

УДК 539.3

О СООТНОШЕНИЯХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ, МАТЕРИАЛ КОТОРЫХ ПО-РАЗНОМУ СОПРОТИВЛЯЕТСЯ РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ

САРКИСЯН М. С.

В связи с применением в современной технике материалов, механические характеристики которых при растяжении и сжатии различны, все чаще обсуждается вопрос построения теории упругости, учитывающей этот фактор.

Предложены различные модели изотропных материалов, описывающие разномодульность [1]. К изотропным разномодульным относятся материалы, упругие поведения которых характеризуются различными модулями Юнга и коэффициентами Пуассона: при растяжении E^+ , ν^+ и при сжатии E^- , ν^- . Очевидно, что использование той или иной модели связано со степенью соответствия теоретических результатов экспериментальным данным. Однако в большинстве предложенных моделей требуется выполнение некоторых условий, связывающих упругие коэффициенты, что заранее сужает класс рассматриваемых разномодульных материалов.

В публикуемой работе предлагается простейшая модель, обобщающая закон Гука, для изотропных разномодульных материалов, имеющих четыре независимых упругих коэффициента E^+ , E^- , ν^+ , ν^- , которые определяются из эксперимента на одноосное растяжение и сжатие. Модель построена с помощью феноменологического подхода, принятого в механике деформируемого твердого тела при описании поведения изотропных материалов [2-5]. Уравнение потенциала деформаций определяется исходя из его физической и геометрической интерпретации в пространстве главных напряжений. В случае малых деформаций потенциальная поверхность равного уровня представляет собой гладкую поверхность, которая состоит из сопряженных эллиптических поверхностей. При этом связи между главными напряжениями и деформациями будут кусочно-линейными. Разномодульность описывается знаками двух инвариантов: первого инварианта тензора напряжений и нечетного инварианта его девиатора (угла вида напряженного состояния или параметра Надаи — Лоде). В общем случае полученные соотношения между компонентами тензоров напряжений и деформаций, вследствие неподобия их девиаторов, являются нелинейными. В частных случаях, когда совпадают два главных значения тензора напряжений или деформаций, девиаторы будут подобными, а соотношения станут линейными. Показано, что с помощью указанного подхода можно ввести понятие предельной поверхности нагружения и обобщить теорию прочности и пластичности для изотропных материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию.

Предлагаемая модель сопоставляется с аналогичной моделью [1, 6]. Установлено, что при линейных соотношениях между главными напряжениями и деформациями нарушена пропорциональность шаровых частей тензоров напряжений и деформаций, поэтому модель [1, 6] неправильно описывает поведение изотропных разномодульных материалов.

1. При определении связи между напряжениями и деформациями будем исходить из существования потенциалов напряжений V и деформаций W упругого тела

$$\sigma_{ij} = \partial V / \partial \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \partial W / \partial \sigma_{ij}, \quad V + W = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (1.1)$$

где σ_{ij} — тензор напряжений, ε_{ij} — тензор малых деформаций. Для изотропных тел V и W будут функциями только от инвариантов тензоров ε_{ij} и σ_{ij} соответственно.

Потенциал напряжений можно полагать зависящим от трех главных компонентов тензора деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и представить степенным рядом Тейлора по выбранным аргументам. В силу малости деформаций ограничимся только первыми, т. е. квадратичными членами ряда. Тогда согласно (1.1) соотношения между главными компонентами ε_i и σ_i будут линей-

ными и их можно представить разрешенными относительно деформаций

$$\varepsilon_i = a_{ij} \sigma_j \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.2)$$

где a_{ij} — постоянные коэффициенты ($a_{ij} = a_{ji}$). Из (1.1), (1.2) следует, что W — однородная квадратичная функция главных напряжений

$$W = \frac{1}{2} a_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (1.3)$$

а потенциалы напряжений и деформаций равны между собой: $V = W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$. В дальнейшем целесообразно тензоры напряжений и деформаций представить в виде суммы девиатора и шаровой части

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij}, \quad \sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{1}{3} \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = \sigma_{ii}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{ii} \quad (1.4)$$

Вследствие соосности тензоров σ_{ij} и ε_{ij} смешанный инвариант $W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ представляется в следующих формах:

$$W = \frac{1}{6} \sigma \varepsilon + \frac{1}{2} s_i e_i = \frac{1}{6} \sigma \varepsilon + T \Gamma \cos(\psi - \varphi) \quad (1.5)$$

