двухстороннее пластическое состояние. Пусть при  $\rho = \rho_0$  внешняя поверхность трубы  $r = b$  переходит в пластическое состояние и при дальнейшем увеличении интенсивности внешних сил возникает и распространяется вовнутрь вторая зона пластических деформаций (фиг. 2). Радиусы внутренней и внешней пластических зон обозначим соответственно  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Во внутренней пластической зоне  $a \leq r \leq \rho_1$  имеем

$$\sigma_r = -p + 2Q(\rho_1) \int_a^r \frac{\Omega(r, \rho_1)}{r} dr, \quad \sigma_\theta = \sigma_r + 2Q(\rho_1) \Omega(r, \rho_1)$$

$$\sigma_z = \sigma_r + [\sqrt{3}Ar^2/\rho_1^2 + Q(\rho_1)] \Omega(r, \rho_1), \quad \tau_{\theta z} = Cr^3 \Omega(r, \rho_1) / \rho_1^3$$

$$\tau_{rz} = sa/r, \quad \tau_{r\theta} = ta^2/r^2, \quad u = -Ar/(2\sqrt{3}G) + \rho_1^2 Q(\rho_1) / (2Gr)$$

$$v = \frac{Er}{G\rho_1} + \frac{Crz}{G\rho_1} - \frac{\rho_1^2 r}{G} \int_r^{\rho_1} \frac{\tau_{r\theta}}{\Omega(r, \rho_1) r^3} dr$$

$$w = \frac{D}{G} + \frac{Az}{\sqrt{3}G} - \frac{\rho_1^2}{G} \int_r^{\rho_1} \frac{\tau_{rz}}{\Omega(r, \rho_1) r^2} dr$$

В упругой зоне ( $\rho_1 \leq r \leq \rho_2$ ) находим

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} = -p + 2Q(\rho_1) \int_a^{\rho_1} \frac{\Omega(r, \rho_1)}{r} dr + Q(\rho_1) \left( 1 \mp \frac{\rho_1^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_z = \sigma_r + \sqrt{3}A + Q(\rho_1) \rho_1^2 / r^2, \quad \tau_{\theta z} = Cr/\rho_1, \quad \tau_{rz} = sa/r$$

$$\tau_{r\theta} = ta^2/r^2, \quad u = -Ar/(2\sqrt{3}G) + \rho_1^2 Q(\rho_1) / (2Gr)$$

$$v = Er/(G\rho_1) + Cz/(G\rho_1) - (1/2)tr/G (a^2/r^2 - a^2/\rho_1^2)$$

$$w = D/G + Az/\sqrt{3}G + (sa/G) \ln(r/\rho_1)$$

Во внешней пластической зоне ( $\rho_2 \leq r \leq b$ ) будем иметь

$$\sigma_r = -q - 2Q(\rho_1) \int_r^b \frac{\Omega(r, \rho_1)}{r} dr, \quad \sigma_\theta = \sigma_r + 2Q(\rho_1) \Omega(r, \rho_1)$$

$$\sigma_z = \sigma_r + [\sqrt{3}Ar^2/\rho_1^2 + Q(\rho_1)] \Omega(r, \rho_1)$$

$$\tau_{\theta z} = Cr^3 \Omega(r, \rho_1) / \rho_1^3, \quad \tau_{rz} = sa/r$$

$$\tau_{r\theta} = ta^2/r^2, \quad u = -Ar/(2\sqrt{3}G) + \rho_1^2 Q(\rho_1) / (2Gr)$$

$$v = \frac{Er}{G\rho_1} + \frac{Crz}{G\rho_1} - \frac{tr}{2G} \left( \frac{a^2}{\rho_2^2} - \frac{a^2}{\rho_1^2} \right) + \frac{\rho_1^2 r}{G} \int_{\rho_2}^r \frac{\tau_{r\theta}}{\Omega(r, \rho_1) r^3} dr$$

$$w = \frac{D}{G} + \frac{Az}{\sqrt{3}G} + \frac{sa}{G} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\rho_1^2}{G} \int_{\rho_2}^r \frac{\tau_{rz}}{\Omega(r, \rho_1) r^2} dr$$

$$A = \left\{ 1 - a^2 \left[ s^2 + \frac{C^2}{a^2 \rho_1^2} (\rho_1^4 + \rho_1^2 \rho_2^2 + \rho_2^4) \right] (\rho_1^2 + \rho_2^2)^{-1} \right\}^{1/2}$$

