МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1987

УДК 531.383

РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕЦЕССИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ

ГАЛИУЛЛИН И. А.

Уравнения Нильсена применительно к движению твердого тела с закрепленной точкой записываются в углах Эйлера и производных от них. В этих переменных определяются выражения для обобщенных сил, которые обеспечивают существование регулярной прецессии тела в соответствующем поле; приводится их частный вид, когда силы являются позиционными. Для случая потенциального поля сил устанавливается структура силовой функции посредством условий, наложенных на коэффициенты ряда Фурье, и в качестве условий осуществимости регулярных прецессий указываются геометрия масс тела и соотношения между начальными значениями переменных. Проводится естественного характера разграничение на типы рассматриваемого движения и решается обратная задача построения соответствующего потенциала по заданной регулярной прецессии каждого типа.

1. Регулярная прецессия как характерное движение симметричного твердого тела, закрепленного в центре масс, впервые обнаружена в [1], а для случая произвольного закрепления на оси симметрии – в [2] и независимо в [3, 4]. Поиск подобных движений у несимметричного волчка производился в [4, 5, 6], где при частных предположениях были получены отрицательные результаты, а также в [7], где был открыт новый тип регулярной прецессии вокруг наклонной оси и с собственным вращением тела относительно содержащего центр масс перпендикуляра к круговому сечению эллипсоида инерции. Как показано в [8], эта прецессия является заключительной в классе подобных движений тела в однородном поле сил тяжести.

Регулярные прецессии в центральном поле сил ньютоновского притяжения впервые были установлены для однородных сфероидов, закрепленных как в центре масс [9], так и в произвольной точке на оси симметрии [10]. Обобщающий результат для тел произвольной формы получен в [11, 12], где указана возможность регулярной прецессии гироскопа с лагранжевым распределением масс и одновременно открыт новый тип такого движения у несимметричного тела. Обе прецессии совершаются вокруг прямой, соединяющей гравитирующий центр и точку закрепления, а осью собственного вращения является содержащий центр масс перпендикуляр к круговому сечению эллипсоида инерции. Вопрос о существовании новых типов прецессионных движений регулярного характера отрицательно решен в [13], при ограничении оси прецессии указанным направлением, и – для общего случая – в [14].

В ряде работ были указаны регулярные прецессии, совершающиеся в поле сил с потенциалом, линейным относительно обобщенных скоростей (поле сил нулевого потенциала). Для симметричного тела это сделано в [15] для поля общего вида, в частных случаях магнитных полей – в [16, 17]. Движение несимметричного тела в магнитном поле изучено в [18, 19].

Значительное число исследований посвящено выяснению динамической природы силового поля, в котором тело способно совершать регулярную прецессию. Такого рода задачи относятся к классу обратных. При тех или иных предположениях формулы для главного момента сил указаны в [20, 10, 5, 6, 21, 22, 15, 23, 14, 24].

Определение размерности многообразия начальных значений в зависимости от вида главного момента было проведено для частного случая, когда тело является гироскопом. Наиболее полное исследование здесь выполнено в [15].

Как отмечается в ряде работ, посвященных регулярным прецессиям, все известные движения такого типа характеризуются расположением оси собственного вращения перпендикулярно круговому сечению эллипсоида инерции для неподвижной точки. В публикуемой статье выясняется степень необходимости такого условия для потенциалов общего вида. Эта цель является подчиненной основной задаче определения структуры силовой функции поля, в котором тело произвольной формы при соответствующих начальных условиях совершает регулярную прецессию с заданными свойствами и параметрами.

2. Рассматривается твердое тело, закрепленное в произвольной точке O. Движение тела под действием стационарного силового поля описывается изменением значений эйлеровых углов ψ, θ, φ, определяющих положение

связанной с телом прямоугольной правой системы $Oxyz$ относительно декартовой системы $OXYZ$.

Выбор этих углов в качестве обобщенных координат позволяет получить уравнения движения [25] в следующем виде

$$
\begin{gathered}
a_{11}\psi^{\cdot\cdot}+a_{12}\theta^{\cdot\cdot}+a_{13}\varphi^{\cdot\cdot}+b_{12}\psi^{\cdot}\theta^{\cdot}+b_{13}\psi^{\cdot}\varphi^{\cdot}+b_{22}\theta^{\cdot 2}+b_{23}\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot}+b_{33}\varphi^{\cdot 2}=Q_\psi \\
a_{12}\psi^{\cdot\cdot}+a_{22}\theta^{\cdot\cdot}+a_{23}\varphi^{\cdot\cdot}+c_{11}\psi^{\cdot 2}+c_{13}\psi^{\cdot}\varphi^{\cdot}+c_{23}\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot}+c_{33}\varphi^{\cdot 2}=Q_\theta \qquad (2.1) \\
a_{13}\psi^{\cdot\cdot}+a_{23}\theta^{\cdot\cdot}+a_{33}\varphi^{\cdot\cdot}+d_{11}\psi^{\cdot 2}+d_{12}\psi^{\cdot}\theta^{\cdot}+d_{22}\theta^{\cdot 2}=Q_\varphi
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
a=A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi-F\sin 2\varphi-C, \quad b={}^1/_2(A-B)\sin 2\varphi-F\cos 2\varphi \\
d=D\sin\varphi-E\cos\varphi, \quad e=E\sin\varphi+D\cos\varphi \\
f=2F\sin 2\varphi+(A-B)\cos 2\varphi, \quad a_{11}=a\sin^2\theta-e\sin 2\theta+C \\
a_{12}=b\sin\theta+d\cos\theta, \quad a_{13}=C\cos\theta-e\sin\theta \\
a_{22}=A+B-C-a, \quad a_{23}=d, \quad a_{33}=C \qquad (2.2) \\
b_{12}=-2c_{11}=a\sin 2\theta-2e\cos 2\theta, \quad b_{13}=-2d_{11}=2b\sin^2\theta+d\sin 2\theta \\
b_{22}=b\cos\theta-d\sin\theta, \quad b_{23}=(f-C)\sin\theta, \quad b_{33}=d\sin\theta \\
c_{13}=-d_{12}=(f+C)\sin\theta+2e\cos\theta, \quad c_{23}=-2d_{22}=-2b, \quad c_{33}=e
\end{gathered}
$$