Главные компоненты девиатора напряжений s_i выражаются через интенсивность касательных напряжений T и угол вида напряженного состояния ψ следующим образом [2]:

$$s_i = (2/\sqrt{3}) T \sin \psi_i, \quad \psi_1 = \psi + 2\pi/3, \quad \psi_2 = \psi, \quad \psi_3 = \psi - 2\pi/3 \quad (1.6)$$

$$T^2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}, \quad \sin 3\psi = -(\sqrt{3}/2) T^{-3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} \quad (-\pi/6 \leq \psi \leq \pi/6) \quad (1.7)$$

Здесь и в дальнейшем нумерация главных напряжений принята так, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Вместо ψ можно ввести параметр Надаи — Лоде $\mu = \sqrt{3} \operatorname{tg} \psi$. Аналогичные выражения можно написать для компонентов девиатора деформаций

$$e_i = (2/\sqrt{3}) \Gamma \sin \varphi_i, \quad \varphi_1 = \varphi + 2\pi/3, \quad \varphi_2 = \varphi, \quad \varphi_3 = \varphi - 2\pi/3 \quad (1.8)$$

$$\Gamma^2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij}, \quad \sin 3\varphi = -(\sqrt{3}/2) \Gamma^{-3} e_{ij} e_{jk} e_{ki} \quad (-\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/6) \quad (1.9)$$

Коэффициенты a_{ij} в (1.2) не являются произвольными. Для изотропных материалов функция инвариантов напряжений (1.3) может представлять собой возможный потенциал деформаций в том случае, когда она удовлетворяет определенным требованиям, вытекающим из соображений симметричности и невогнутости потенциальной поверхности.

Принимая во внимание, что в реальных изотропных телах напряжения вида $\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \sigma \delta_{ij}$ вызывают только деформации вида $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij}$ [2], из (1.2) получим следующее условие:

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{12} + a_{22} + a_{23} = a_{13} + a_{23} + a_{33} = \frac{1}{3} b \quad (1.10)$$

где b — коэффициент пропорциональности, который вообще будет различным при всестороннем растяжении и сжатии.

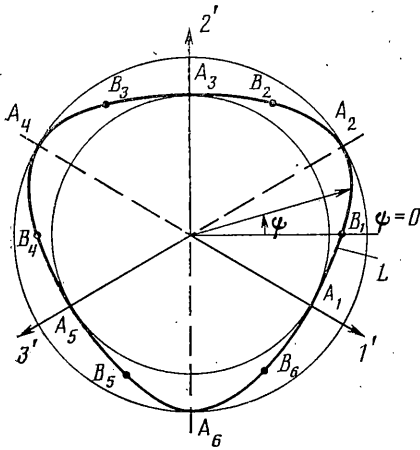
При условии (1.10) удельная энергия деформаций (1.3) разделяется на две части: упругую энергию изменения объема W_a и упругую энергию изменения формы W_b (a_i — постоянные коэффициенты)

$$W = W_a + W_b, \quad W_a = \frac{1}{18} b \sigma^2, \quad W_b = \frac{1}{2} (a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2 + a_3 s_3^2) \quad (1.11)$$

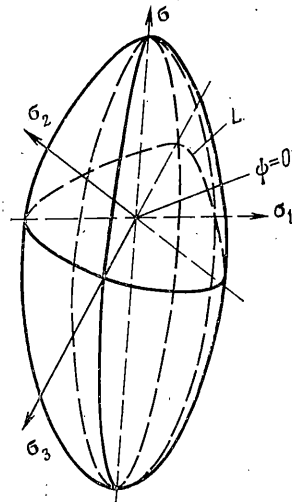
Представление потенциала деформации в виде (1.11) означает, что при линейных связях (1.2) имеет место пропорциональная зависимость между ε и σ , при этом девиаторные плоскости тензоров σ_{ij} и ε_{ij} совпадают.

Для геометрической интерпретации потенциальной поверхности $W = \text{const}$, $W_b = \text{const}$ в пространстве главных напряжений удобно их отнести к цилиндрической системе координат $W = W(\sigma, T, \psi)$, $W_b = W_b(T, \psi)$, где σ — ось этой системы, совпадает с гидростатической осью $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, T — полярный радиус, ψ — полярный угол.

Функция W_b интерпретируется совокупностью цилиндрических поверхностей равного уровня W_b , образующие которых перпендикулярны к девиаторной плоскости $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ [4]. Для построения этих поверх-



Фиг. 1



Фиг. 2

ностей достаточно рассмотреть свойства кривой L , являющейся пересечением поверхности W_b и девиаторной плоскости (фиг. 1).

