

УДК 539.214

РЕШЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ЛОКАЛЬНО ПОДВИЖНОЙ СЕТКИ

ГАСАНОВ А. И., ЕФИМОВ А. Б.

Известно [1], что в естественной постановке задача о внедрении жесткого выпуклого штампа в деформируемое твердое тело приводится к краевой задаче для системы эллиптических уравнений, где часть краевых условий задана в виде неравенств. Обобщенное решение последней задачи удовлетворяет некоторому интегральному неравенству, которое и называется вариационным неравенством. В настоящее время для численного решения вариационных неравенств используются методы нелинейного программирования [2]. При решении же контактных задач среди методов нелинейного программирования наиболее эффективными оказываются алгоритмы типа Эрроу — Гурвица — Удзавы [3]. Однако все известные сеточные методы позволяют определить границу области контакта с точностью до шага выбранной сетки. Это означает, что получение удовлетворительных результатов на сравнительно грубых сетках становится затруднительным, так как из результатов численного эксперимента [4] следует, что допущенные погрешности при нахождении границы области контакта существенно влияют на значения контактного давления вблизи границы области контакта. Следует добавить, что даже для двумерных задач на грубых сетках расчет проводится на пределе ресурсов отечественных ЭВМ.

Прежде всего отметим, что основной трудностью при решении контактных задач является нахождение неизвестной области контакта. Только после ее определения можно иметь дело со смешанной краевой задачей, где все краевые условия заданы в виде равенств. В работе [5] на примере эллиптических вариационных неравенств изложен метод аппроксимации вариационных неравенств интегральными тождествами. Используя эту идею, в данной работе предлагается итерационный метод локально подвижной сетки решения упругопластических контактных задач. Суть метода состоит в том, что строится итерационный алгоритм отыскания неизвестной области контакта, на каждом шаге решается интегральное тождество и граница области контакта уточняется перестройкой сетки. В отличие от методов нелинейного программирования предлагаемый метод более естественно учитывает специфику контактных задач и позволяет решать их на ЭВМ с использованием существенно меньших ресурсов (памяти и времени). В частности, предлагаемые алгоритмы оказываются эффективными при решении обратных задач диагностики упругопластической среды [6], где процесс решения серии контактных задач является промежуточным.

Метод основан на конечноэлементной аппроксимации исходной задачи с использованием однородных конечных элементов.

1. Постановка задачи. Пусть упругопластическое деформируемое тело занимает область $\Omega \subset R_3$ с кусочно-гладкой границей Γ и подвергается воздействию выпуклого гладкого жесткого штампа, действующего по направлению внутренней нормали $N = (n_1, n_2, n_3)$ к Γ . Предположим, что Γ состоит из объединения открытых непересекающихся множеств $\Gamma_0, \Gamma_u, \Gamma_\sigma$, где Γ_0 — область возможного контакта тела со штампом. Если кривизна штампа не меньше кривизны Γ_0 , то односторонняя краевая задача формулируется следующим образом (см., например, [1, 3]): найти решение системы уравнений

$$\partial \sigma_{ij} / \partial x_j + F_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad x \in \Omega \quad (1.1)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(s) = 0, \quad s \in \Gamma_u \quad (1.2)$$

$$\sigma_{ij}(u) n_j = f_i, \quad s \in \Gamma_\sigma \quad (1.3)$$

$$u_N(s) \leq -\alpha + \varphi(s) - \psi(s), \quad \sigma_N(u) \geq 0 \quad (1.4)$$

$$\sigma_N(u) [u_N(s) + \alpha - \varphi(s) + \psi(s)] = 0, \quad s \in \Gamma_0$$

Если между телом и штампом отсутствует трение, то

$$\sigma_T(u) = 0, \quad s \in \Gamma_0 \quad (1.5)$$

здесь σ_N, σ_T — нормальная и тангенциальная составляющие напряжения σ_{ij} на границе, u_N — нормальная составляющая вектора перемещения $u = (u_1, u_2, u_3)$, $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ — уравнения поверхностей штампа и тела соответственно, $\alpha > 0$ — глубина внедрения, а $F = (F_1, F_2, F_3)$ и $f = (f_1, f_2, f_3)$ — вектора массовых и поверхностных сил.

