МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1987

УДК 539.3

ОСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ С НЕЛИНЕЙНЫМИ УСЛОВИЯМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА КОНТАКТНЫХ ГРАНИЦАХ

НИКИТИН И. С.

Проблеме осреднения слоистой среды посвящено значительное количество работ. Эффективные модули кусочно-однородной слоистой среды были получены в [1, 2], матричный метод осреднения развит в [3], обзоры работ этой тематики можно найти в [4–6].

Наиболее последовательным методом осреднения структурно-периодических сред является асимптотический метод, основанный на идее двухмасштабных разложений [7] (или близкий к нему вариационно-асимптотический метод [8]). Полное, с многочисленными примерами, изложение асимптотического метода осреднения сделано в [9]. При этом в [9] рассматривается случай «идеального» контакта (полного сцепления) структурных элементов, в частности, слоев. Большое количество задач с помощью этого метода решено в [6]. Там же дается постановка задачи об осреднении структур с «неидеальными» условиями контакта – линейными условиями проскальзывания винклеровского типа, приводится результат решения задачи об эффективных модулях слоистой среды с такими условиями на контактных границах[1]. Континуальная модель слоистой упругой среды с проскальзыванием на контактных границах с помощью соображений физического характера была построена в [10].

В предлагаемой работе метод асимптотического осреднения применяется для построения осредненных уравнений слоистой среды с нелинейными условиями обобщенного типа на контактных границах соседних слоев (разрезах) и с учетом возможного раскрытия межслойных границ.

Как частные случаи получены уравнения среды, в которой упругие слои взаимодействуют по законам: проскальзывания винклеровского типа, вязкого трения, «сухого» трения Кулона.

В декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим безграничную слоистую среду. Ось x_3 перпендикулярна плоскопараллельным границам раздела (разрезам). Свойства изотропных, однородных, упругих слоев зададим плотностью ρ, модулями Ламе λ и μ. Тонкие слои имеют постоянную толщину $\varepsilon\ll 1$. Границы раздела имеют координаты $x_3=x^{(s)}=s\varepsilon$, $s=0, \pm 1, \pm 2\ldots$.

Пусть при $t>0$ среда нагружается объемными силами с плотностью $f^i(x_k, t)$ $(i, k=1, 2, 3)$. Предположим, что если на контактной границе соседних слоев нормальные напряжения являются сжимающими, то эти слои взаимодействуют по следующему обобщенному нелинейному закону:

$$\sigma_{33}<0,\ [u_3]=[\sigma_{\gamma 3}]=[\sigma_{33}]=0 \tag{1}$$

$$\sigma_{\gamma 3}=k(|\sigma_{33}|)[u_\gamma]+\eta(|\sigma_{33}|)[v_\gamma]+q(|\sigma_{33}|)\chi_\delta([v_\gamma])$$

В противном случае контактные границы расходятся и выполняются условия: $[u_3]\geqslant 0$, $\sigma_{33}=\sigma_{\gamma 3}=0$. Здесь и далее u_i – компоненты вектора смещений $\mathbf{u}$, v_i – компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, греческие – α, β, γ – 1, 2; по повторяющимся индексам происходит суммирование, по индексам, заключенным в скобки,– симметризация. Символ $[A]$ означает скачок величины A на контактной границе соседних слоев $[A]=A|_{x^{(s)}+0}-$

[1] См. также *Шойхет Б. А.* Осредненные уравнения для слоистых и блочных сред с односторонними связями и трением. Л., 1987. 51 с.– Деп. в ВНИИ Гидротехники 19.01.87, № 2404–эн87.

$-A|_{x^{(s)}-0}$; χ_δ — функция, задающая закон нелинейного трения

$$\chi_\delta([v_\gamma])=[v_\gamma]/|[\mathbf{v}]|,\quad |[\mathbf{v}]|>\delta$$
$$\chi_\delta([v_\gamma])=[v_\gamma]/\delta,\qquad |[\mathbf{v}]|\leqslant\delta;\qquad |[\mathbf{v}]|^2=\sum_\beta [v_\beta]^2$$

Отметим, что функция χ_δ антисимметрична: $\chi_\delta(-x)=-\chi_\delta(x)$. Зависимость коэффициентов k, η и q от $|\sigma_{33}|$ будем в дальнейшем считать линейной: $k=k_0|\sigma_{33}|$, $\eta=\eta_0|\sigma_{33}|$, $q=q_0|\sigma_{33}|$. Полагая в обобщенном законе взаимодействия (1) $\eta_0=q_0=0$, получаем $\sigma_{\gamma3}=k_0|\sigma_{33}|[u_\gamma]$ — нелинейный закон проскальзывания винклеровского типа.