Для изотропных материалов потенциальная поверхность W должна быть симметричной относительно трех плоскостей меридианов, содержащих главные направления. Это означает, что кривая L симметрична относительно осей $1'$, $2'$, $3'$, являющихся проекциями главных осей на девиаторной плоскости, и состоит из шести одинаковых дуг. Для построения L достаточно знать ее в диапазоне изменения $(-\pi/6 \leq \psi \leq \pi/6)$, чтобы затем восстановить остальные части по свойствам симметрии.

Если материал тела изотропный и одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то кривая L , кроме того, должна быть симметрична и относительно прямых, перпендикулярных к осям $1'$, $2'$, $3'$, а вся потенциальная поверхность W — симметрична относительно девиаторной плоскости. В этом случае кривая L состоит из двенадцати одинаковых дуг с углом $\pi/6$. Если, учитывая условия симметричности, принять в (1.10), (1.11) коэффициенты $b=1/K$, $a_i=1/2G$, то получим потенциал деформаций

$$W = 1/18 \sigma^2 / K + 1/2 T^2 / G \quad (1.12)$$

соответствующий упругому изотропному материалу Гука, где G — модуль сдвига, K — модуль объемной деформации. Потенциальная поверхность (1.12) представляет собой эллипсоид вращения с осью $T=0$, симметричный относительно девиаторной плоскости. Кривая L изображается окружностью с центром в точке $T=0$, $\sigma=0$.

Когда материал тела по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, нарушается симметричность потенциальной поверхности относительно девиаторной плоскости и меридиональных плоскостей, перпендикулярных к осям $1'$, $2'$, $3'$. Поэтому функция $W=W(\sigma, T, \psi)$ не должна быть четной относительно аргументов σ и ψ . В данном случае вследствие квадратичности функций (1.11) этим требованиям невозможно удовлетворить с помощью одной гладкой аналитической функции W . Поэтому представим ее в виде сопряженных гладких поверхностей, удовлетворяющих (1.10), (1.11) [4].

Как видно из (1.6), при $(-\pi/6 \leq \psi \leq \pi/6)$ из главных компонент девиатора напряжений меняет знак только s_2 , при этом в интервале $(-\pi/6 \leq \psi \leq 0)$: $s_1 > 0$, $s_2 \leq 0$, $s_3 < 0$, в интервале $(0 \leq \psi \leq \pi/6)$: $s_1 > 0$, $s_2 \geq 0$, $s_3 < 0$.

Для напряженных состояний $s_1 > 0$, $s_2 \leq 0$, $s_3 < 0$, принимая $a_1 \neq a_2 = a_3$, упругую энергию фотоизостенения (1.11) представим в виде

$$W_b = a_3 T^2 + 1/2 (a_1 - a_3) s_1^2 = 1/4 (2a_1 + a_3) s_1^2 + 1/4 a_3 (s_3 - s_2)^2 \quad (1.13)$$

Для напряженных состояний $s_1 > 0$, $s_2 \geq 0$, $s_3 < 0$, принимая $a_1 = a_2 \neq a_3$, будем иметь

$$W_b = a_1 T^2 + \frac{1}{2} (a_3 - a_1) s_3^2 = \frac{1}{4} (2a_3 + a_1) s_3^2 + \frac{1}{4} a_1 (s_1 - s_2)^2 \quad (1.14)$$

В зависимости от знака σ упругая энергия изменения объема представляется в следующем виде:

$$W_a = \frac{1}{18} b_1 \sigma^2 \quad (\sigma \geq 0), \quad W_a = \frac{1}{18} b_2 \sigma^2 \quad (\sigma \leq 0) \quad (1.15)$$

Рассматривая потенциал деформации как функцию $W = W(\sigma, T, \psi)$, представим выражения (1.14), (1.15) в виде

$$W_b = T^2 [a_3 \cos^2(\psi + 2\pi/3) + \frac{1}{3} (2a_1 + a_3) \sin^2(\psi + 2\pi/3)] \quad (-\pi/6 \leq \psi \leq 0) \quad (1.16)$$

$$W_b = T^2 [a_1 \cos^2(\psi - 2\pi/3) + \frac{1}{3} (2a_3 + a_1) \sin^2(\psi - 2\pi/3)] \quad (0 \leq \psi \leq \pi/6)$$

Из (1.16) видно, что на девиаторной плоскости кривая L состоит из двух дуг эллипсов с различными эксцентриситетами, сопряженными в точке $\psi = 0$, где совпадают значения функций (1.16) и их первых производных, но вторые производные не совпадают.

