

УДК 539.3.

ДИФРАКЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ
В СФОКУСИРОВАННЫХ ГАУССОВЫХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКАХ,
РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

ПОДДУБНЯК А. П.

Изучаются нестационарные и стационарные волновые процессы, происходящие в упругом полупространстве при формировании в нем пространственно-локализованных акустических пучков с начальными гауссовым сечением и фокусировкой фазового фронта волны. Применение ограниченных волновых пучков в сейсмологии [1-7], неразрушающем контроле [8], кристаллографии [9, 10]; акустике [11-13] позволяет повышать мощность зондирующего сигнала, улучшать энергетический уровень эхо-сигналов, отраженных препятствиями, производить селективный прием сигналов на фоне реверберационных помех. Кроме того, такое явление, как сдвиг акустического пучка в условиях полного внутреннего отражения при рассеянии на плоской границе раздела деформируемых сред [14] позволяет определить физико-механические параметры контактирующих тел. При этом важно выявить особенности формирования направленных волн в различных режимах возбуждения.

В работах [11, 12] экспериментально и теоретически показано, что распространение акустического пучка в твердом теле сопровождается суперпозицией продольных и поперечных волн, в результате которой граничная область хорошо коллимированного пучка становится существенно неоднородной. Ниже аналогичное явление обнаружено и в случае сфокусированных пучков продольных и поперечных волн. Оказывается, что вследствие двойной фокусировки влияние пространственных биений распространяется по сечению пучка вплоть до его оси.

1. Постановка задачи. Предположим, что на упругое изотропное и однородное полупространство $x_3 \geq 0$ действуют локально распределенные внешние перемещения $U(\xi, t)$ или усилия $t(\xi, t)$, приложенные к поверхности $x_3 = 0$ ($|x_{1,2}| < \infty$, $t > t_0$, $\xi = (x_1, x_2)$, $\xi = |\xi|$). Используя интегральное преобразование Фурье по координатам x_1, x_2 и времени t , вектор упругих динамических перемещений U в упругой среде, после решения соответствующей начально-краевой задачи теории упругости [15], получаем в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_A \int K_A \cdot u(k, \omega) e^{i(k_A \cdot x - \omega t)} dk d\omega \quad (1.1)$$

$$K_L = k_L k_T / k_L \cdot k_T, \quad K_T = 1 - K_L$$

$$k_A = (k_1, k_2, k_{A3}), \quad k = (k_1, k_2), \quad k = |k|$$

$$k_{A3} = \sqrt{k_A^2 - k^2}, \quad k_A = \omega / c_A$$

$$(A = L, T, |x_{1,2}| < \infty, x_3 \geq 0, t > t_0; \quad x = (x_1, x_2, x_3))$$

Здесь и ниже 1 — единичный тензор, c_L, c_T — скорости распространения продольных и поперечных волн, λ, μ — параметры Ламе, t_0 — фиксированный момент времени, $u(k, \omega)$ — спектральная плотность вектора упругого перемещения $u(\xi, t)$, заданного на границе упругой среды в случае первой основной задачи для полупространства (задача I [15]). В случае второй основной задачи (задача II) вектор $u(\xi, t)$ связан с поверхностными усилиями $t(\xi, t)$ следующим образом (в фурье-трансформантах):

$$t(k, \omega) = -iS(k, \omega) \cdot u(k, \omega),$$

$$u(k, \omega) = iS^{-1}(k, \omega) \cdot t(k, \omega) \quad (1.2)$$

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \sum_A [\lambda \delta_L^A \mathbf{i}_3 \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{K}_L + \mu (k_{A3} \mathbf{K}_A + k_A \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{K}_A)] \quad (A=L, T)$$

$$S^{-1}(\mathbf{k}, \omega) = [\mu k_{T3} R(\mathbf{k}, \omega)]^{-1} [k_T^2 k_{L3} k_{T3} \mathbf{1}_{L3} + R(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{1}_{T3} + k_{T3} P(\mathbf{k}, \omega) (\mathbf{i}_3 \mathbf{k} - \mathbf{k} \mathbf{i}_3) - Q(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{k} \mathbf{k}]$$

$$P(\mathbf{k}, \omega) = 2\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{k}_T - k_T^2, \quad Q(\mathbf{k}, \omega) = 4\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{k}_T - 3k_T^2$$

$$R(\mathbf{k}, \omega) = (k_T^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 k_{L3} k_{T3}, \quad \delta_L^L = 1, \quad \delta_L^T = 0$$

причем действительные положительные нули функции $R(\mathbf{k}, \omega)$ соответствуют скорости $v_R = (\omega/k)_R$ поверхностной волны Рэлея [16], S^{-1} — тензор, обратный к тензору S .