При $k_0=q_0=0$ получаем $\sigma_{\gamma3}=\eta_0|\sigma_{33}|[v_\gamma]$ — нелинейный закон вязкого трения.

При $k_0=\eta_0=0$ имеем $\sigma_{\gamma3}=q_0|\sigma_{33}|\chi_\delta([v_\gamma])$ — закон нелинейного трения, в котором путем предельного перехода $\delta\to0$ можно перейти к закону сухого трения Кулона.

Кроме того, предположим, что значения коэффициентов проскальзывания k_0, вязкости η_0 и трения q_0 таковы, что $k_*=k_0\varepsilon\sim O(1)$, $\eta_*=\eta_0\varepsilon\sim O(1)$, $q_0\sim O(1)$, а параметр δ таков, что $\varepsilon/\delta_*\sim O(\varepsilon^\varkappa)$, $\varkappa>0$, $\delta_*=\delta/\varepsilon$.

В геометрически линейной постановке движение такой среды описывается следующей системой уравнений с альтернативными условиями (A) или (B)

$$x_3\neq x^{(s)}:\ \sigma_{ij,\,j}-\rho u_{i,\,tt}=f_i,\ \sigma_{ij}=C_{ijkl}u_{k,\,l}\tag{2}$$
$$x_3=x^{(s)}:\ [\sigma_{i3}]=0$$
$$\sigma_{33}<0,\ [u_3]=0\tag{A}$$
$$\sigma_{\gamma3}=k_0|\sigma_{33}|[u_\gamma]+\eta_0|\sigma_{33}|[v_\gamma]+q_0|\sigma_{33}|\chi_\delta([v_\gamma])$$
$$[u_3]\geqslant0,\ \sigma_{i3}=0\tag{B}$$

Начальные условия $u_i=v_i=0$ при $t=0$. Тензор модулей упругости C_{ijkl} для рассматриваемого случая изотропных слоев имеет вид $C_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+$ $+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$ и вводится только для сокращения записи.

Если функции $f_k(x_l,t)$ достаточно гладкие, с характерным пространственным масштабом $L\gg\varepsilon$ $(L\sim1)$ и временным масштабом $\tau\gg\varepsilon/c$ $(\tau\sim1)$ (скорость упругих волн $c=\sqrt{\mu/\rho}$), то можно попытаться перейти к осредненному описанию с помощью метода асимптотического осреднения [9].

В дополнение к «медленным» переменным x_k введем «быструю» переменную $\xi=x_3/\varepsilon$ и будем искать смещения в виде гладкой функции переменных x_k и 1 — периодической [9] функции быстрой переменной ξ: $u_k=$ $=u_k(x_l,\xi,t)$. По переменной ξ смещение является гладкой функцией, за исключением точек раздела слоев $\xi^{(s)}=x^{(s)}/\varepsilon$, где она может терпеть разрывы первого рода.

С учетом такого выбора аргументов перепишем систему (2) в смещениях на «ячейке» периодичности $(x^{(s)}-\varepsilon/2\leqslant x_3\leqslant x^{(s)}+\varepsilon/2,\ -{}^1/_2\leqslant\xi\leqslant{}^1/_2)$ с альтернативными условиями (A) или (B):