Если отбросить ограничение $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, относящееся к изменению угла ψ (1.7), то кривая L будет состоять из дуг различных эллипсов (1.16), сопряженных в точках B_1, B_2, \dots, B_6 (фиг. 1). Потенциальная поверхность деформации, которая интерпретируется функцией $W = W_a + W_b$, состоит из совокупности эллиптических поверхностей, она является гладкой, так как на границах раздела смежных поверхностей $s_k = 0$, $\sigma = 0$ непрерывны функции W и их первые производные (фиг. 2).

Условие невогнутости потенциальной поверхности относительно начала координат требует, чтобы кривизна кривой L сохранила знак. Поэтому из формулы кривизны кривой $W = \text{const}$ в полярных координатах $T = T(\psi)$ следует, что $T^2 + 2T'' - TT''$. Для (1.16) это условие выполняется, если $a_1 \geq 0$, $a_3 \geq 0$. Из (1.15) получим условие для коэффициентов $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$.

2. Из (1.1), (1.13)–(1.16) следует, что для установления связей между напряжениями и деформациями, можно пользоваться формулами

$$e_{ij} = \partial W / \partial \sigma_{ij}, \quad \varepsilon = 3 \partial W / \partial \sigma \quad (2.1)$$

и определить в отдельности шаровые и девиаторные части тензора деформаций. При этом производные инвариантов по компонентам тензора σ_{ij} определяются следующим образом [7]:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{ij}} = l_i l_j, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_{ij}} = m_i m_j, \quad \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_{ij}} = n_i n_j, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial T^2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij} \quad (2.2)$$

$$\partial \psi / \partial \sigma_{ij} = -\frac{1}{2} \Omega_{ij}^\sigma / (T^3 \cos 3\psi), \quad \Omega_{ij}^\sigma = T \sin 3\psi s_{ij} + \sqrt{3} (s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} T^2 \delta_{ij})$$

где l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы главных осей тензоров σ_{ij} относительно системы координат x_i . Согласно (1.6), (2.2), они выражаются через компоненты и инварианты девиатора s_{ij} или e_{ij} [7].

Согласно (2.1), (2.2), (1.13)–(1.15), получим соотношения закона упругости в следующей форме:

$$e_{ij} = a_3 s_{ij} + (a_1 - a_3) s_1 (l_i l_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}) \quad (-\pi/6 \leq \psi \leq 0) \quad (2.3)$$

$$e_{ij} = a_1 s_{ij} + (a_3 - a_1) s_3 (n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}) \quad (0 \leq \psi \leq \pi/6)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} b_1 \sigma \quad (\sigma \geq 0), \quad \varepsilon = \frac{1}{3} b_2 \sigma \quad (\sigma \leq 0) \quad (2.4)$$

Соотношения (2.3) в главных значениях удобно представить в виде

$$e_1 = \frac{1}{3} (2a_1 + a_3) s_1, \quad e_3 - e_2 = a_3 (s_3 - s_2) \quad (s_2 \leq 0)$$

$$e_3 = \frac{1}{3} (2a_3 + a_1) s_3, \quad e_1 - e_2 = a_1 (s_1 - s_2) \quad (s_2 \geq 0) \quad (2.5)$$

позволяющем легко записать связи между инвариантами (1.7), (1.9) девиаторов напряжений и деформаций

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\psi - \varphi) &= (a_1 - a_3) \sin 2(\psi + \pi/6) / [(2a_1 + a_3) + 2(a_3 - a_1) \sin^2(\psi + \pi/6)] \\ \Gamma &= T [a_3^2 \sin^2(\psi + \pi/6) + 1/9(2a_1 + a_3)^2 \cos^2(\psi + \pi/6)]^{1/2} \quad (-\pi/6 \leq \psi \leq 0) \quad (2.6) \\ \operatorname{tg}(\psi - \varphi) &= (a_3 - a_1) \sin 2(\psi - \pi/6) / [(2a_3 + a_1) + 2(a_1 - a_3) \sin^2(\psi - \pi/6)] \\ \Gamma &= T [a_1^2 \sin^2(\psi - \pi/6) + 1/9(2a_3 + a_1)^2 \cos^2(\psi - \pi/6)]^{1/2} \quad (0 \leq \psi \leq \pi/6) \end{aligned}$$

При значениях $\psi = \pm \pi/6$, $\varphi = \pm \pi/6$, т. е. когда совпадают два главных компонента тензора напряжений или деформаций, девиаторы будут подобными, а соотношения станут линейными.