Будем изучать распространение в твердой упругой среде волновых пучков с узкими пространственными (угловыми) спектрами [17, 18]. Для этого применим к соотношению (1.1), или в случае необходимости к выражению тензора напряжений Коши \mathbf{T} :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \frac{i}{(2\pi)^3} \sum_A \int \{ \lambda \delta_L^A \mathbf{1}_{\mathbf{k}_L} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}, \omega) + \mu [k_A \mathbf{K}_A \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}, \omega) + \mathbf{K}_A \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}, \omega) k_A] \} \exp[i(\mathbf{k}_A \cdot \mathbf{x} - \omega t)] d\mathbf{k} d\omega \quad (A=L, T) \quad (1.3)$$

метод параболического уравнения [17]. Предположим, что известная функция $\mathbf{u}(\mathbf{k}, \omega)$ (для задачи II формула (1.2)) заметно отличается от нуля лишь при $|k_\alpha| \ll k_A$ ($\alpha=1, 2$; $A=L, T$). Тогда характерные ширины пучков будут большими по сравнению с соответствующими длинами волн λ_A , $\lambda_A = 2\pi/k_A$ ($A=L, T$) и

$$k_{A3} \approx k_A^{-1/2} k^2 k_A^{-1}, \quad \mathbf{K}_L \approx \mathbf{1}_{L3} + \mathbf{i}_3 k k_T^{-1} + \mathbf{k} \mathbf{i}_3 k_L^{-1} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{K}_T \approx \mathbf{1}_{T3} - \mathbf{i}_3 k k_T^{-1} - \mathbf{k} \mathbf{i}_3 k_L^{-1}, \quad \mathbf{1}_{L3} = \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{1}_{T3} = \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{1} = \mathbf{1}_{L3} + \mathbf{1}_{T3}, \quad \mathbf{1}_{L3} \cdot \mathbf{1}_{T3} = 0$$

Здесь и дальше по немым индексам, обозначаемым греческими буквами, производится суммирование ($\alpha=1, 2$).

Используя (1.4), на основании (1.1), (1.2) для задач I и II соответственно получаем

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_A c_A^{-1} \left[\mathbf{1}_{A3} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha_A (c_T \mathbf{i}_3 \nabla_\perp + c_L \nabla_\perp \mathbf{i}_3) \right] \cdot \mathbf{A}_u(\mathbf{x}, \tau_A) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mu} \sum_A \frac{c_T}{c_A} \left[\mathbf{1}_{A3} - \frac{c_T}{c_L} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1} \times \right. \quad (1.6)$$

$$\left. \times (2c_T \mathbf{i}_3 \nabla_\perp + c_L \nabla_\perp \mathbf{i}_3) \right] \cdot \mathbf{A}_\tau(\mathbf{x}, \tau_A)$$

$$\mathbf{A}_f(\mathbf{x}, \tau_A) = \frac{1}{2\pi x_3} \int f\left(\xi', \tau_A - \frac{|\xi - \xi'|^2}{2c_A x_3}\right) d\xi'; \quad \mathbf{A}_f(\mathbf{x}, \tau_A) = 0 \quad (\tau_A \leq 0)$$

$$(\alpha_L = 1, \alpha_T = -1; \nabla_\perp = \mathbf{i}_\alpha \partial / \partial x_\alpha, \tau_A = t - x_3 / c_A, A=L, T)$$

2. Распространение импульсных гауссовых пучков. Поскольку методика исследования волновых пучков, описываемых соотношениями (1.5) и (1.6), в обоих случаях одинакова, рассмотрим задачу в предположении, что поверхность $x_3=0$ находится под воздействием вектора перемещения вида

$$\mathbf{u}(\xi, t) = \sum_A \mathbf{B}_A(\xi) \exp(-\xi^2/a^2) \delta(t + 1/2 \xi^2 / (c_A F)) \quad (A=L, T) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}_L(\xi) = B_L \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{B}_T(\xi) = B_T \xi \quad (2.2)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, a — эффективный радиус излучателя упругих волн, F — радиус волнового фронта в центре излучателя O ($\xi=0$). Коэффициент B_L характеризует амплитуду вектора осесимметричного нормального перемещения в точке O . При условии $\mathbf{B}_T = \mathbf{B}_T' = B_{T\alpha} \mathbf{i}_\alpha$ вектор $\mathbf{B}_T(\xi)$ описывает поперечные смещения в плоскости $x_3=0$. Если же $\mathbf{B}_T(\xi) = \mathbf{B}_T' = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{B}_T' = B_{T1} \mathbf{i}_2 - B_{T2} \mathbf{i}_1$, то поверхность полупространства $x_3=0$ подвергается угловому сдвигу. В частном случае осевой симметрии излучателя поперечных волн, когда $B_{T1} = B_{T2} = B_T$, соответственно имеем

$$\mathbf{B}_T(\xi) = B_T \xi \quad (2.3)$$

$$\mathbf{B}_T(\xi) = B_T \xi \mathbf{i}_\varphi; \quad \mathbf{i}_\varphi = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_\xi, \quad \mathbf{i}_\xi = \xi / |\xi| \quad (2.4)$$

Формулы (2.3), (2.4) описывают амплитуды радиальных и тангенциальных перемещений, заданных на апертуре излучателя $x_3=0$, $\xi \leq a$.

Рассматриваемое поле упругих перемещений (2.1) (в аналогичном виде можно принять и поле вектора напряжений $\mathbf{t}(\xi, t)$) при $F > 0$ отвечает δ -образным волнам, сходящимся к центру $\xi=0$ из окружности $\xi = \sqrt{-2c_A t F}$ ($t \leq 0$). Значение амплитуды произвольного, отличного от δ -образного, импульса отсекается экспоненциальным множителем в (2.1), достигающим максимума при $\xi=0$. Поэтому основная часть энергии возбуждения, передающаяся внутрь упругого тела, поступает от эффективного начального сечения волнового пучка радиусом a с момента времени $t \geq t_0$, $t_0 = -a^2/c_A F$, т. е. при выполнении неравенства

$$c_A \tau_A^0 + \sqrt{F^2 + a^2} \geq 0 \quad (\tau_A^0 = t - F/c_A, \quad F \gg a; \quad A=L, T)$$

Если же $F = \infty$ или $F < 0$, то излучатель включается в момент времени $t = t_0$, $t_0 \geq 0$.