$$x_3\neq x^{(s)},\ \xi\neq0$$
$$\varepsilon^{-2}C_{i3k3}u_{k,\,\xi\xi}+\varepsilon^{-1}(C_{ijk3}u_{k,\,j\xi}+C_{i3kl}u_{k,\,l\xi})+C_{ijkl}u_{k,\,jl}-\rho u_{i,\,tt}=f_i$$
$$x_3=x^{(s)},\ \xi=0:\ [C_{i3kl}u_{k,\,l}+\varepsilon^{-1}C_{i3k3}u_{k,\,\xi}]=0\tag{3}$$
$$[u_3]=0,\ C_{33kl}u_{k,\,l}+\varepsilon^{-1}C_{33k3}u_{k,\,\xi}<0\tag{A}$$
$$C_{\gamma3kl}u_{k,\,l}+\varepsilon^{-1}C_{\gamma3k3}u_{k,\,\xi}=|C_{33kl}u_{k,\,l}+\varepsilon^{-1}C_{33k3}u_{k,\,\xi}|(k_0[u_\gamma]+\eta_0[u_{\gamma,\,t}]+q_0\chi_\delta([u_{\gamma,\,t}]))$$
$$[u_3]\geqslant0,\ C_{i3kl}u_{k,\,l}+\varepsilon^{-1}C_{i3k3}u_{k,\,\xi}=0\tag{B}$$

Условия 1 — периодичности при $\xi=\pm{}^1/_2$: $[[u_i]]=[[u_{i,\,\xi}]]=0$. Начальные условия $u_i=u_{i,\,t}=0$ при $t=0$. Здесь принято обозначение: $[[u_i]]=$ $=u_i|_{\xi=1/2}-u_i|_{\xi=-1/2}$, причем ξ рассматривается при этом как независимая переменная.

Представим смещения среды в виде формального асимптотического ряда по степеням малого параметра ε, ограничиваясь членами $\sim\varepsilon^2$ включительно:

$$u_i=u_i^{(0)}(x_k, \xi, t)+\varepsilon u_i^{(1)}(x_k, \xi, t)+\varepsilon^2 u_i^{(2)}(x_k, \xi, t)+\ldots \tag{4}$$

Подставим это представление в систему (3) и приравняем члены при степенях ε^{-2} и ε^{-1} нулю, а при ε^0 — функции f_i. В результате получим:

систему уравнений для нулевого приближения $u_k^{(0)}$, из которой следует, что нулевое приближение зависит только от медленных переменных $u_k^{(0)}=w_k(x_l, t)$;

систему уравнений для первого приближения $u_k^{(1)}(x_l, \xi, t)$ (задачу на ячейке) с альтернативными условиями (А) или (В) $(\delta_*=\delta/\varepsilon)$:

$$x_3\neq x^{(s)}, \quad \xi\neq 0: \quad C_{i3k3}\overset{(1)}{u}_{k,\xi\xi}=0$$

$$\xi=\pm 1/2: \quad [[\overset{(1)}{u_k}]]=[[\overset{(1)}{u}_{k,\xi}]]=0$$

$$x_3=x^{(s)}, \quad \xi=0: \quad [C_{i3kl}w_{k,l}+C_{i3k3}\overset{(1)}{u}_{k,\xi}]=0 \tag{5}$$

$$[\overset{(1)}{u_3}]=0, \quad C_{33kl}w_{k,l}+C_{33k3}\overset{(1)}{u}_{k,\xi}<0 \tag{A}$$

$$C_{\gamma 3kl}w_{k,l}+C_{\gamma 3k3}\overset{(1)}{u}_{k,\xi}=|C_{33kl}w_{k,l}+C_{33k3}\overset{(1)}{u}_{k,\xi}|\,(k_*[\overset{(1)}{u_\gamma}]+\eta_*[\overset{(1)}{u}_{\gamma,t}]+q_0\chi_{\delta_*}([\overset{(1)}{u}_{\gamma,t}]))$$

$$[\overset{(1)}{u_3}]\geqslant 0, \quad C_{i3kl}w_{k,l}+C_{i3k3}\overset{(1)}{u}_{k,\xi}=0 \tag{B}$$

$$t=0: \quad \overset{(1)}{u_k}=\overset{(1)}{u}_{k,t}=0$$

систему уравнений для второго приближения $u_k^{(2)}(x_l, \xi, t)$:

$$C_{ijkl}w_{k,lj}+C_{ijk3}\overset{(1)}{u}_{k,j\xi}+\{C_{i3k3}\overset{(2)}{u}_{k,\xi}+C_{i3kl}\overset{(1)}{u}_{k,l}\}_{,\xi}-\rho w_{i,tt}=f_i \tag{6}$$

В соответствии с представлением (4) можно написать

$$\sigma_{i3}=\overset{(0)}{\sigma}_{i3}+\varepsilon\overset{(1)}{\sigma}_{i3}+\ldots, \quad \text{где} \quad \overset{(1)}{\sigma}_{i3}=C_{i3k3}\overset{(2)}{u}_{k,\xi}+C_{i3kl}\overset{(1)}{u}_{k,l}.$$