Рассматривается деформационная теория пластичности без разгрузок [7] и между компонентами тензора деформаций и напряжений имеет место зависимость

$$\sigma_{ij}(u) = \lambda \Theta(u) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u) - 2\mu w(e_u) [\varepsilon_{ij}^{-1/3} \Theta(u) \delta_{ij}] \quad (1.6)$$

где λ, μ — константы Ламе, $\Theta(u) = \varepsilon_{ii}(u)$, а $w(e_u)$ — функция интенсивности деформаций [7].

Задача (1.1)–(1.5) является нелинейной даже в случае линейно-упругого тела, так как наряду с неизвестным полем перемещений подлежит определению и неизвестная часть границы — область контакта $\Gamma_c = \{s \in \Gamma_0 | u_N(s) = -\alpha + \varphi(s) - \psi(s)\}$. Только после определения неизвестной границы Γ_c вместо краевых условий (1.4) будем иметь

$$\sigma_N(u) = 0, \quad s \in \Gamma_0 \setminus \Gamma_c \quad (1.7)$$

$$u_N(s) = -\alpha + \varphi(s) - \psi(s), \quad s \in \Gamma_c \quad (1.8)$$

Для определения Γ_c имеем следующие условия:

$$u_N(s) < -\alpha + \varphi(s) - \psi(s), \quad s \in \Gamma_0 \setminus \Gamma_c \quad (1.9)$$

$$\sigma_N(u) \geq 0, \quad s \in \Gamma_c \quad (1.10)$$

Определение 1. Пара $\langle \Gamma_c, u^0 \rangle$ называется решением односторонней задачи (1.1)–(1.5), если для нее выполняются краевые условия (1.2)–(1.3) (1.5), (1.7)–(1.8) и условия (1.9)–(1.10).

Следуя [1], определим обобщенное решение задачи (1.1)–(1.5). Для этого введем выпуклое замкнутое множество допустимых перемещений

$$K = \{u \in H^{01}(\Omega) | u_N(s) \leq -\alpha + \varphi(s) - \psi(s), s \in \Gamma_0\} \quad (1.11)$$

где $H^{01}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) | u(s) = 0, s \in \Gamma_u\}$, а $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева [1], и определим функционал

$$J(u) = 0,5(Au, u) - b(u) \quad (1.12)$$

$$(Au, v) = \int_{\Omega} \int \int \left\{ \left[\lambda + \frac{2}{3} \mu w(e_u) \right] \Theta(u) \Theta(v) + 2[1 - w(e_u)] \mu \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) \right\} dx \quad (1.13)$$

$$b(u) = \int_{\Omega} \int \int Fu dx + \int_{\Gamma_0} \int fu dx \quad (1.14)$$

При $w(e_u) = 0$ форма (1.13) является билинейной и соответствует упругому случаю. Эту форму обозначим $(A_0 u, v)$.

В [3] показано, что при условии строгой вогнутости и монотонности функции

$$\Phi(e_u) = 3\mu[1 - w(e_u)] \quad (1.15)$$

функционал (1.12) будет строго выпуклым и коэрцитивным. Следовательно, решение задачи (1.1)–(1.5) будет доставлять минимум функционалу

(1.15) на K Этот же минимизирующий элемент является решением вариационного неравенства

$$\exists u \in K (Au, v-u) \geq b(v-u), \quad \forall v \in K \quad (1.16)$$

2. Аппроксимация односторонних задач в бесконечномерном случае. Введем последовательность измеримых множеств $\{\Gamma_m\}$, $m=1, 2, 3, \dots$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\forall m \Gamma_c \subset \Gamma_m \subset \Gamma_0; \quad \forall m \Gamma_{m+1} \subset \Gamma_m; \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ mes}(\Gamma_{n_0} \setminus \Gamma_c) < \varepsilon \quad (2.1)$$

где mes — длина части достаточно гладкой кривой Γ_0 .

