МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1987

УДК 539.3

РЕЗУЛЬТИРУЮЩИЕ РЕАКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ОБ УДАРЕ ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ ПО УПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

ГОРШКОВ А. Г., ТАРЛАКОВСКИЙ Д. В.

В линейной постановке рассматривается пространственная задача об ударе произвольным твердым затупленным телом о поверхность упругого полупространства. С использованием интегральных преобразований Фурье — Лапласа для начального этапа взаимодействия получены выражения для определения результирующих контактных сил и моментов.

1. Пусть абсолютно твердое тело, ограниченное выпуклой гладкой поверхностью S, в начальный момент времени $t=0$ входит в контакт в точке O с однородной изотропной линейно-упругой средой, занимающей полупространство $z\geqslant 0$. Вне области контакта Ω упругая среда свободна от нагрузок. Используем две прямоугольные декартовы системы координат: неподвижную $Oxyz$ и связанную с телом систему главных центральных осей $O_1x_1y_1z_1$. Уравнения движения тела, включающие уравнения движения центра масс, уравнения Эйлера движения вокруг центра масс и кинематические уравнения Эйлера, запишем в виде [1]:

$$m\mathbf{u}_c^{\cdot\cdot}=\mathbf{R}_e+\mathbf{R},\quad \mathbf{L}_c^{\cdot}+[\boldsymbol{\omega},\mathbf{L}_c]=\mathbf{M}_e+\mathbf{M} \tag{1.1}$$

$$\varphi^{\cdot}=\omega_3-(\omega_1\sin\varphi+\omega_2\cos\varphi)\operatorname{ctg}\vartheta$$

$$\psi^{\cdot}=(\omega_1\sin\varphi+\omega_2\cos\varphi)/\sin\varphi,\quad \vartheta^{\cdot}=\omega_1\cos\varphi-\omega_2\sin\varphi$$

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}_1\mathbf{i}+R_2\mathbf{j}+R_3\mathbf{k},\quad \mathbf{u}_c=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}=M_1\mathbf{i}+M_2\mathbf{j}+M_3\mathbf{k}=M_{11}\mathbf{i}_1+M_{21}\mathbf{j}_1+M_{31}\mathbf{k}_1$$

$$\boldsymbol{\omega}=\Omega_1\mathbf{i}+\Omega_2\mathbf{j}+\Omega_3\mathbf{k}=\omega_1\mathbf{i}_1+\omega_2\mathbf{j}_1+\omega_3\mathbf{k}_1$$

$$\mathbf{L}_c=I_1\omega_1\mathbf{i}+I_2\omega_2\mathbf{j}_1+I_3\omega_3\mathbf{k}_1$$

Здесь m и I_k — масса и главные моменты инерции тела; $\mathbf{u}_c$, $\mathbf{L}_c$ и $\boldsymbol{\omega}$ — вектора смещения центра масс, момента количества движения относительно точки O_1 и угловой скорости тела; $\mathbf{R}_e$, $\mathbf{M}_e$, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}$ — внешние и контактные результирующие силы и моменты относительно O_1, действующие на тело; φ, ψ, ϑ — углы Эйлера; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ — орты соответствующих систем координат (точками обозначено дифференцирование по времени t).

Координаты векторов в указанных системах координат связаны между собой элементами матрицы перехода β_{ij}:

$$(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3)B^T,\quad B=(\beta_{ij})_{3\times 3} \tag{1.2}$$

$$\beta_{11}=\cos\varphi\cos\psi-\cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi,\quad \beta_{12}=\sin\psi\cos\varphi+\cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi$$

$$\beta_{13}=\sin\vartheta\sin\varphi,\quad \beta_{21}=-\cos\psi\sin\varphi-\cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi$$

$$\beta_{22}=-\sin\psi\sin\varphi+\cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi,\quad \beta_{23}=\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$\beta_{31}=\sin\vartheta\sin\psi,\quad \beta_{32}=-\sin\vartheta\cos\psi,\quad \beta_{33}=\cos\vartheta$$

Добавим к системе уравнений (1.1), (1.2) начальные условия, определяющие положение тела в начальный момент контакта:

$$\mathbf{u}_c|_{t=0}=\mathbf{u}_{c0},\quad \mathbf{u}_c^{\boldsymbol\cdot}|_{t=0}=\mathbf{V}_{c0},\quad \varphi|_{t=0}=\varphi_0 \tag{1.3}$$
$$\psi|_{t=0}=\psi_0,\ \vartheta|_{t=0}=\vartheta_0,\ \omega|_{t=0}=\omega_0$$