Из условия $[\sigma_{i3}]=0$ следует

$$[\overset{(1)}{\sigma}_{i3}]=[C_{i3k3}\overset{(2)}{u}_{k,\xi}+C_{i3kl}\overset{(1)}{u}_{k,l}]=0 \tag{7}$$

Проинтегрируем уравнение (6) по ξ от $-1/2$ до $1/2$. С учетом 1-периодичности функций u_k по ξ и условия (7) получим

$$\langle\{C_{i3k3}\overset{(2)}{u}_{k,\xi}+C_{i3kl}\overset{(1)}{u}_{k,l}\}_{,\xi}\rangle=0, \quad \langle A\rangle=\int_{-1/2}^{1/2} A\,d\xi$$

Тогда уравнение (6) перейдет в следующее:

$$C_{ijkl}w_{k,lj}+C_{ijk3}\langle\overset{(1)}{u}_{k,\xi}\rangle_{,j}-\rho w_{i,tt}=f_i \tag{8}$$

Это есть искомая осредненная система для главного члена поля смещений $w_k(x_l, t)$. Входящие в нее составляющие первого приближения $u_k^{(1)}(x_l, \xi, t)$ подлежат определению из системы (5).

Решим задачу на ячейке (5). Подставим в (5) выражение для тензора модулей упругости C_{ijkl}. Введем обозначения:

$$s_3=\lambda w_{k,k}+2\mu w_{3,3}, \quad \tau_\gamma=2\mu w_{(\gamma,3)}$$

Система (5) примет вид

$$x_3\neq x^{(s)}, \quad \xi\neq 0: \quad \overset{(1)}{u}_{k,\xi\xi}=0$$

$$\xi=\pm 1/2: \quad [[\overset{(1)}{u_k}]]=[[\overset{(1)}{u}_{k,\xi}]]=0$$

$$x_3=x^{(s)}, \quad \xi=0: \quad [\overset{(1)}{u}_{k,\xi}]=0$$

$$
\begin{aligned}
&[u_3^{(1)}]=0, \quad s_3+(\lambda+2\mu)u^{(1)}_{3,\xi}<0 \qquad (A)\\
&\tau_\gamma+\mu u^{(1)}_{\gamma,\xi}=|s_3+(\lambda+2\mu)u^{(1)}_{3,\xi}|\,(k_*[u_\gamma^{(1)}]+\eta_*[u^{(1)}_{\gamma,t}]+q_0\chi_{\delta*}([u^{(1)}_{\gamma,t}]))\\
&[u_3^{(1)}]\geqslant 0, \quad s_3+(\lambda+2\mu)u^{(1)}_{3,\xi}=0, \quad \tau_\gamma+\mu u^{(1)}_{\gamma,\xi}=0 \qquad (B)\\
&t=0: \quad u_k^{(1)}=u^{(1)}_{k,t}=0
\end{aligned} \tag{9}
$$

Будем искать решение системы (9) в виде $u_k^{(1)}=u_k^{(1)}(w_{i,j}, \xi)$. Решением уравнений при $\xi\neq 0$ в системе (9) являются функции

$$u_k^{(1)\pm}=\varphi_k^\pm(w_{i,j})\xi+\psi_k^\pm(w_{i,j}) \qquad (\xi\gtrless 0) \tag{10}$$

Из условий 1-периодичности и условия $[u^{(1)}_{k,\xi}]=0$ имеем $\varphi_k^+=\varphi_k^-=\varphi_k$, $\varphi_k=-(\psi_k^+-\psi_k^-)$. Отсюда

$$[u_k^{(1)}]=\psi_k^+-\psi_k^-=-\varphi_k, \qquad u^{(1)}_{k,\xi}=\varphi_k.$$

Рассмотрим условие (A) в (9). Из $[u_3^{(1)}]=0$ имеем $\varphi_3=0$, $s_3<0$. Условие на касательное напряжение переходит в уравнение для φ_γ:

$$|s_3|(q_0\chi_{\delta_*}(\varphi_{\gamma,t})+\eta_*\varphi_{\gamma,t}+k_*\varphi_\gamma)+\mu\varphi_\gamma+\tau_\gamma=0$$

Начальное условие для этого уравнения $\varphi_\gamma|_{t=t_*}=\varphi_\gamma^*$, где t_* — время перехода к режиму (A), φ_γ^* — значение φ_γ в этот момент. Если $t_*=0$, то $\varphi_\gamma^*=0$.