Для каждой области Γ_m определим множество

$$K_m = \{u \in H^1(\Omega) \mid u_N(s) = -\alpha + \varphi(s) - \psi(s), \quad s \in \Gamma_m\}$$

а краевые условия (1.8)–(1.9) заменим условиями на Γ_m :

$$u_N(s) = -\alpha + \varphi(s) - \psi(s), \quad s \in \Gamma_m \quad (2.2)$$

$$\sigma_N(u) = 0, \quad s \in \Gamma_0 \setminus \Gamma_m \quad (2.3)$$

Определение 2. Решение краевой задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (2.2)–(2.3) назовем приближенным решением исходной задачи (1.1)–(1.5) и обозначим $u^{(m)}(x)$.

Из п. 1 следует, что приближенное решение $u^{(m)}(x)$ также будет решением задачи минимизации

$$\exists u^{(m)} \in K_m J(u^{(m)}) = \min J(v), \quad \forall v \in K_m \quad (2.4)$$

или вариационного неравенства

$$\exists u^{(m)} \in K_m (Au^{(m)}, v-u^{(m)}) \geq b(v-u^{(m)}), \quad \forall v \in K_m \quad (2.5)$$

Задача (1.16) соответствует исходной односторонней задаче, задача (2.5) — смешанной задаче, где краевые условия заданы в виде равенств.

Для аппроксимации задачи (1.16) последовательностью задач (2.5) используем методику [5].

В силу условий (2.1) для $\forall m$ имеем $K_m \subset K_{m+1} \subset K$. Принимая во внимание третье условие (2.1), естественно предположить, что множество $\cup K_m$ плотно в K . Тогда из очевидного свойства $J(u^{(m)}) \geq J(u^{(m+1)}) \geq J(u^0)$ следует

Лемма 1. Пусть выполнены условия (2.1). Тогда при $w(e_u) = 0$ последовательность $\{J(u^{(m)})\}$ является монотонно убывающей и сходится к $J(u^0)$ при $m \rightarrow \infty$. Таким образом, последовательность $\{u^{(m)}\}$ является минимизирующей.

Докажем сходимость приближенного решения $u^{(m)}(x)$ к решению вариационного неравенства $\exists u^0 \in K (Au^0, v-u^0) \geq b(v-u^0), \forall v \in K$.

Для этого сначала отметим, что для линейного оператора имеет место соотношение $(A_0(u^0 - u^{(m)}), u^0 - u^{(m)}) = \min_{v_m \in K_m} (A_0(u^0 - v_m), u^0 - v_m)$. Отсюда с учетом плотности множества $\cup K_m$ в K следует

Теорема 1. Пусть выполняются условия (2.1). Тогда при $w(e_u) = 0$ последовательность приближенных решений монотонно сходится к обобщенному решению односторонней задачи (1.1)–(1.5) в норме пространства $H^1(\Omega)$.

Таким образом, в случае линейного оператора A_0 имеет место некоторая аппроксимация контактных задач с помощью линейных смешанных задач, для решения которых можно применять известные сеточные методы. Среди них наиболее эффективным является метод конечных элементов.

Допустим теперь, что $w(e_u) \neq 0$. Уравнение (1.1) запишем в виде

$$-(\lambda + \mu) \text{grad div } u - \mu \Delta u = -F + 2\mu \text{div}(w(e_u)e^D) \quad (2.6)$$

где e^D — девиатор деформаций [7]. Запись уравнения (1.1) в форме (2.6) позволяет применять метод упругих решений для решения упругопластической односторонней задачи. При этом на каждом шаге решается упругая задача с различными правыми частями, следовательно, на каждой итера-

ции результаты леммы 1 и теоремы 1 остаются в силе. Сходимость метода упругих решений обеспечивается условием $1 > e_u \partial w / \partial e_u > w \geq 0$. При этом на каждом упругопластическом состоянии краевые условия фиксируются.