Значению $\psi = 0$, т. е. напряженным состояниям, когда $s_1 = -s_3$, $s_2 = 0$, соответствует угол φ^* , определяемый из уравнения

$$\operatorname{tg} \varphi^* = (a_3 - a_1) / [\sqrt{3}(a_1 + a_3)] \quad (2.7)$$

который разделяет интервал изменения угла φ на две части: $-\pi/6 \leq \varphi \leq \varphi^*$, относящуюся к напряженным состояниям ($-\pi/6 \leq \psi \leq 0$), и $\varphi^* \leq \varphi \leq \pi/6$, относящуюся к деформированным состояниям ($0 \leq \psi \leq \pi/6$).

Значению $\varphi = 0$, т. е. деформированным состояниям $e_1 = -e_3$, $e_2 = 0$, соответствует угол ψ^* , который определяется следующим образом:

$$\operatorname{tg} \psi^* = \sqrt{3}(a_1 - a_3) / (5a_3 + a_1) \quad (-\pi/6 \leq \psi \leq 0) \quad (2.8)$$

$$\operatorname{tg} \psi^* = \sqrt{3}(a_1 - a_3) / (5a_1 + a_3) \quad (0 \leq \psi \leq \pi/6) \quad (2.9)$$

При этом, если $a_1 < a_3$, то угол ψ^* определяется из (2.8), а если $a_1 > a_3$ — из (2.9).

Отметим, что соотношения (2.3); (2.4) можно разрешить относительно напряжений. Принимая во внимание (2.5), получим

$$s_{ij} = \frac{1}{a_3} e_{ij} + \frac{3(a_3 - a_1)}{a_3(2a_1 + a_3)} e_1 (l_i l_j - 1/3 \delta_{ij}) \quad \left(-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \varphi^* \right) \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \frac{1}{a_1} e_{ij} + \frac{3(a_1 - a_3)}{a_1(2a_3 + a_1)} e_3 (n_i n_j - 1/3 \delta_{ij}) \quad \left(\varphi^* \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} \right) \\ \sigma &= 3\varepsilon/b_1 \quad (\varepsilon \geq 0), \quad \sigma = 3\varepsilon/b_2 \quad (\varepsilon \leq 0) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Потенциал напряжений V — удельная потенциальная энергия деформаций, представляется в виде суммы $V = V_a + V_b$, где V_a — работа внутренних сил при изменении объема, V_b — работа при формоизменении

$$V_a = \varepsilon^2 / (2b_1) \quad (\varepsilon \geq 0), \quad V_a = \varepsilon^2 / (2b_2) \quad (\varepsilon \leq 0)$$

$$V_b = 3\Gamma^2 / (2a_1 + a_3) + 2\Gamma^2 \sin^2(\varphi + \pi/6) (a_1 - a_3) / [a_3(2a_1 + a_3)] \quad (-\pi/6 \leq \varphi \leq \varphi^*) \quad (2.12)$$

$$V_b = 3\Gamma^2 / (2a_3 + a_1) + 2\Gamma^2 \sin^2(\varphi - \pi/6) (a_3 - a_1) / [a_1(2a_3 + a_1)] \quad (\varphi^* \leq \varphi \leq \pi/6)$$

3. Для определения упругих постоянных достаточно провести опыты на одноосное растяжение ($\sigma_1 = \sigma_{11}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma = \sigma_{11} > 0$, $\psi = -\pi/6$) и сжатие ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma_{11}$, $\sigma = -\sigma_{11} < 0$, $\psi = \pi/6$) образца. Будем иметь

$$\begin{aligned} a_1 &= 2(1 + \nu^+) / E^+ - (1 + \nu^-) / E^-, \quad a_3 = 2(1 + \nu^-) / E^- - (1 + \nu^+) / E^+ \\ b_1 &= 3(1 - 2\nu^+) / E^+, \quad b_2 = 3(1 - 2\nu^-) / E^- \end{aligned}$$