Функции $\psi_k^\pm$ из (10) остаются неопределенными, однако для построения осредненного уравнения (8) они не нужны, поскольку в него входят только производные $u^{(1)}_{k,\xi}=\varphi_k$. При желании $\psi_k^\pm$ могут быть определены из дополнительного условия $\langle u_k^{(1)}\rangle=0$ [9].

Рассмотрим условие (B) в (9). В этом случае из решения (10) имеем $\varphi_3\leqslant 0$, $\varphi_3=-s_3/(\lambda+2\mu)$, $\varphi_\gamma=-\tau_\gamma/\mu$. Условие $\varphi_3\leqslant 0$ переходит в условие $s_3\geqslant 0$.

С учетом (10) осредненное уравнение (8) принимает вид

$$(\lambda+\mu)w_{k,ki}+\mu w_{i,kk}+\lambda\varphi_{3,i}+\mu\varphi_{i,3}+\mu\delta_{i3}\varphi_{k,k}-\rho w_{i,tt}=f_i$$

Альтернативные условия для определения φ_k:

$$
\begin{aligned}
&s_3<0, \ \varphi_3=0 \qquad (A)\\
&|s_3|(q_0\chi_{\delta*}(\varphi_{\gamma,t})+\eta_*\varphi_{\gamma,t}+k_*\varphi_\gamma)+\mu\varphi_\gamma+\tau_\gamma=0\\
&\varphi_\gamma|_{t=t_*}=\varphi_\gamma^*\\
&s_3\geqslant 0, \quad \varphi_3=-s_3/(\lambda+2\mu), \quad \varphi_\gamma=-\tau_\gamma/\mu \qquad (B)\\
&t=0: \ w_k=w_{k,t}=0
\end{aligned} \tag{11}
$$

На этом построение осредненного уравнения для слоистой среды с обобщенным нелинейным законом взаимодействия между слоями можно считать законченным. Отметим, что вывод осредненной системы уравнений (11) нетрудно обобщить на случай достаточно произвольной нелинейной зависимости коэффициентов k, η от нормального напряжения $|\sigma_{33}|$: $k(|\sigma_{33}|)$, $\eta(|\sigma_{33}|)$, удовлетворяющей условиям $k(0)=0$, $\eta(0)=0$. Эти условия необходимо наложить для того, чтобы функция φ_γ (а вместе с ней и первое приближение $u_\gamma^{(1)}$) была непрерывна при переходе с режима A) на режим B). При этом коэффициенты $k_*|s_3|$ и $\eta_*|s_3|$ в дифференциальном уравнении для φ_γ в условии A) из (11) заменятся на $k_*(|s_3|)$ и $\eta_*(|s_3|)$.

Рассмотрим частные случаи взаимодействия контактных границ.

1. *Взаимодействие по закону проскальзывания* ($\eta_0=q_0=0$). В этом случае условие (A) в (11) примет вид

$$s_3<0, \ \varphi_3=0, \ \varphi_\gamma=-\tau_\gamma/(k_*|s_3|+\mu) \qquad (A)$$

Подстановка этих выражений для φ_k в осредненное уравнение для главного члена w_k из системы (11) дает нелинейное уравнение второго порядка для w_k.

2. *Взаимодействие по закону вязкого трения* ($q_0=k_0=0$). Условие А) из (11) примет вид

$$s_3<0,\ \varphi_3=0,\ \eta_*|s_3|\varphi_{\gamma,\,t}+\mu\varphi_\gamma+\tau_\gamma=0,\ \varphi_\gamma|_{t=t_*}=\varphi_\gamma{}^* \qquad \text{(A)}$$