3. Метод локально подвижной сетки. Основной трудностью при решении односторонних краевых задач является отыскание неизвестной области контакта и локализация ее границы между узлами сетки недостаточно на реальных сетках. Следовательно, при численном решении контактных задач расчетная сетка должна учитывать эту особенность. Основным моментом в предлагаемом методе как раз является это обстоятельство. Изложим его для плоских и осесимметричных задач.

Пусть Γ_m^h — дискретный аналог априори заданной (возмущенной) неизвестной границы Γ_m . Тогда имеем (см. [4]):

$$\sigma_N^h(\partial\Gamma_m^h) > 0 \text{ при } \Gamma_m^h \subset \Gamma_c \quad (3.1)$$

$$\sigma_N^h(\partial\Gamma_m^h) < 0 \text{ при } \Gamma_c \subset \Gamma_m^h \quad (3.2)$$

где σ_N^h — сеточная аппроксимация σ_N . На границе же области контакта тела с гладким штампом выполняется условие $\sigma_N(\partial\Gamma_c) = 0$.

Дискретный аналог задачи (2.4) с априори заданной неизвестной границей Γ_m^h назовем задачей (P_m^h) и построим следующий итерационный процесс. Задается начальное приближение Γ_1^h (пересечение Γ_1^h и Γ_c не пусто) и решается задача (P_1^h) . После вычисления σ_N^h проверяются условия (3.1) — (3.2). Если выполняется условие (3.1), то очередная итерация определяется следующим образом: $\Gamma_2^h \supset \Gamma_1^h$. Если же выполняется условие (3.2), то $\Gamma_2^h \subset \Gamma_1^h$. Далее решается задача (P_2^h) с заданной Γ_2^h и так далее. Итерационный процесс останавливается тогда, когда соответствующие граничные точки $x_m \in \partial\Gamma_m^h$, $x_{m+1} \in \partial\Gamma_m^h$ двух последовательных итераций Γ_m^h , Γ_{m+1}^h являются соседними и $x_c \in (x_m, x_{m+1})$ (либо $x_c \in (x_{m+1}, x_m)$, если $x_{m+1} < x_m$), где $x_c \in \partial\Gamma_c$. Очевидно, такой процесс сходится линейно и позволяет находить неизвестную границу с точностью до выбранного заранее шага сетки. Для дальнейшего уточнения неизвестной границы с одновременным ускорением процесса итерации предлагается алгоритм, использующий подвижную сетку.

Пусть $\langle \Gamma_m^h, u_h^{(m)} \rangle$, $\langle \Gamma_{m+1}^h, u_h^{(m+1)} \rangle$ — две последовательные итерации, для которых выполнены условия $\sigma_N^h(u^{(m)}) = -\delta_m < 0$ на $x_m \in \partial\Gamma_m^h$; $\sigma_N^h(u^{(m+1)}) = -\delta_{m+1} > 0$ на $x_{m+1} \in \partial\Gamma_{m+1}^h$.

Это означает, что $x_{m+1} \in \Gamma_c$, $x_m \in \Gamma_c$. Тогда либо $x_c \in (x_m, x_{m+1})$, либо $x_c \in (x_{m+1}, x_m)$. В первом случае очередная итерация для x_c определяется следующим образом: $x_{m+2} = \alpha x_m + (1-\alpha)x_{m+1}$, а во втором — $x_{m+2} = \alpha x_{m+1} + (1-\alpha)x_m$, где $\alpha \in (0, 1)$ — скалярный параметр, значение которого определяется из условия $\sigma_N(u^{(m+2)}) = 0$ при $x = x_{m+2}$. Последнее условие нелинейно и с достаточной точностью аппроксимируется, как можно показать, соотношением $-\alpha\delta_m + (1-\alpha)\delta_{m+1} = 0$. Отсюда $\alpha = \delta_2 / (\delta_1 + \delta_2)$. После нахождения граничных точек Γ_{m+2}^h сетка перестраивается так, чтобы граничные точки Γ_{m+2}^h являлись узлами новой сетки и общее количество узлов сетки не менялось.