Для определения значений параметров  $C$ ,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  получается система из трех уравнений

$$\frac{p-q}{Q(\rho_1)} = 1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} + 2 \int_a^{\rho_1} \frac{\Omega(r, \rho_1)}{r} dr + 2 \int_{\rho_2}^b \frac{\Omega(r, \rho_2)}{r} dr$$

$$A \left[ \rho_2^2 - \rho_1^2 + \frac{2}{\rho_1^2 a} \int_a^{\rho_1} \Omega(r, \rho_1) r^3 dr + \frac{2}{\rho_1^2 \rho_2} \int_a^b \Omega(r, \rho_1) r^3 dr \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{N}{\pi} - pa^2 + qb^2 \right),$$

$$C \left[ \rho_2^4 - \rho_1^4 + \frac{4}{\rho_1^2} \int_a^{\rho_1} \Omega(r, \rho_1) r^5 dr + \frac{4}{\rho_1^2 \rho_2} \int_a^b \Omega(r, \rho_1) r^5 dr \right] = \frac{2\rho_1}{\pi} M$$

Из промежуточных выкладок следует тождество  $\Omega(\rho_2, \rho_1) = \rho_1^2 / \rho_2^2$ .

4. Совместное действие внутреннего давления, крутящего момента и осевой силы. В формулах (2.10) — (2.16) в этом случае нагружения следует положить  $s=t=q=E=D=0$ . Принимая также для осевой силы выражение  $N = \pi a^2 p$ , из (2.11), (2.12), (3.1), будем иметь  $A=0$ ,  $Q = (1-C)^{1/2}$ ,  $\Omega = (1-C^2 + C^2 r^6 / \rho^6)^{-1/2}$ . В пластической зоне ( $a \leq r \leq \rho$ ), вычисляя значение интеграла в правой части выражения для  $\sigma_r$  из (2.10), будем иметь

$$\sigma_r = -p + 2 \ln(r/a) - 2/3 \ln \left\{ [Q + (Q^2 + C^2 r^6 / \rho^6)^{1/2}] / [Q + (Q^2 + C^2 a^6 / \rho^6)^{1/2}] \right\}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + 2Q\Omega, \quad \sigma_z = \sigma_r + Q\Omega, \quad \tau_{\theta z} = Cr^3 \Omega / \rho^3$$

$$u = \rho^2 Q / (2Gr), \quad v = Crz / (G\rho), \quad \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = w = 0$$

В упругой зоне ( $\rho \leq r \leq b$ ) находим

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} = Q \left( \frac{\rho^2}{b^2} \mp \frac{\rho^2}{r^2} \right), \quad \sigma_z = Q \frac{\rho^2}{b^2}, \quad \tau_{\theta z} = C \frac{r}{\rho}$$

$$u = \rho^2 Q / (2Gr), \quad v = Crz / G\rho, \quad \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = w = 0$$

Уравнение (2.14) примет вид

$$p = 2 \ln(\rho/a) + Q(1 - \rho^2/b^2) - 2/3 \ln \left\{ (1+Q) / [Q + (Q^2 + C^2 a^6 / \rho^6)^{1/2}] \right\} \quad (4.1)$$

Из (2.16) приходим к кубическому уравнению относительно  $C$ :

$$\left( \frac{b^4}{\rho^4} - 1 \right)^2 C^3 - \frac{2(1-\nu^4)}{\nu} \left( \frac{b^4}{\rho^4} - 1 \right) \frac{b^3}{\rho^3} m C^2 + \frac{16}{9} \left[ 1 - \frac{a^6}{\rho^6} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \left( \frac{b^4}{\rho^4} - 1 \right) + \frac{9}{16} \frac{(1-\nu^4)^2}{\nu^2} \frac{b^6}{\rho^6} m^2 \right] C - \frac{8}{3} \frac{1-\nu^4}{\nu} \frac{b^3}{\rho^3} m = 0 \quad (4.2)$$

Система уравнений (4.1), (4.2) определяет  $C$  и  $\rho$  в зависимости от  $p$  и  $m$ .