В этом случае осредненное поведение среды описывается совместной системой для функций w_k и φ_k:

$$(\lambda+\mu)w_{k,\,ki}+\mu w_{i,\,kk}+\lambda\varphi_{3,\,i}+\mu\varphi_{i,\,3}+\mu\delta_{i3}\varphi_{k,\,k}-\rho w_{i,\,tt}=f_i$$

$$s_3<0,\ \varphi_3=0,\ \eta_*|s_3|\varphi_{\gamma,\,t}+\mu\varphi_\gamma+\tau_\gamma=0,\ \varphi_\gamma|_{t=t_*}=\varphi_\gamma{}^* \qquad \text{(A)}$$

$$s_3\geqslant0,\ \varphi_3=-s_3/(\lambda+2\mu),\ \varphi_\gamma=-\tau_\gamma/\mu \qquad \text{(B)}$$

$$t=0:\ w_k=w_{k,\,t}=0$$

3. *Взаимодействие по закону нелинейного трения* ($k_0=\eta_0=0$). В этом случае с учетом определения функции χ_δ условие (А) в (11) имеет вид

$$q_0|s_3|\frac{\varphi_{\gamma,t}}{\sqrt{\sum\limits_\beta(\varphi_{\beta,t})^2}}+\mu\varphi_\gamma+\tau_\gamma=0 \quad \text{при} \quad \sum_\beta(\varphi_{\beta,t})^2>\delta_*^2 \qquad (\text{A}_1)$$

$$q_0|s_3|\frac{\varphi_{\gamma,t}}{\delta_*}+\mu\varphi_\gamma+\tau_\gamma=0 \quad \text{при} \quad \sum_\beta(\varphi_{\beta,t})^2\leqslant\delta_*^2 \qquad (\text{A}_2)$$

Рассмотрим условие (A_1). Его можно переписать в виде

$$(\tau_1+\mu\varphi_1)^2+(\tau_2+\mu\varphi_2)^2=q_0^2s_3^2 \quad \text{при} \quad \sum_\beta(\varphi_{\beta,t})^2>\delta_*^2$$

$$\varphi_{1,\,t}/(\tau_1+\mu\varphi_1)=\varphi_{2,\,t}/(\tau_2+\mu\varphi_2)$$

Рассмотрим условие (A_2). Имеем для φ_γ: $\varphi_{\gamma,\,t}=-\delta_*(\tau_\gamma+\mu\varphi_\gamma)/(q_0|s_3|)$. Ограничение $\sum(\varphi_{\beta,\,t})^2\leqslant\delta_*^2$ принимает вид

$$(\tau_1+\mu\varphi_1)^2+(\tau_2+\mu\varphi_2)^2\leqslant q_0^2s_3^2$$

Перейдем к пределу $\delta_*\to0$, что соответствует переходу к закону сухого трения Кулона. Тогда осредненное поведение среды будет описываться следующей совместной системой для функций w_k и φ_k:

$$(\lambda+\mu)w_{k,\,ki}+\mu w_{i,\,kk}+\lambda\varphi_{3,\,i}+\mu\varphi_{i,\,3}+\mu\delta_{i3}\varphi_{k,\,k}-\rho w_{i,\,tt}=f_i$$

Альтернативные условия для определения φ_i:

$$s_3<0,\ \varphi_3=0$$

$$(\tau_1+\mu\varphi_1)^2+(\tau_2+\mu\varphi_2)^2=q_0^2s_3^2 \quad \text{при} \quad \sum_\beta(\varphi_{\beta,t})^2\neq0 \qquad (\text{A}_1)$$

$$\frac{\varphi_{1,t}}{\tau_1+\mu\varphi_1}=\frac{\varphi_{2,t}}{\tau_2+\mu\varphi_2},\qquad \varphi_\gamma|_{t=t_*}=\varphi_\gamma{}^*$$

$$(\tau_1+\mu\varphi_1)^2+(\tau_2+\mu\varphi_2)^2\leqslant q_0^2s_3^2 \qquad (\text{A}_2)$$

$$\varphi_{\gamma,\,t}=0 \text{ или } \varphi_\gamma=\varphi_\gamma{}^*$$

$$s_3\geqslant0,\ \varphi_3=-s_3/(\lambda+2\mu);\ \varphi_\gamma=-\tau_\gamma/\mu \qquad \text{(B)}$$

По нулевому и первому приближениям w_k и $u_k{}^{(1)}$ можно определить главный член напряжения $\sigma_{ij}^{(0)}$, который имеет вид:

$$\sigma_{ij}^{(0)}=C_{ijkl}w_{k,l}+C_{ijks}u_{k,\xi}^{(1)}=\lambda\delta_{ij}(w_{k,k}+\varphi_3)+2\mu(w_{(i,j)}+\delta_{3(i}\varphi_{j)}) \qquad (12)$$