Используя граничное условие (2.1) и свойства δ -функций, из соотношения (1.5), находим вектор перемещения для полупространства $x_3 > 0$ в следующем виде (характеристики для L - и T -случаев снабдим нижними индексами L и T):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_L(x, t) = & -\frac{2c_L x_3 B_L}{a^2 |\kappa_{LL}| \kappa_{LL}} \left\{ \mathbf{i}_3 \left[I_0(z_{LL}) - \frac{2\xi^2}{\kappa_{LL} a^2} \frac{I_1(z_{LL})}{z_{LL}} \right] e^{-\nu_{LL} H(b_{LL})} - \right. \\ & \left. - \mathbf{i}_\xi \frac{\xi}{x_3} \sum_A \alpha_A \frac{|\kappa_{LL}| \kappa_{LL} \theta_{AL}}{|\kappa_{AL}| \kappa_{AL}^2} \left[I_0(z_{AL}) - \frac{4c_A x_3}{\kappa_{AL} \theta_{AL} a^2} \left(\tau_A + \frac{\xi^2}{c_L F \kappa_{AL}} \right) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{I_1(z_{AL})}{z_{AL}} \right] e^{-\nu_{AL} H(b_{AL})} \right\} \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_T(x, t) = & -\frac{4c_T x_3 \mathbf{B}_T(\xi)}{|\kappa_{TT}|^3 a^2} \left[I_0(z_{TT}) - y_{TT} \frac{I_1(z_{TT})}{z_{TT}} \right] e^{-\nu_{TT} H(b_{TT})} - \\ & - c_T \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_\xi \cdot \mathbf{B}_T(\mathbf{i}_\xi) \sum_A \frac{\alpha_A}{|\kappa_{AT}| \kappa_{AT}} \left\{ \left[1 - \frac{2}{a^2} \left(b_{AT} + \frac{\xi^2 \theta_{AT}}{\kappa_{AT}^2} \right) \right] I_0(z_{AT}) + \right. \\ & \left. + \frac{2b_{AT}}{a^2} \left[1 + \frac{2\xi^2}{a^2 \kappa_{AT}^2} (1 + \theta_{AT}) \right] \frac{I_1(z_{AT})}{z_{AT}} \right\} e^{-\nu_{AT} H(b_{AT})} \\ & y_{AB} = b_{AB} + \frac{\xi^2}{\kappa_{AB}^2 a^2}, \quad b_{AB} = \frac{D_A}{\kappa_{AB}} \left(1 + \frac{\delta_{AB} \xi^2}{\kappa_{AB} a^2} \right) \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$z_{AB} = 2\sqrt{b_{AB} \xi} / (\kappa_{AB} a), \quad \kappa_{AB} = 1 - x_3/x_{3AB}$$

$$\theta_{AB} = 1 + x_3/x_{3AB}, \quad D_A = x_3/x_{3A}, \quad \delta_{AB} = x_{3A}/x_{3AB}$$

$$x_{3A} = 1/2a^2/(c_A \tau_A), \quad x_{3AB} = c_B F/c_A \quad (A, B=L, T)$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда, $I_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя. Параметры x_{3AB} и x_{3A} , определяющие длины геометрической и дифракционной зон, введены здесь аналогично стационарному случаю [17].

Из формул (2.5) следует, что возбуждение упругого полупространства импульсными смещениями, локально распределенными по поверхности плоского излучателя, приводит к возникновению акустического пучка, в формировании которого принимают участие как первоначально заданные волны, так и смешанные волны перемещений типа лапласова движения [19]. В частности, на оси ($\xi=0$) получаем

$$u_L(x_3, t) = -\frac{2c_L x_3 B_L i_3}{|\kappa_{LL}| \kappa_{LL} a^2} \exp\left(-\frac{D_L}{\kappa_{LL}}\right) H\left(\frac{\tau_L}{\kappa_{LL}}\right) \quad (2.7)$$

$$u_T(x_3, t) = -B_T^0 i_3 c_T \sum_A \frac{\alpha_A}{|\kappa_{AT}| \kappa_{AT}} \left(1 - \frac{D_A}{\kappa_{AT}}\right) \exp\left(-\frac{D_A}{\kappa_{AT}}\right) H\left(\frac{\tau_A}{\kappa_{AT}}\right) \quad (A=L, T)$$

где при задании поперечного смещения имеем $B_T^0 = B_{T1} \cos^2 \varphi + B_{T2} \sin^2 \varphi$, а при угловом сдвиге получаем $B_T^0 = (B_{T1} - B_{T2}) \sin \varphi \cos \varphi$ (ξ, φ — полярные координаты, отсчитываемые от центра излучателя O). При осевой симметрии излучения, когда $B_{T1} = B_{T2}$, волновое поле крутильных колебаний на оси $\xi=0, x_3 > 0$ отсутствует. Из результатов (2.5), (2.7) также следует, что непосредственно вблизи от оси $\xi=0$ волны являются плоскими, хотя для $\xi > 0$ волновые фронты деформированы. При этом первоначальный δ -импульс деформируется, распадаясь на отдельные волновые пакеты, времена жизни которых при распространении, например, вдоль оси x_3 , равны $t_{AB} = a^2 |\kappa_{AB}| / (2c_A x_3)$ ($A, B=L, T$).