5. Совместное действие нормальных и окружных касательных сил. Примем  $s=m=A=C=D=0$ ,  $N = \pi(pa^2 - qb^2)$ . Вводя обозначение  $\tau_{r\theta} = \tau(r)$  и вычисляя значения интегралов из (2.10) — (2.12) в пластической зоне ( $a \leq r \leq \rho$ ) (фиг. 3) будем иметь

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} = -p + 2 \ln \frac{r}{a} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{1 + \sqrt{1 - t^2}} \mp \sqrt{1 - \tau^2} + \sqrt{1 - t^2}$$

$$\sigma_z = \sigma_r + (1 - \tau^2)^{1/2}, \quad \tau = ta^2 / r^2 \quad (5.1)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = w = 0, \quad u = \rho^2 [1 - \tau^2(\rho)]^{1/2} / (2Gr)$$

$$v = Er / (G\rho) - r [1 - \tau^2(\rho)]^{1/2} \{ [1 - \tau^2(\rho)]^{1/2} - (1 - \tau^2)^{1/2} \} / [2G\tau(\rho)]$$

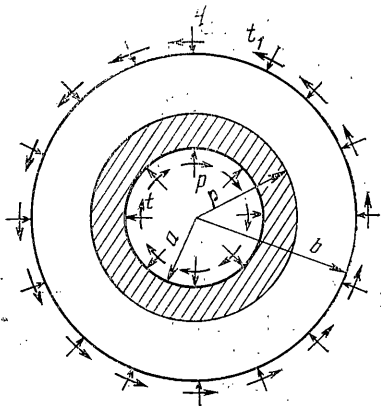
В упругой зоне ( $\rho \leq r \leq b$ ) получается

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} = -q + \sqrt{1 - \tau^2(\rho)} \left( \frac{\rho^2}{b^2} \mp \frac{\rho^2}{r^2} \right), \quad \tau = t \frac{a^2}{r^2}$$

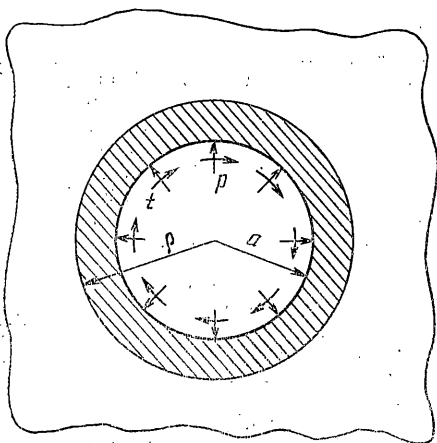
$$\sigma_z = -q + \rho^2 [1 - \tau^2(\rho)]^{1/2} / b^2, \quad \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = w = 0$$

$$u = \rho^2 [1 - \tau^2(\rho)]^{1/2} / (2Gr) \quad (5.2)$$

$$v = Er / (G\rho) + 1/2 (tr/G) (a^2 / \rho^2 - a^2 / r^2)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Из (2.14) приходим к уравнению, определяющему зависимость между  $\rho$  и внешними силами  $p$ ,  $q$  и  $t$ :

$$p - q = 2 \ln \frac{\rho}{a} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}(\rho)}{1 + \sqrt{1 - t^2}} + \frac{\rho^2}{b^2} \sqrt{1 - \tau^2}(\rho) \quad (5.3)$$

При  $t=0$  из (5.1)–(5.3) следуют соответствующие формулы для упругопластического состояния цилиндрической трубы под действием внутреннего и внешнего давлений [1–4].