Такую сетку будем называть локально подвижной. После определения сетки задача (P_{m+2}^h) с заданной итерацией Γ_{m+2}^h решается на новой сетке. При необходимости сетка перестраивается снова. Итерационный процесс останавливается тогда, когда $|\sigma_N^h(\Gamma_m^h)| < \epsilon$, где $\epsilon > 0$ — заранее заданная точность. При таком подходе точность решения односторонних задач существенно зависит от точности вычисления нормальных напряжений σ_N на $\partial\Gamma_m^h$. Для достижения разумной точности рекомендуется ввести новую сетку так, чтобы в окрестности $\partial\Gamma_m^h$ шаги сетки являлись равномерными.

4. Однородные конечные элементы. Реализация краевых условий. При численной реализации односторонних задач методом конечных элементов проблема формирования глобальной матрицы жесткости [8], удовлетворяющей неоднородным краевым условиям, является одной из сложных,

В данном случае она осложняется еще тем, что в процессе решения задачи количество узлов сетки, в которых задано неоднородное краевое условие, меняется. Одним из удачных путей решения этой проблемы в литературе является использование множителей Лагранжа [2, 3]. Здесь граничные условия вводятся непосредственно в матричное уравнение системы. Хотя достоинством этого метода является относительная простота, его существенный недостаток состоит в том, что расширенное матричное уравнение должно решаться и для дополнительных неизвестных — множителей Лагранжа.

Известно [8], что при реализации главных краевых условий функции формы нужно подчинить этим условиям в соответствующих узлах сетки. Это приводит к тому, что для одних конечных элементов локальная матрица жесткости имеет размерность одного порядка, а для других конечных элементов — другого. Следовательно, при решении класса задач с различными краевыми условиями каждый раз приходится иметь дело со сборкой указанных матриц различной размерности. Это, с одной стороны, порождает трудности при программировании, с другой — приводит к тому, что при замене одних краевых условий другими приходится заново формировать матрицу системы.

Назовем конечный элемент данного семейства однородным, если в его узлах функции формы не подчинены никаким краевым условиям.

Использование однородных конечных элементов приводит к тому, что в качестве исходного объекта имеется одна локальная матрица жесткости, а глобальная матрица жесткости будет соответствовать краевой задаче, когда на всей границе области задано краевое условие свободной границы. Для данной системы уравнений такую матрицу нужно формировать только один раз. При реализации же краевых условий различного типа матрица системы видоизменяется так, чтобы она сохраняла основные свои свойства (например, осталась симметричной и ленточной).

Укажем способы реализации типичных краевых условий при использовании однородных конечных элементов.

1. Пусть задано перемещение в какой-либо точке границы, например $u_1 = g$. Для реализации этого условия обнаруживается строка и столбец глобальной матрицы жесткости, соответствующие данной узловой точке, а на месте элемента главной диагонали записывается единица. Для подправки вектора правой части умноженный на g упомянутый вектор-столбец матрицы вычитается из вектора правой части, а на месте соответствующей компоненты последнего записывается заданное значение перемещения в данном узле.