Поведение ограниченных волновых пучков существенно зависит от параметров D_A и δ_{AB} . В частности, формулы (2.5), (2.7) оказываются неприменимы в классическом смысле, если $D_A \delta_{AB} \rightarrow 1$, т. е. при $\kappa_{AB} \rightarrow 0$ ($A, B=L, T$). В окрестности плоскостей $x_3 = x_{3AB}$, в особенности при малых ξ , амплитуды некоторых компонент вектора перемещения волнового пучка резко возрастают. При фиксированном параметре x_{3A} в этих случаях вектор (1.5) приобретает следующий вид:

$$u_L(x, t) = \frac{B_L c_L a}{2\sqrt{\pi} \xi} \left\{ -i_3 \frac{x_3}{\xi} \left(D_L - \frac{\xi^2}{a^2} \right) + \right. \\ \left. + i_\xi \left[1 - \frac{a^2}{2\xi^2} \left(D_L^2 - \frac{\xi^4}{a^4} \right) \right] \right\} \exp \left\{ - \left[\frac{a}{2\xi} \left(D_L - \frac{\xi^2}{a^2} \right) \right]^2 \right\} \quad (x_3 = F, \kappa_{LL} = 0) \quad (2.8)$$

$$u_L(x, t) = \frac{B_L c_L a}{2\sqrt{\pi} \xi^2} \left\{ i_3 \frac{4\sqrt{\pi} x_3 \xi^2}{a^3 \kappa_{LL}^2} I_0(z_{LL}) e^{-\nu_{LL}} H(b_{LL}) - \right. \\ \left. - i_\xi \left[1 - \frac{a^2}{2\xi^2} \left(D_T^2 - \frac{\xi^4}{a^4} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ - \left[\frac{a}{2\xi} \left(D_T - \frac{\xi^2}{a^2} \right) \right]^2 \right\} \right\} \quad (x_3 = x_{3TL} > F,$$

$$\kappa_{TL} = 0, \kappa_{LL} < 0)$$

$$u_T(x, t) = -\frac{B_T(\xi) c_T x_3 a}{2\sqrt{\pi} \xi^3} \left[1 - \frac{a^2}{2\xi^2} \left(D_T^2 - \frac{\xi^2}{a^2} \right) \right]^2 \times \\ \times \exp \left\{ - \left[\frac{a}{2\xi} \left(D_T - \frac{\xi^2}{a^2} \right) \right]^2 \right\} \quad (x_3 = F, \kappa_{TT} = 0)$$

$$u_T(x, t) = i_3 i_\xi \cdot B_T(\xi) \frac{c_L a^3}{4\sqrt{\pi} \xi^4} \left[D_T + \frac{a}{2\xi} \left(D_T - \frac{\xi^2}{a^2} \right) \right] \left(D_T^2 - \right. \\ \left. - \frac{\xi^4}{a^4} \right) \exp \left\{ - \left[\frac{a}{2\xi} \left(D_T - \frac{\xi^2}{a^2} \right) \right]^2 \right\} \quad (x_3 = x_{3LT} < F, \kappa_{LT} = 0)$$

Устремив $\xi \rightarrow 0$ и используя представление δ -образной функции [20]: $\delta(x, 1/\xi) = (\sqrt{\pi} \xi)^{-1} \exp(-x^2/\xi^2)$ ($\xi \rightarrow 0$) в точках размещения геометриче-

ских центров волновых фронтов получаем

$$\begin{aligned}
 u_L(x_3, t) &= i_3 B_L S_0 / (2\pi F c_L) \delta'(\tau_L) \quad (x_3 = F) \\
 u_L(x_3, t) &= i_3 \frac{2B_L c_L^2 F}{c_T \kappa_{LL}^2 a^2} \exp\left(-\frac{D_L}{\kappa_{LL}}\right) H\left(\frac{D_L}{\kappa_{LL}}\right) \left(x_3 = \frac{c_L}{c_T} F, \kappa_{LL} < 0\right) \\
 u_T(x_3, t) &= i_3 [(B_{T1} + B_{T2}) S_0 a^2 / (4\pi c_T F^2)] \delta'(\tau_T) \quad (x_3 = F) \\
 u_T(x_3, t) &= -i_3 [(B_{T1} + B_{T2}) S_0 a^2 / (4\pi c_T F^2)] \delta'(\tau_L) \quad (x_3 = c_T F / c_L) \\
 S_0 &= \pi a^2
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

При угловом сдвиге (крутильных колебаниях) смещения в точках $x_3 = F$, $x_3 = c_T F / c_L$ на оси $\xi = 0$ отсутствуют.

Полученные результаты показывают, что вблизи фронтов пучков упругих волн с гауссовым распределением по поперечному сечению при прохождении этих фронтов через геометрические центры $\xi = 0$, $x_3 = x_{3AB}$ ($A, B = L, T$) фокусировка амплитуд осевых перемещений происходит дважды. Прохождение волнового фронта через эти особые точки, как видно из (2.9), может сопровождаться изменением фазы волны на противоположную.