В дальнейшем удобно ввести обозначения $G^+ = 1/2 E^+ / (1 + \nu^+)$, $G^- = 1/2 E^- / (1 + \nu^-)$, $K^+ = 1/3 E^+ / (1 - 2\nu^+)$, $K^- = 1/3 E^- / (1 - 2\nu^-)$ и соотношения (2.3), (2.4) представить в следующем виде:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{G^-} - \frac{1}{G^+} \right) s_{ij} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{G^+} - \frac{1}{G^-} \right) s_1 \left(l_i l_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \quad \left(-\frac{\pi}{6} \leq \psi \leq 0 \right)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{G^+} - \frac{1}{G^-} \right) s_{ij} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{G^-} - \frac{1}{G^+} \right) s_3 \left(n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \quad \left(0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\varepsilon = {}^1/3 \sigma / K^+ \quad (\sigma \geq 0), \quad \varepsilon = {}^1/3 \sigma / K^- \quad (\sigma \leq 0) \quad (3.1)$$

Из закона упругости объемной деформации следует, что, хотя коэффициенты K^+ и K^- установлены при одноосном растяжении и сжатии, они являются модулями всестороннего растяжения и сжатия.

С помощью (2.2) в соотношениях (2.3), (2.10) направляющие косинусы исключаются и представляются в формах, независимых от направленных главных напряжений:

$$e_{ij} = (W_b/T^2) [s_{ij} + \Omega_{ij}^\sigma T^{-1} \operatorname{tg}(\psi - \varphi) / \cos 3\varphi] \quad (3.2)$$

$$s_{ij} = (V_b/\Gamma^2) [e_{ij} + \Omega_{ij}^\varepsilon \Gamma^{-1} \operatorname{tg}(\varphi - \psi) / \cos 3\varphi] \quad (3.3)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi - \psi) = (1/W_b) \partial W_b / \partial \psi, \quad \operatorname{tg}(\psi - \varphi) = (1/V_b) \partial V_b / \partial \varphi$$

Эти соотношения при известных функциях $W_b(T, \psi)$, $V_b(\Gamma, \varphi)$ (4.16), (2.12) получаются также из общих зависимостей [2] между двумя соосными тензорами второго ранга.

4. В случае изотропного разномодульного материала на основании соосности тензоров σ_{ij} , ε_{ij} элементарную работу деформации $dV = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \sigma_i d\varepsilon_i$ и элементарную дополнительную работу $dW = \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} = \varepsilon_i d\sigma_i$ целесообразно представить в следующих формах:

$$dV = {}^1/3 \sigma d\varepsilon + {}^3/2 s_1 d\varepsilon_1 + 2\tau_1 d\gamma_1, \quad dW = {}^1/3 \varepsilon d\sigma + {}^3/2 e_1 d\sigma_1 + 2\gamma_1 d\tau_1$$

$$dV = {}^1/3 \sigma d\varepsilon + {}^3/2 s_3 d\varepsilon_3 + 2\tau_3 d\gamma_3, \quad dW = {}^1/3 \varepsilon d\sigma + {}^3/2 e_3 d\sigma_3 + 2\gamma_3 d\tau_3$$

$$\tau_1 = {}^1/2 (s_3 - s_2), \quad \tau_3 = {}^1/2 (s_2 - s_1), \quad \gamma_1 = {}^1/2 (e_3 - e_2), \quad \gamma_3 = {}^1/2 (e_2 - e_1) \quad (4.1)$$

В выражениях (4.1) выделены два набора независимых инвариантов тензоров σ_{ij} и ε_{ij} : для напряженных состояний ($-\pi/6 \leq \psi \leq 0$) и напряженных состояний ($0 \leq \psi \leq \pi/6$) соответственно.

$$\sigma, s_1 = (2/\sqrt{3}) T \sin \psi_1, \quad \tau_1 = T \cos \psi_1, \quad \varepsilon, e_1 = (2/\sqrt{3}) \Gamma \sin \varphi_1, \quad \gamma_1 = \Gamma \cos \varphi_1 \quad (4.2)$$

$$\sigma, s_3 = (2/\sqrt{3}) T \sin \psi_3, \quad \tau_3 = T \cos \psi_3, \quad \varepsilon, e_3 = (2/\sqrt{3}) \Gamma \sin \varphi_3, \quad \gamma_3 = \Gamma \cos \varphi_3 \quad (4.3)$$

которые линейным образом выражаются через главные инварианты σ_i и ε_i . Заметим, что знаки соответствующих инвариантов девиаторов напряжений и деформаций в наборах (4.2), (4.3) при указанных интервалах совпадают и не изменяются.

Инварианты (4.2), (4.3) могут быть приняты в качестве независимых обобщенных напряжений и деформаций в полных дифференциалах (4.1).