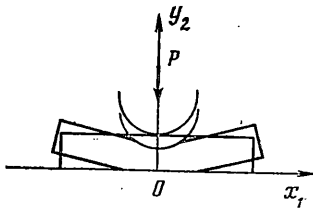
2. Пусть задано условие упругого закрепления. Для простоты, например, на границе параллельной оси Ox_1 :

$$\sigma_{12} + \kappa u_1 = 0, \quad \sigma_{22} + \kappa u_2 = 0 \quad (4.1)$$

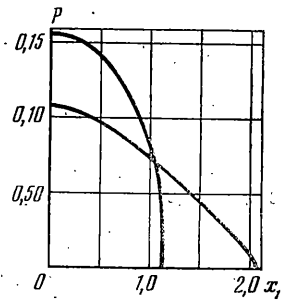
Через k_1 и k_2 обозначим номера строк глобальной матрицы жесткости, отвечающие аппроксимации σ_{12} и σ_{22} соответственно. Тогда для реализации первого из условий (4.1) следует добавить элементу главной диагонали строки с номером k_1 значение κ , а k_1 -й компоненту вектора правой части заменить нулем. Аналогично реализуется и второе условие из (4.1). Этот способ, хотя и не отвечает последовательному применению МКЭ, оказывается удобным при численной реализации на ЭВМ.

5. Результаты расчетов. Первая серия расчетов проводилась для проверки точности метода локально подвижной сетки. Сравнение с аналитическим решением [4] в случае задачи о внедрении параболического штампа в упругое тело показало, что при применении алгоритма ускорения сеточное значение нормальных напряжений отличается от истинного не более 2% за 3–4 итерации. При этом на сетке 30×10 односторонняя задача решалась за 40 с, а на сетке 40×20 — за 10 мин. Расчеты проводились для прямоугольного тела $\Omega = \{(x_1, x_2) : -l_1 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$ и использовались однородные прямоугольные лагранжевы конечные элементы 1 типа [9].

Серия расчетов была проведена для односторонней задачи, когда подлежит определению не одна, а две неизвестные части границы. Для этого рассматривалась плоская задача об отлппании упругой плиты, покоящейся на жестком основании и под-



Фиг. 1



Фиг. 2

вергающейся воздействию абсолютно жесткого выпуклого гладкого штампа при отсутствии сил трения (фиг. 1). Наряду с неизвестной областью контакта здесь подлежит определению и область прилипания тела к основанию. Для этого случая алгоритм нахождения неизвестной границы был модифицирован так, чтобы уточнение обеих частей границы проводилось одновременно. Однако при $\varepsilon=10^{-3}$ точность достигалась за 5–7 итераций, поскольку возмущение одной границы неизвестной области влияет на значение нормальных напряжений на границе другой неизвестной области.

На фиг. 2 представлены графики распределения контактных давлений областей контакта тела со штампом и прилипания тела к основанию. Как видно из графика, распределение контактного давления в области прилипания является более плавным. Это указывает на то, что при стремлении к бесконечности радиуса кривизны штампа распределение контактного давления становится близким к линейному.

В расчетах принимались следующие данные: $\varphi(x_1) = x_1^2 / (2R)$, $R=20$, $l_1=5$, $l_2=-2$, $\alpha=0,05$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Signorini A. Sopra alcune questioni di statica dei sistemi continui // Atti Sol. Ital. Progresso Sci. 1933. V. 2. P. 231–251.
2. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир. 1974. 159 с.
3. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука. 1980. 383 с.
4. Кравчук А. С. Вариационный метод решения контактных задач: Дис. ... докт. физ.-мат. наук, М., 1980.
5. Гасанов А. И. Численный метод решения контактной задачи теории упругости при отсутствии сил трения // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 7. С. 1156–1161.
6. Ильюшин А. А. Пластичность. М.; Л.: Гостехиздат. 1948. 376 с.
7. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир. 1972. 587 с.
8. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир. 1977. 349 с.
9. Гасанов А. И. О свойствах нормальных напряжений и перемещений вблизи возмущенной границы зоны контакта // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 7. С. 1181–1186.
10. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир. 1979. 574 с.
11. Норри Д., Фриз Ж. де. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир. 1981. 304 с.

Баку, Москва

Поступила в редакцию
4.XI.1985