Приведем оценки радиусов волновых пучков, определяемых при фиксированных x_3 и τ_A ($A = L, T$) по убыванию амплитуды в e раз. Для малых дифракционных длин D_A из (2.6) получаем $y_{AB} = 1$ ($\kappa_{AB} \neq 0$; $A, B = L, T$). Тогда радиусы $a_{AB}(x_3, \tau_A)$ волновых пучков, формирующих суммарное поле при возбуждении перемещениями A -типа ($A, B = L, T$), определяются по формуле

$$a_{AB}(x_3, \tau_A) = a \sqrt{\frac{1 - D_A \delta_{AB}}{1 + D_A \delta_{AB}}} [1 - D_A (1 + \delta_{AB})] \tag{2.10}$$

При этом минимальное (близкое к нулю) значение радиуса возможно, если $D_A \approx (1 + \delta_{AB})^{-1}$, т. е. $0 < \tau_A \ll a^2 / (2c_B F)$ ($A, B = L, T$).

Непосредственно в фокусных плоскостях $\kappa_{AB} = 0$ формула (2.10) неприменима. Как следует из (2.8), здесь

$$a_{AB}(x_3, \tau_A) = a \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \delta_{AB}^{-1} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \delta_{AB}^{-1} + \frac{1}{4} \delta_{AB}^{-2}}} \quad (A, B = L, T)$$

В момент прохождения волнового фронта через эти плоскости ($\tau_A = 0$, $\delta_{AB} = \infty$) радиус пучка ровно в два раза превышает эффективный радиус апертуры излучателя — волновой пучок становится расходящимся. На большой глубине за фронтом волны ($\tau_A > 0$, $\delta_{AB} \ll 1$) акустический пучок в фокальных плоскостях неограниченно расширяется: $a_{AB}(x_3, \tau_A) = a / \sqrt{\delta_{AB}}$ ($A, B = L, T$).

В сечениях волнового пучка, отличных от рассмотренных выше, радиус определяется согласно (2.5), (2.6) из уравнения $y_{AB} - z_{AB} = 1$ и представляется формулой

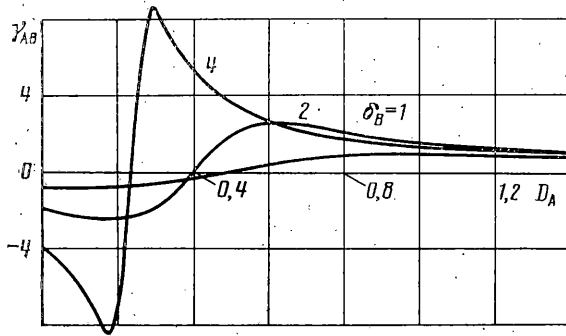
$$a_{AB}(x_3, \tau_A) = a [1 + \sqrt{D_A (1 + \delta_{AB})}] \quad (A, B = L, T) \tag{2.11}$$

т. е. суживаясь на фронте при $\tau_A = 0$, волновой пучок неограниченно расширяется после прохождения фронта.

В случае, когда пучки коллимированы ($F = \infty$) или дефокусированы ($F < 0$) для определения их радиусов можно воспользоваться соотношениями (2.10) и (2.11).

Заметим, что принимая при малых ξ равенство $y_{AB} = 0$, а при больших ξ равенство $y_{AB} - z_{AB} = 0$, получаем уравнения волновых фронтов в разных сечениях акустических пучков.

Из рассмотренного следует, что наибольшее нарастание амплитуд перемещений частиц среды, возбужденной излучателем гауссова типа, происходит вблизи волновых фронтов. Здесь же акустические пучки являются наиболее узкими. Причем в случае фокусировки ($F > 0$) максимальная интенсивность излучения будет наблюдаться в особых точках $\xi = 0$, $x_3 = x_{3AB}$ ($A, B = L, T$).



Фиг. 1

3. Анализ спектральных характеристик гауссовых сфокусированных пучков. Применение к (1.5), (2.1) интегрального преобразования Фурье по времени и соответствующие вычисления позволяют описать гауссовы волновые пучки, распространяющиеся в упругом полупространстве в режиме установившихся колебаний

$$u(x, \omega) = -\frac{iS_0}{2\pi x_3} \sum_{A,B} D_A \left\{ ik_A 1_{A3} + \frac{\alpha_A}{c_A} (c_T i_3 i_\xi + c_L i_\xi i_3) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} - 2\xi \left(\frac{1}{a_{AB}^2} + \frac{ik_A}{2R_{AB}} \right) \right] \right\} \cdot B_B \left(\frac{\xi}{\kappa_{AB} + iD_A} \right) \frac{e^{ik_A x_3}}{\kappa_{AB} + iD_A} \exp \left[-\xi^2 \left(\frac{1}{a_{AB}^2} + \frac{ik_A}{2R_{AB}} \right) \right] \quad (3.1)$$

$$a_{AB} \equiv a_{AB}(x_3) = a \sqrt{(1 - D_A \delta_B)^2 + D_A^2}$$

$$R_{AB} \equiv R_{AB}(x_3) = -x_{3AB} \left(D_A \delta_B - \frac{1 - D_A \delta_B}{1 - D_A / D_B^0} \right)$$