Из полученных формул предельным переходом можно получить решение задачи об упругопластическом состоянии вокруг круговой полости в бесконечной среде (фиг. 4). Полагая  $q=0$ ,  $E = -ta^2/(2\rho)$  при  $b \rightarrow \infty$  из (5.1)–(5.3) получим

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} &= -p + 2 \ln \frac{r}{a} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{1 + \sqrt{1 - t^2}} + \sqrt{1 - t^2} \mp \sqrt{1 - \tau^2} \\ \sigma_z &= \sigma_r + (1 - \tau^2)^{1/2}, \quad \tau = ta^2/r^2, \quad \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = w = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$u = \rho^2 [1 - \tau^2(\rho)]^{1/2} / (2Gr), \quad v = -1/2 r \tau(\rho) / G - r [1 - \tau^2(\rho)]^{1/2} \{ [1 - \tau^2(\rho)]^{1/2} - (1 - \tau^2)^{1/2} \} / [2G\tau(\rho)] \quad (a \leq r \leq \rho)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} &= \mp \sqrt{1 - \tau^2}(\rho) \frac{\rho^2}{r^2}, \quad \tau = \frac{ta^2}{r^2}, \quad \sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = w = 0 \\ u &= \rho^2 [1 - \tau^2(\rho)]^{1/2} / (2Gr), \quad v = -ta^2 / (2Gr) \quad (r \geq \rho) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Граница между пластической и упругой зонами определяется уравнением

$$\rho/a = \{ \text{ch}[p - (1 - t^2)^{1/2}] + (1 - t^2)^{1/2} \text{sh}[p - (1 - t^2)^{1/2}] \}^{1/2} \quad (5.6)$$

Принимая  $\rho=a$  и  $\rho=b$ , из (4.1), (4.2) и (5.3) получим зависимости внешних сил для предельного упругого и предельного пластического состояния. Для случая полости предельное упругое состояние описывается окружностью единичного радиуса  $\rho_0^2 + t_0^2 = 1$ .

Пластическое состояние вокруг круговой полости впервые исследовано в [13], а соответствующая упругопластическая задача рассмотрена в [14]. Однако из-за приближенного удовлетворения граничных условий в [14] полученные там окончательные формулы не совпадают с формулами (5.4)–(5.6).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. шк. 1969. 608 с.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат. 1956. 407 с.
3. Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. Изд-во иностр. лит. 1956. 398 с.

4. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение. 1975. 398 с.
5. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука. 1966. 231 с.
6. *Zyczkowski M.* The limit load of a thick-walled tube in a general circularly symmetrical case // Arch. Mech. Stosow. 1956. Т. 8. No. 2. S. 155—178.
7. *Ивлев Д. Д.* Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1958. Т. 123. № 6. С. 988—990.
8. *Paparelli J. E., Hodge P. G. Jr.* Interaction of pressure, end load, and twisting moment for a rigid-plastic circular tube // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1963. V. 30. No. 3. P. 396—400.
9. *Задоян М. А.* Об одном частном решении уравнений теории идеальной пластичности // Докл. АН АрмССР. 1964. Т. 39. № 5. С. 265—269.
10. *Задоян М. А.* Внедрение жесткого цилиндрического тела в идеально пластическую трубу // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 98—108.
11. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука. 1976. 573 с.
12. *Ключников В. Д.* Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ. 1979. 207 с.
13. *Nadai A.* Uber die Gleit und Verzweigungsflächen einiger Gleichgewichtszustandsbildsamer Massen und die Nachspannungen bleibend verzerrten Körper // Z. Phys. 1924. V. 30. H. 2. S. 106—138.
14. *Михлин С. Г.* Основные уравнения математической теории пластичности. Л.: Изд-во АН СССР. 1934. 71 с.

Ереван

Поступила в редакцию  
11.VIII.1986