Рассматривая потенциалы напряжений и деформаций как функции одного из наборов (4.2), (4.3): $\bar{V} = V(\varepsilon, e_k, \gamma_k)$, $\bar{W} = W(\sigma, s_k, \tau_k)$ ($k=1, 3$), будем иметь

$$\sigma = 3\partial V/\partial \varepsilon, \quad s_k = {}^2/3 \partial V/\partial e_k, \quad \tau_k = {}^1/2 \partial V/\partial \gamma_k$$

$$\varepsilon = 3\partial W/\partial \sigma, \quad e_k = {}^2/3 \partial W/\partial s_k, \quad \gamma_k = {}^1/2 \partial W/\partial \tau_k \quad (4.4)$$

Сравнивая (4.2), (4.3) и (4.4), получим

$$T^2 = {}^1/3 (\partial V/\partial e_k)^2 + {}^1/4 (\partial V/\partial \gamma_k)^2, \quad \Gamma^2 = {}^1/3 (\partial W/\partial s_k)^2 + {}^1/4 (\partial W/\partial \tau_k)^2$$

$$\operatorname{tg} \psi_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial V}{\partial e_k} : \frac{\partial V}{\partial \gamma_k}, \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial W}{\partial s_k} : \frac{\partial W}{\partial \tau_k}$$

Из (4.4) вытекают следующие дифференциальные соотношения между инвариантами напряжений и деформаций (4.2), (4.3):

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \sigma}{\partial e_k} &= 9 \frac{\partial s_k}{\partial \varepsilon}, & \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma_k} &= 6 \frac{\partial \tau_k}{\partial \varepsilon}, & 3 \frac{\partial s_k}{\partial \gamma_k} &= 4 \frac{\partial \tau_k}{\partial e_k} \\ 2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_k} &= 9 \frac{\partial e_k}{\partial \sigma}, & \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau_k} &= 6 \frac{\partial \gamma_k}{\partial \sigma}, & 3 \frac{\partial e_k}{\partial \tau_k} &= 4 \frac{\partial \gamma_k}{\partial s_k} \end{aligned}$$

Выражение смешанного инварианта $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = V + W$ также представляется при помощи инвариантов (4.2), (4.3). В частности, при линейных соотношениях (1.2) $V = W$, поэтому имеем (по k не суммировать):

$$V = W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{6} \sigma \varepsilon + \frac{3}{4} s_k e_k + \tau_k \gamma_k \quad (4.5)$$

Сравнивая (2.5) с (4.1), (4.5), можно заметить, что соотношения (2.5) эквивалентны пропорциональности инвариантов (4.2), (4.3).

Таким образом, модель изотропного разномодульного материала при связях (1.2) может быть введена эквивалентными путями: через построения квадратичных потенциалов деформаций или введение пропорциональных связей между инвариантами (4.2), (4.3); при которых правые части (4.1) интегрируются. В обоих случаях следует удовлетворять условия непрерывности и невогнутости смежных потенциальных поверхностей.

5. Модель упругого разномодульного материала при кусочно-линейных связях между главными напряжениями и деформациями была предложена в [6]. Согласно этой модели, в зависимости от комбинаций знаков трех главных напряжений выделяются различные напряженные состояния и для них путем наложения деформаций в главных направлениях устанавливаются соотношения упругости. С помощью такого подхода были построены потенциалы деформаций и напряжений в [7]. Отметим некоторые из недостатков этого подхода.

В [1, 6, 7] в соотношениях упругости требуется выполнение условия $v^+ / E^+ = -v^- / E^-$, вследствие чего разномодульный материал характеризуется тремя независимыми упругими коэффициентами. При этом объемная деформация существенным образом зависит от комбинаций знаков трех главных напряжений: она может происходить также от чистого сдвига. Материал может быть несжимаемым только при одновременном выполнении $E^+ = E^-$, $v^+ = v^- = 1/2$. Последнее условие исключает рассмотрение несжимаемых разномодульных материалов и возможность построения теории, описывающей упругопластическое поведение этих материалов.

В рамках теории упругости свойство изотропии материала при деформировании не должно изменяться. Поэтому необоснованным является утверждение в [6], что в зависимости от напряженного состояния при упругих деформациях изотропный разномодульный материал ведет себя как классический изотропный материал или как трансверсально изотропный материал.