$$D_B^0 = \delta_B / (1 + \delta_B^2) \quad (A, B = L, T)$$

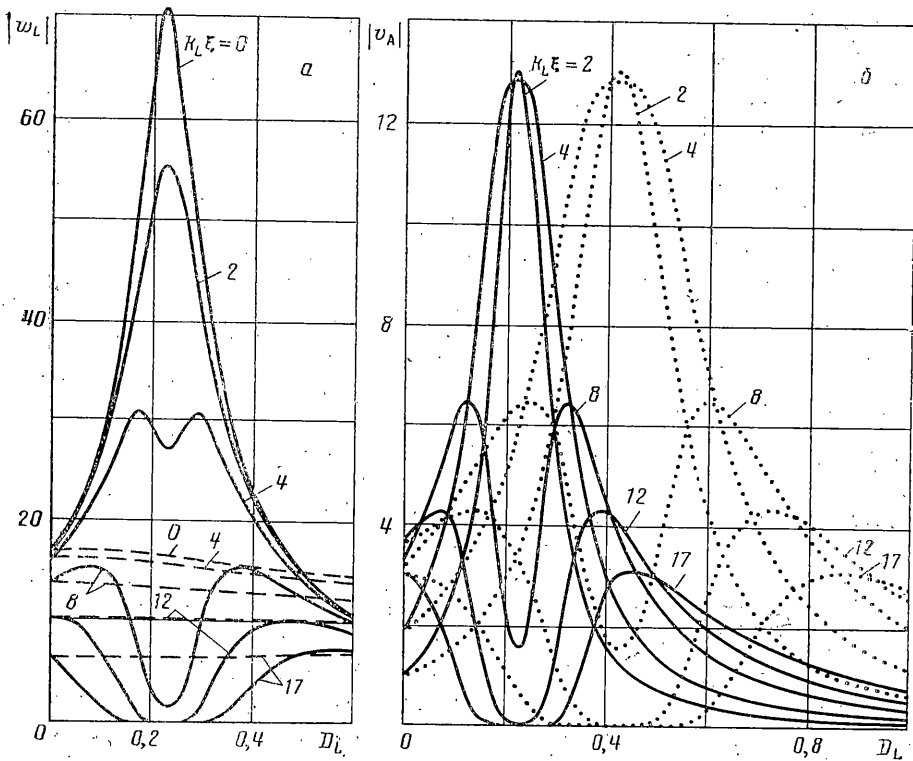
где $a_{AB}(x_3)$ — радиус пучка в текущем сечении, $R_{AB}(x_3)$ — радиус кривизны фазового фронта в этом сечении. Параметры D_A , $\delta_B = \delta_{AB}$ здесь определяются по формулам (2.6), где для гармонического режима следует принять $x_{3A} = k_A a^2 / 2$.

Отметим, что анализ радиусов волновых пучков $a_{AB}(x_3)$ проводится так же, как и в скалярном случае [17]. В частности, наиболее узкими пучки становятся в сечениях, определяемых соотношениями: $D_A = D_B^0$ ($A, B = L, T$).

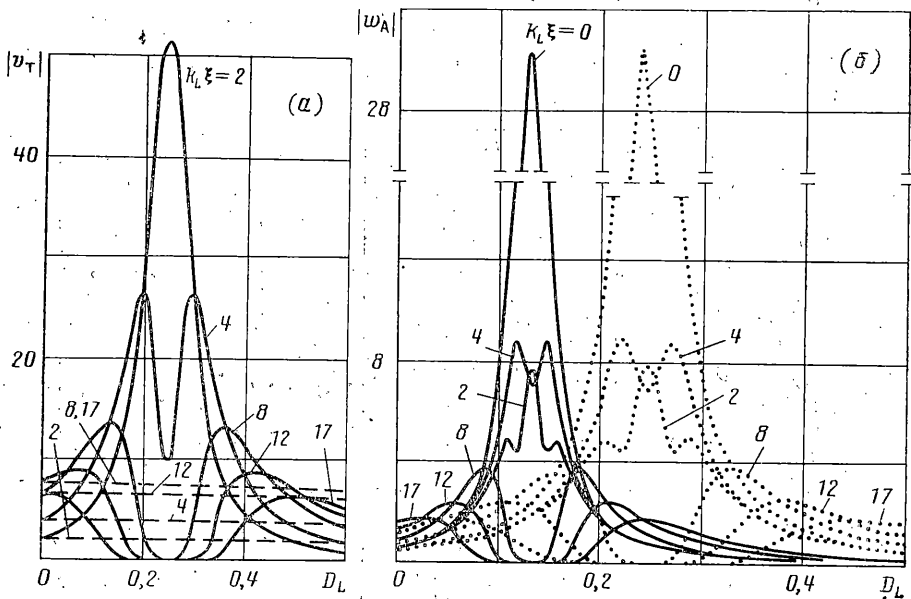
Рассмотрим формирование акустических пучков в осесимметричном случае, т. е. при выполнении условий (2.2), (2.3). Тогда спектральную плотность вектора упругого перемещения (3.1) удобно представить в виде

$$u(x, \omega) = \frac{S_0}{2\pi x_3 a} \sum_A D_A B_A U_A(x, \omega) \quad (A = L, T) \quad (3.2)$$

где U_L и U_T — безразмерные векторы перемещений в упругом полупространстве, вызванные действием фокусирующих излучателей продольных осевых и поперечных радиальных волн, соответственно. Как следует из