Вводя обозначение $p_{ij}=\sigma_{ij}^{(0)}$ для главного члена напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}$ и $v_i=$ $=w_{i,t}$ для главного члена скорости, дифференцируя (12) по времени, осредненную систему (11) можно записать в виде нелинейной системы первого порядка для «напряжений» p_{ij}, «скоростей» v_i и «дополнительных» функций φ_j:

$$p_{ij,j}-\rho v_{i,t}=f_i$$

$$p_{ij,t}=\lambda\delta_{ij}(v_{k,k}+\varphi_{3,t})+2\mu(v_{(i,j)}+\delta_{3(i}\varphi_{j),t})$$

$$p_{33}<0 \quad \varphi_3=0 \tag{A}$$

$$p_{\gamma 3}+|p_{33}|(q_0\chi_{\delta_*}(\varphi_{\gamma,t})+\eta_*\varphi_{\gamma,t}+k_*\varphi_\gamma)=0$$

$$\varphi_\gamma|_{t=t_*}=\varphi_\gamma{}^*$$

$$\varphi_3\leqslant 0 \quad p_{33}=p_{\gamma 3}=0; \quad t=0: \ p_{ij}=v_i=0 \tag{B}$$

Проводя аналогию со строгими математическими результатами из [9], кратко обсудим вопрос о возможности решения краевых задач с помощью полученной осредненной системы уравнений (11). Пусть, для определенности, на границе $\partial\Omega$ области Ω, занятой слоистой средой, заданы достаточно плавные по пространственным переменным и времени смещения $w_k|_{\partial\Omega}$. Если характерные размеры области (диаметр, радиус кривизны) также велики по сравнению с толщиной слоев ε, то можно ожидать, что решение осредненной системы (11) с заданными начальными и граничными $w_k|_{\partial\Omega}$ значениями поля смещений будет мало (с точностью $\sim O(\varepsilon)$) отличаться от точного поля смещений (как решения системы (2)). Главный член поля напряжений (12) будет асимптотически верно описывать точное поле напряжений внутри области и давать ошибочное значение (с ошибкой $\sim O(1)$) в пограничном слое толщиной $\sim O(\varepsilon)$, примыкающем к $\partial\Omega$.

В качестве примера рассмотрим плоскую квазистатическую задачу о сдвиге поджатой полосы $|x_3|\leqslant 1$, $|x_1|<\infty$. Как и раньше, ось x_3 нормальна плоскопараллельным границам раздела тонких слоев толщины $\varepsilon\ll 1$. На границе $|x_3|=1$ зададим, для простоты, линейный закон нарастания смещений, определяющих сдвиг $w_1=\mp a_1 t|_{x_3=\pm 1}$ и сжатие $w_3=\mp a_3 t|_{x_3=\pm 1}$ полосы.

Константы $a_{1,3}>0$ считаем достаточно малыми, чтобы можно было пренебречь инерционными членами в осредненных уравнениях (11), которые при плоском квазистатическом деформировании примут вид

$$w_{1,33}+\varphi_{1,3}=0, \quad w_{3,33}=0 \tag{13}$$

$$s_3<0, \ |s_3|(|q_0\chi_{\delta_*}(\varphi_{1,t})+\eta_*\varphi_{1,t}+k_*\varphi_1)+\mu\varphi_1+\mu w_{1,3}=0 \tag{A}$$

Граничные условия при $x_3=\pm 1$: $w_1=\mp a_1 t$, $w_3=\mp a_3 t$. Начальные условия при $t=0$: $w_1=w_3=\varphi_1=0$. Решением первых двух уравнений системы (13), удовлетворяющих граничным условиям, являются функции: $w_1=$ $=-a_1x_3t$, $w_3=-a_3x_3t$, $\varphi_1(t)$.

Условие $s_3=-(\lambda+2\mu)a_3t<0$ удовлетворяется за счет выбора $a_3>0$ (сжатие).

Функция $\varphi_1(t)$ определяется из третьего уравнения системы (13). Найдем эту функцию для каждого из выделенных законов взаимодействия.