Для замыкания соотношений (1.1)–(1.3) необходимо определить результирующие контактные силу **R** и момент **M**. В общем случае для их нахождения совместно с указанной системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений должна рассматриваться начально-краевая задача линейной теории упругости с граничными условиями смешанного типа на плоскости $z=0$. Однако на некотором начальном этапе взаимодействия скорость расширения области контакта Ω больше скорости c_1 и возмущение не будет выходить за пределы Ω. Таким образом, на этом временном интервале условие отсутствия напряжений вне области Ω эквивалентно равенству нулю перемещений, что позволяет в явном виде связать контактные усилия и скорости движения твердого тела.

Учитывая линейность задачи, будем иметь

$$R_k=\iint\limits_{\Omega(t)}\sigma_{k3}|_{z=0}\,dx\,dy\qquad(k=1,2,3) \tag{1.4}$$
$$\mathbf{M}=\mathbf{M}_O-[\mathbf{u}_c,\mathbf{R}],\quad \mathbf{M}_O=M_{O1}\mathbf{i}+M_{O2}\mathbf{j}+M_{O3}\mathbf{k}$$
$$M_{O1}=\iint\limits_{\Omega(t)}y\sigma_{33}|_{z=0}\,dx\,dy,\quad M_{O2}=-\iint\limits_{\Omega(t)}x\sigma_{33}|_{z=0}\,dx\,dy$$
$$M_{O3}=\iint\limits_{\Omega(t)}(x\sigma_{23}|_{z=0}=y\sigma_{13}|_{z=0})\,dx\,dy$$

Используя свойства двойного преобразования Фурье по x и y (знаком F обозначена трансформанта, p и q — параметры преобразования) и характер граничных условий на плоскости $z=0$, аналогично [2] найдем

$$R_k=\iint\limits_{\Omega}\sigma_{k3}|_{z=0}\,dx\,dy=\lim_{p,q\to0}\iint\limits_{R_2}\sigma_{k3}|_{z=0}\exp[i(px+qy)]\,dx\,dy=\sigma_{k3}^F(t,0,0,0)$$
$$M_{O1}=-i\lim_{p,q\to0}\frac{\partial}{\partial q}\sigma_{33}^F(t,p,q,0),\quad M_{O2}=i\lim_{p,q\to0}\frac{\partial}{\partial p}\sigma_{33}^F(t,p,q,0) \tag{1.5}$$
$$M_{O3}=i\lim_{p,q\to0}\left[\frac{\partial}{\partial q}\sigma_{13}^F(t,p,q,0)-\frac{\partial}{\partial p}\sigma_{23}^F(t,p,q,0)\right]$$

2. Движение упругой среды определяется уравнениями [3]:

$$\Phi^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}=\Delta\Phi,\quad \eta^2\Psi^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}=\Delta\Psi,\quad \operatorname{div}\Psi=0 \tag{2.1}$$
$$\eta^2=c_1^2/c_2^2,\quad \mathbf{u}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}=\operatorname{grad}\Phi+\operatorname{rot}\Psi$$

где Φ, Ψ — упругие потенциалы, **u** — вектор перемещения упругой среды, c_1 и c_2 — скорости распространения волн расширения — сжатия и сдвига. Компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с компонентами вектора перемещения известными соотношениями линейной теории упругости.

Начальные условия для уравнений (2.1) нулевые. Возмущения на бесконечности отсутствуют. Ограничиваясь рассмотрением контакта в условиях свободного проскальзывания, граничные условия при $z=0$ запишем так:

$$\sigma_{13}|_{z=0}=\sigma_{23}|_{z=0}=0 \tag{2.2}$$
$$w|_{z=0}=w_0(t,x,y)=W(t,x,y)H[\Omega(t)]$$

где $H(\Omega)$ — характеристическая функция области Ω.