Как было отмечено, деформации в главных направлениях (1.2) должны суммироваться таким образом, чтобы соблюдались условия: (1.10), симметричность, невогнутость относительно начала координат для всех частей потенциальной поверхности деформаций. Поэтому выделение деформаций по знакам главных напряжений без соблюдения этих условий в [1, 6] недопустимо. Недостатки и противоречивые выводы модели [1, 6], отмеченные также в [8-10], являются результатами несогласованности с указанными требованиями подхода [1, 6], с помощью которого описывается разносopотивляемость изотропного материала при растяжении и сжатии. В частности, когда главные напряжения неодинакового знака, не выполняется условие (1.10), (1.11) и при линейных связях (1.2) нарушается пропорциональность шаровых частей тензоров напряжений и деформаций. Нарушение этого условия в данном случае для реальных изотропных материалов может привести к различным противоречивым выводам: создание сдвигов посредством гидростатического давления, изменение объема при чистом сдвиге, различность знаков σ и ε , нарушение симметричности потенциальной поверхности, несовпадение девiatorных плоскостей тензоров напряжений и деформаций.

Если в законе упругости, соответствующем модели [1, 6], принимать условие (1.10), то он превратится в закон Гука для изотропного материала. Если в соотношениях (3.1) - (3.3) принять $v^+ / E^+ = -v^- / E^-$, то изменения в их структуре не происходит и они не совпадут с законом упругости [1, 6]. Соотношения (3.4) позволяют рассмотреть различные частные случаи разномодульности: при $v^- = 1/2$ материал несжимаемый, при $v^+ = 1/2$ материал нерасширяемый, $v^+ = v^- = 1/2$ материал не обладает свойством объемного деформирования.

Как было показано в данной работе, при выполнении условий (1.10), (1.11) разносopотивляемость материала при растяжении и сжатии определяется знаками двух инвариантов: среднего напряжения и четного инварианта девiatorа напряжений, и такой подход не имеет отмеченных недостатков подхода [1, 6]. Определяющие соотношения, полученные с помощью этого подхода, не противоречат общим соотношениям между напряжениями и деформациями для изотропных тел [2].

Рассмотренная модель дает возможность обобщения известных условий прочности и пластичности на случай, когда материал тела характеризуется различными предельными напряжениями при одноосном растяжении и сжатии.

В частности, функции (1.13), (1.14) можно рассматривать как уравнения поверхности нагружения разносопротивляющихся материалов, для которых влияние среднего напряжения на появление пластических деформаций пренебрежимо мало. Принимая уравнение предельной поверхности текучести $W_b = \text{const}$ в виде (1.13) и (1.14), после определения постоянных коэффициентов через пределы текучести материала получим условие пластичности [11]:

$$3[(2/Y_+^2 - 1/Y_-^2)T^2 + 3/2(1/Y_-^2 - 1/Y_+^2)s_3^2] = 1 \quad (s_2 \geq 0)$$

$$3[(2/Y_-^2 - 1/Y_+^2)T^2 + 3/2(1/Y_+^2 - 1/Y_-^2)s_1^2] = 1 \quad (s_2 \leq 0)$$

где Y_+ — предел текучести материала при одноосном растяжении, Y_- — при сжатии. На девиаторной плоскости кривая текучести будет состоять из двух различных эллипсов, сопряженных в точках B_1, B_2, \dots, B_6 (фиг. 1). Приведенное условие пластичности можно рассматривать как обобщение условия Губера — Мизеса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости. Наука. 1982. 317 с.
2. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз. 1958. 370 с.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат. 1956. 407 с.
4. Ивлев Д. Д. О математическом описании поведения упругого изотропного тела при помощи кусочно-линейного потенциала // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 5. С. 897–905.
5. Толоконников Л. А. Механика деформируемого твердого тела. М.: Высш. школа. 1979. 318 с.
6. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Инж. ж. МТТ. 1966. № 2. С. 44–53.
7. Саркисян М. С. К теории упругости изотропных тел, материал которых по разному сопротивляется растяжению и сжатию. // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 5. С. 99–108.
8. Jones R. M. Stress-strain relations for materials with different moduli in tension and compression // AIAA. Journal 1977. V. 15. № 1. P. 16–23. Ракетная техника и космонавтика. 1977. Т. 15. № 1. С. 16–25.
9. Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 29–34.
10. Саркисян М. С. К теории идеальной пластичности тел, материал которых по-разному сопротивляется растяжению и сжатию. // Изв. АН АрмССР. Механика. 1972. Т. 25. № 4. С. 53–67.

Ереван

Поступила в редакцию
11.IV.1985