1. *Закон проскальзывания* ($q_0=\eta_0=0$):

$$\varphi_1=\mu a_1 t/(k_*(\lambda+2\mu)a_3t+\mu)$$

Напряжение $\sigma_{13}^{(0)}$ по (12) равно:

$$\sigma_{13}^{(0)}=\mu(w_{1,3}+\varphi_1)=-\frac{\mu k_*(\lambda+2\mu)a_3t}{k_*(\lambda+2\mu)a_3t+\mu}a_1t$$

При $k_*\to\infty$ (что соответствует переходу к полному сцеплению тонких слоев) напряжение $\sigma_{13}^{(0)}$ стремится к значению $\sigma_{13}^{(0)}=-\mu a_1 t$ (как для однородной сплошной полосы).

2. *Закон вязкого трения* ($k_0=q_0=0$). Уравнение для φ_1 принимает вид

$$\eta_*(\lambda+2\mu)a_3t\varphi_{1,t}+\mu\varphi_1=\mu a_1t, \qquad \varphi_1|_{t=0}=0$$

Его решением является функция

$$\varphi_1=\mu a_1t/(\eta_*(\lambda+2\mu)a_3+\mu)$$

Напряжение $\sigma_{13}^{(0)}$ равно

$$\sigma_{13}^{(0)}=-\frac{\mu\eta_*(\lambda+2\mu)a_3}{\eta_*(\lambda+2\mu)a_3+\mu}a_1t$$

3. *Закон сухого трения* ($k_0=\eta_0=0$). Уравнение для φ_1 в плоском случае принимает вид

$$q_0(\lambda+2\mu)a_3t\,\mathrm{sign}\,\varphi_{1,t}+\mu\varphi_1=\mu a_1t \text{ при } \varphi_{1,t}\neq0$$

$$\mu|\varphi_1-a_1t|\leqslant q_0(\lambda+2\mu)a_3t \text{ при } \varphi_{1,t}=0,\ \varphi_1|_{t=0}=0$$

Нетрудно проверить, что это нелинейное уравнение имеет единственное решение:

$$\varphi_1=\left(a_1t-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}q_0a_3t\right) \quad \text{при} \quad a_1>\frac{\lambda+2\mu}{\mu}q_0a_3$$

$$\varphi_1=0 \quad \text{при} \quad a_1\leqslant\frac{\lambda+2\mu}{\mu}q_0a_3$$

Напряжение $\sigma_{13}^{(0)}$ равно:

$$\sigma_{13}^{(0)}=\begin{cases}-(\lambda+2\mu)q_0a_3t & \text{при} \quad a_1>q_0a_3(\lambda+2\mu)/\mu\\ -\mu a_1t & \text{при} \quad a_1\leqslant q_0a_3(\lambda+2\mu)/\mu\end{cases}$$

Верхнее значение соответствует режиму относительного скольжения соседних тонких слоев, нижнее — режиму сцепления соседних слоев.

Результаты решения этой простой задачи показывают, что, хотя смещения в главном члене w_k остаются неизменными (отличаются лишь первые приближения φ_1), касательные напряжения в полосе существенно зависят от закона взаимодействия составляющих ее тонких слоев.

Автор выражает признательность Н. В. Зволинскому, А. Н. Ковшову, И. В. Симонову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рытов С. М.* Акустические свойства мелкослоистой среды // Акуст. журн. 1956. Т. 2. № 1. С. 71–83.
2. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука. 1973. 343 с.
3. *Молотков Л. А.* Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука. 1984. 204 с.
4. *Молотков Л. А., Хило А. Е.* Матричный подход к проблеме осреднения периодических сред // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 11. С. 43–47.
5. Композиционные материалы. Т. 2. Механика композиционных материалов/Под ред. Сендецки Д. М.: Мир. 1978. 564 с.
6. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ. 1984. 336 с.
7. *Бахвалов Н. С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстроосциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1975. Т. 221. № 3. С. 516–519.
8. *Бердичевский В. Л.* Об осреднении периодических структур // ПММ. 1977. Т. 41. № 6. С. 993–1006.
9. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука. 1984. 352 с.
10. *Зволинский Н. В., Шхинек К. Н.* Континуальная модель слоистой среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 5–14.

Москва

Поступила в редакцию 19.III.1987