Применяя к задаче (2.1), (2.2) двойное преобразование Фурье по x, y и Лапласа по t (знак L обозначает трансформанту, s — параметр преобразования), с учетом формул (1.5) получим

$$R_1=R_2=0, \quad M_{O3}=0 \tag{2.3}$$

$$R_3{}^L(s)=-sw_0{}^{FL}(s,0,0)=-s\left[\iint\limits_{\Omega(t)} W(t,x,y)\,dx\,dy\right]^L$$

$$M_{O1}{}^L(s)=-s\left[\iint\limits_{\Omega(t)} yW(t,x,y)\,dx\,dy\right]^L,$$

$$M_{O2}{}^L(s)=s\left[\iint\limits_{\Omega(t)} xW(t,x,y)\,dx\,dy\right]^L$$

Используя свойства преобразования Лапласа и дифференцирование интеграла по переменной области [3], из (2.3) найдем формулы для контактных усилия и моментов

$$R_3=-u_3{}^{\cdot}S+\Omega_2S_1{}^*-\Omega_1S_2{}^*, \quad S_1{}^*=S_1-u_1S \tag{2.4}$$

$$M_{O1}=-u_3{}^{\cdot}S_2{}^*-\Omega_1I_{22}{}^*+\Omega_2I_{12}{}^*, \quad S_2{}^*=S_2-u_2S$$

$$M_{O2}=u_3{}^{\cdot}S_1{}^*+\Omega_1I_{12}{}^*-\Omega_2I_{11}{}^*, \quad I_{11}{}^*=I_{11}-2u_1S_1+u_1{}^2S$$

$$I_{22}{}^*=I_{22}-2u_2S_2+u_2{}^2S, \quad I_{12}{}^*=I_{12}-u_2S_1-u_1S_2+u_1u_2S$$

Здесь S, S_k, I_{kl} — площадь, статические моменты и моменты инерции области $\Omega(t)$ относительно системы координат Oxy; $S_k{}^*$ и $I_{kl}{}^*$ определяют аналогичные геометрические характеристики относительно системы $O_2x_2y_2$, полученной параллельным переносом Oxy в плоскости $z=0$ в точку O_2 — проекцию центра тяжести тела O_1 на плоскость $z=0$.

Для определения геометрических характеристик в формулах (2.4) необходимо знать границу $\partial\Omega$ области Ω. Предполагая, что поверхность S задана параметрически в связанной системе координат в виде $\mathbf{r}_1=x_1\mathbf{i}_1+$ $+y_1\mathbf{j}_1+z_1\mathbf{k}_1=\chi_1(\xi_1,\xi_2)\mathbf{i}_1+\chi_2(\xi_1,\xi_2)\mathbf{j}_1+\chi_3(\xi_1,\xi_2)\mathbf{k}_1$, $(\xi_1,\xi_2)\in D$, определим $\partial\Omega$ как кривую, лежащую в пересечении поверхностей S и $z=0$. Тогда с учетом формул (1.2) найдем параметрическое представление $\partial\Omega$:

$$x=u_1+\sum_{k=1}^{3}\beta_{k1}\chi_k(\xi_1,\xi_2) \tag{2.5}$$

$$y=u_2+\sum_{k=1}^{3}\beta_{k2}\chi_k(\xi_1,\xi_2), \quad 0=u_3+\sum_{k=1}^{3}\beta_{k3}\chi_k(\xi_1,\xi_2)$$

Таким образом, соотношения (1.1)—(1.3), (2.4) и (2.5) определяют задачу Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть решена любым известным методом. При этом не требуется интегрирования уравнений теории упругости.

В случае конкретного задания класса поверхностей могут быть получены явные формулы для геометрических характеристик в (2.4). В частности, из полученных формул следует результат, найденный в [2]. С другой стороны, например, при плоскопараллельном движении в плоскости Oxz эллипсоида с полуосями a, b и c можно найти:

$$S=\pi a_2 b_2, \quad S_1^*=x_{20}S, \quad I_{11}^*=(x_{20}^2+a^2/4)S$$

$$a_2^2=a^2c^2k^{-2}(1-u_3^2k^{-2}), \quad b_2^2=b^2(1-u_3^2k^{-2})$$

$$x_{20}=(a^2-c^2)k^{-2}u_3\sin\vartheta\cos\vartheta, \; k^2=a^2\sin^2\vartheta+b^2\cos^2\vartheta$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2. Л.; М. ОНТИ. 1937. 998 с.
2. *Симонов И. В.* Динамическая задача о вдавливании осесимметричного штампа в упругое полупространство // Инж. ж. МТТ. 1967. № 2. С. 163—165.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М.: Наука. 1973. Т. 1. 536 с.; Т. 2. 584 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.I.1987