Фиг. 2



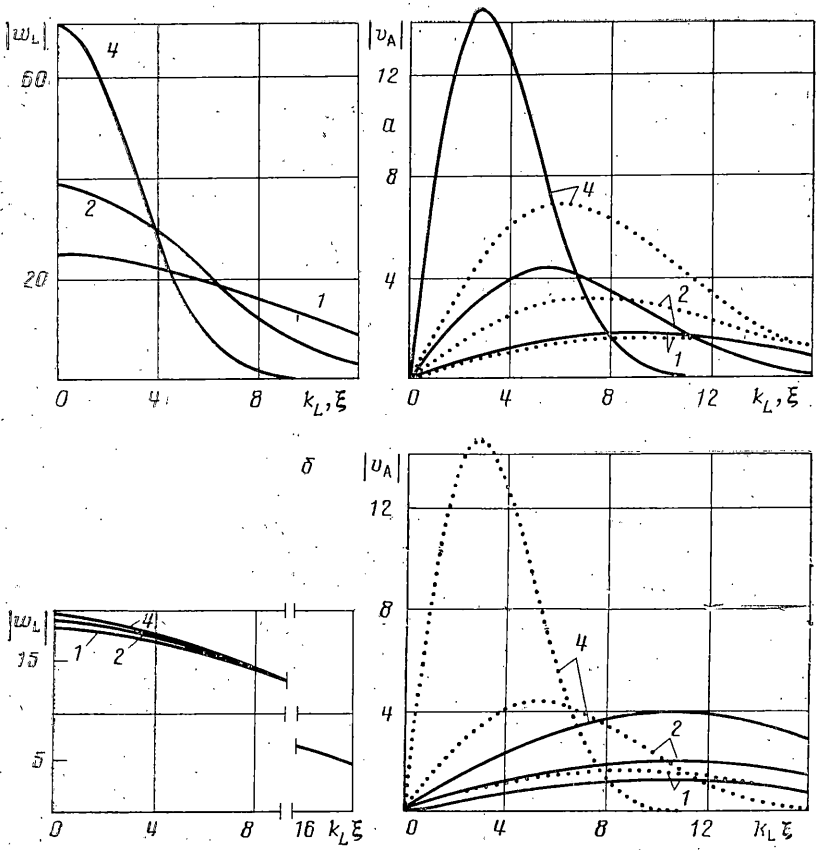
Фиг. 3

формулы (3.1), волновые пучки, возбужденные продольными перемещениями излучателя, содержат также вклады от радиальных смещений внутри тела. Аналогично в формировании пучка сдвиговых волн принимают участие продольные волны. Поэтому для (3.2) имеем

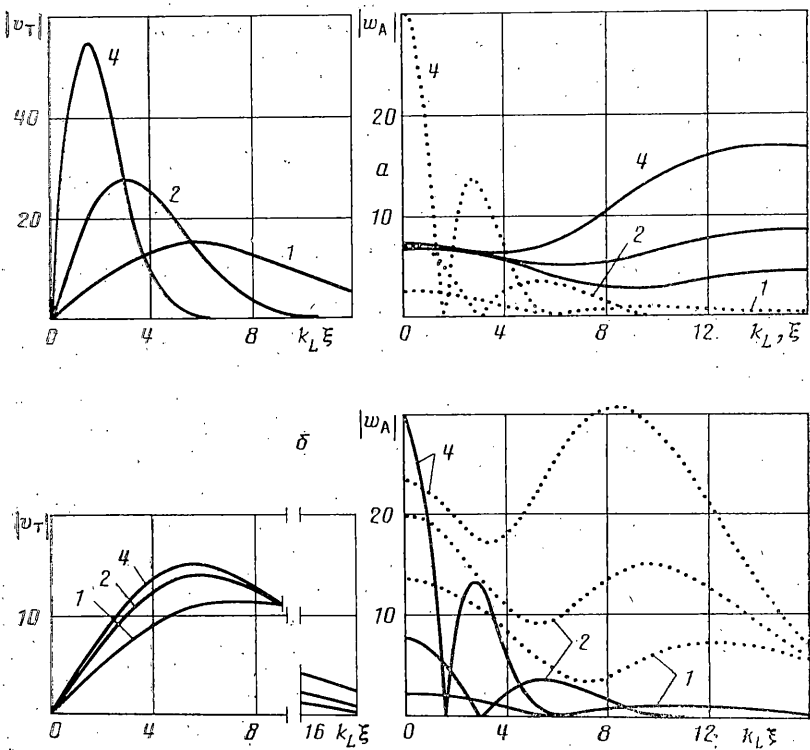
$$\mathbf{U}_L = w_L \mathbf{i}_3 + (v_L + v_T) \mathbf{i}_z, \quad \mathbf{U}_T = (w_L + w_T) \mathbf{i}_3 + v_T \mathbf{i}_z \quad (3.3)$$

где структура составляющих v , w легко определяется, исходя из соотношений (3.1), (3.2).

Характер гауссовых установившихся пучков в условиях дифракции и



Фиг. 4



Фиг. 5

фокусировки существенно зависит от безразмерной кривизны фазовых фронтов волн $\gamma_{AB} = ka^2 / (2R_{AB})$ ($A, B = L, T$), графики зависимости которых от осевой координаты D_A и параметров $\delta_B = 1, 2, 4$ приведены на фиг. 1. В сечениях $D_A = (\delta_B \mp 1) / (1 + \delta_B^2)$ кривизны γ_{AB} достигают экстремальных значений $\gamma_{AB} = \pm (1 + \delta_B^2) / 2$, а в точках перетяжки пучка $D_A = D_B^0$ кривизны $\gamma_{AB} = 0$, т. е. волны в данных сечениях являются плоскими. При этом расстояние между смежными точками перетяжки в A -случае определяются формулой $\Delta D_L = (c_L / c_T - 1) D_A^0$ ($A = L, T$).

Неравномерность волнового поля акустических пучков вдоль осевого направления характеризуют фиг. 2, 3, на которых изображены модули амплитуд перемещений при продольном (фиг. 2) и поперечном (фиг. 3) возбуждении полупространства из стали ($c_L = 6100$ м/с, $c_T = 3280$ м/с). Числами 0, 2, 4, 8, 12, 17 отмечены значения волновых радиусов $k_L \xi$, для которых рассматриваются кривые осевых амплитуд. Эффективный волновой размер излучателя равен $ka = 17$ [12]. Расчеты проведены для $\delta_L = 4$. Сплошными и пунктирными кривыми на фиг. 2, б, 3, б отмечены соответственно продольные ($A = L$) и поперечные ($A = T$) составляющие перемещений. Штриховые линии на фиг. 2, а, 3, а отмечают амплитуды перемещений в случае хорошо коллимированных волновых пучков ($F = \infty$, $\delta_L = 0$). Как видно, двойная фокусировка волн в упругом теле достигается для излучателя продольных волн за счет радиальных смещений, а для излучателя сдвиговых волн — за счет осевых смещений.

Фиг. 4 (а — $D_L = D_L^0$; б — $D_T = D_L^0$) и фиг. 5 (а — $D_T = D_T^0$; б — $D_L = D_T^0$) иллюстрируют изменяемость волнового поля перемещений в точках перетяжки пучков в зависимости от $k_L \xi$ и при значениях фокусирующего фактора δ_L , равного 1, 2, 4. Сплошные и пунктирные линии нанесены для компонент смещений при $A = L$ и $A = T$, соответственно. При этом амплитуды для w_L (фиг. 4, а) и w_T (фиг. 4, б) увеличены в десять раз. Из этих результатов и формул (3.1) — (3.3) следует, что компоненты v_L и v_T в L -случае (w_L и w_T в T -случае) равны по модулю и противоположны по фазе на апертуре излучателя, т. е. при $x_3 = 0$ соответствующие им волны компенсируют друг друга. Дифракционные и фокусирующие факторы приводят к тому, что эти волны внутри тела разъединяются и существенно влияют на структуру пучка в точках перетяжки, приводя в суперпозиции с основной излучаемой волной к явлению пространственного биения, период которого определяется формулой $\lambda = \lambda_L \lambda_T / (\lambda_L - \lambda_T)$ [11, 12]. Это явление в области сужения пучка распространяется на всю глубину его сечения.

Автор выражает благодарность В. В. Пороховскому за помощь в вычислениях на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирпичникова Н. Я. О построении сосредоточенных вблизи лучей решений уравнений теории упругости для неоднородного изотропного пространства // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1971. Т. 115. С. 103—113.
2. Бабич В. М., Кирпичникова Н. Я. Об остро направленном распространении упругих волн // Numerische Meth. in der Geophys. Tharand, 1975. Praha: 1976. S. 217—223.
3. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. К расчету сейсмического источника с заданной направленностью излучения // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 4. С. 831—834.
4. Попов М. М. Метод суммирования гауссовых пучков в изотропной теории упругости // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1983. № 9. С. 39—50.
5. Červený V., Pšenčík J. Gaussian beams in two-dimensional elastic inhomogeneous media // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1983. V. 72. № 2. P. 417—433.
6. Nanzyga A. Gaussian beams in anisotropic elastic media and applications // Hybrid Formulation of Wave Propagation and Scattering: Proc. NATO Adv. Res. Workshop, Rome, 1983. Dordrecht: Nijhoff Publ. 1984. P. 215—226.
7. Klimès L. Expansion of a high-frequency time-harmonic wave-field given on an initial surface into gaussian beams // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1984. V. 79. № 1. P. 105—118.
8. Кондрагьев Ю. А., Карпельсон А. Е. Формирование узких слаборасходящихся ультразвуковых пучков // Дефектоскопия. 1978. № 10. С. 95—102.
9. Науменко Н. Ф., Переломова Н. В., Бондаренко В. С. Распространение ограниченных акустических пучков в кристалле ниобата лития // Кристаллография. 1983. Т. 28. № 3. С. 607—608.

10. *Хаткевич А. Г.* Кривизна поверхности волновых векторов и анизотропная дифракция ультразвуковых пучков в кристаллах // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 3. С. 404–406.
11. *Макаров В. И.* Пространственно-модулированное боковое излучение ультразвукового пучка в твердом теле // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 2. С. 325–326.
12. *Макаров В. И., Тихонов М. Ю.* Ближнее акустическое поле, создаваемое в твердой среде плоским излучателем с гауссовым распределением амплитуды колебаний // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 6. С. 883–889.
13. *Подстригач Я. С., Поддубняк А. П.* Рассеяние звуковых пучков на упругих телах сферической и цилиндрической формы. Киев: Наук. думка. 1986. 262 с.
14. *Брезовских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука. 1973. 343 с.
15. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука. 1976. 662 с.
16. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
17. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.
18. *Зверев В. А.* Радиооптика. Преобразования сигналов в радио и оптике. М.: Сов. радио. 1975. 304 с.
19. *Элиашвили Дж. Г.* Влияние продолжительности действия импульса на характер затухания упругих волн // Сообщ. АН ГССР. 1984. Т. 114. № 3. С. 553–556.
20. *Кори Г., Кори Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы. М.: Наука, 1977. 831 с.

Львов

Поступила в редакцию
11.VII.1986