Q_ψ, Q_θ, Q_φ — обобщенные силы, A, B, C, D, E, F — стандартные обозначения для осевых и центробежных моментов инерции.

Уравнения (2.1) являются линейной относительно $\psi^{\cdot\cdot}$, $\theta^{\cdot\cdot}$, $\varphi^{\cdot\cdot}$ системой с определителем

$$\Delta=(ABC-AD^2-BE^2-CF^2-2DEF)\sin^2\theta \qquad (2.3)$$

В дальнейшем подразумевается, что тело занимает определенный объем, а угол θ не принимает значения, кратные π. Тогда $\Delta\neq 0$, и движению тела соответствует в пространстве обобщенных координат и обобщенных скоростей динамическая система

$$\psi^{\cdot}=\omega_\psi, \quad \theta^{\cdot}=\omega_\theta, \quad \varphi^{\cdot}=\omega_\varphi \qquad (2.4)$$

$$\omega_\psi^{\cdot}=\Psi, \quad \omega_\theta^{\cdot}=\Theta, \quad \omega_\varphi^{\cdot}=\Phi \qquad (2.5)$$

где правые части в (2.5) получены решением уравнений (2.1) относительно $\psi^{\cdot\cdot}$, $\theta^{\cdot\cdot}$, $\varphi^{\cdot\cdot}$.

3. Пусть движение тела является регулярной прецессией вокруг оси OZ с осью собственного вращения Oz, при этом направления осей выбраны так, чтобы соответствующие постоянные проекции угловых скоростей ω_e и ω_r были положительными. Ось OX проводится произвольным образом, и в силу автономности системы (2.4), (2.5) за начальный можно выбрать момент времени, в который оси OX и Ox совпадают. Тогда регулярная прецессия описывается уравнениями

$$\psi=\omega_e t, \quad \varphi=\omega_r t, \quad \theta=\theta_0 \quad (\theta_0=\text{const}) \qquad (3.1)$$

а в фазовом пространстве определяет интегральное многообразие Ω, задаваемое равенствами

$$
\begin{gathered}
\omega_\psi=\omega_e, \quad \omega_\varphi=\omega_r, \quad \omega_\theta=0 \qquad (3.2) \\
\theta=\theta_0, \quad \psi=\varkappa\varphi, \quad \varkappa=\omega_e^{-1}\omega_r
\end{gathered}
$$

Обратная задача, поставленная в п. 1, решается ниже методом [26] построения уравнений движения по заданному многообразию Ω.

Дифференцирование первой группы соотношений (3.2) приводит к системе

$$\omega_\psi^{\cdot}=F_\psi, \quad \omega_\theta^{\cdot}=F_\theta, \quad \omega_\varphi^{\cdot}=F_\varphi \qquad (3.3)$$

в правой части которой стоят функции, обращающиеся в нуль на Ω и произвольные всюду вне этого многообразия. Тогда равенства

$$\Psi=F_\psi, \quad \Theta=F_\theta, \quad \Phi=F_\varphi \qquad (3.4)$$

устанавливают выражения для силовых характеристик (обобщенных сил) поля, в котором регулярная прецессия является возможной, а условия

$$\Psi|_\Omega=0, \quad \Theta|_\Omega=0, \quad \Phi|_\Omega=0 \tag{3.5}$$

определяют соотношения между параметрами тела и начальными значениями фазовых переменных, при которых это движение действительно совершается.

В силу $\Delta\neq0$ система равенств (3.4) эквивалентна системе уравнений (2.1), в которые вместо $\psi^{\cdot\cdot}$, $\theta^{\cdot\cdot}$, $\varphi^{\cdot\cdot}$ подставлены соответственно F_ψ, F_θ, F_φ. По той же причине имеется взаимно-однозначное соответствие между этими функциями и их линейными комбинациями

$$L_\Omega=a_{11}F_\psi+a_{12}F_\theta+a_{13}F_\varphi \tag{3.6}$$

$$M_\Omega=a_{12}F_\psi+a_{22}F_\theta+a_{23}F_\varphi, \quad N_\Omega=a_{13}F_\psi+a_{23}F_\theta+a_{33}F_\varphi$$

которые тогда являются также произвольными функциями всюду, за исключением многообразия Ω, где они обращаются в нуль.

Следовательно, формулы

$$Q_\psi=b_{12}\omega_\psi\omega_\theta+b_{13}\omega_\psi\omega_\varphi+b_{22}\omega_\theta^2+b_{23}\omega_\theta\omega_\varphi+b_{33}\omega_\varphi^2+L_\Omega$$

$$Q_\theta=c_{11}\omega_\psi^2+c_{13}\omega_\psi\omega_\varphi+c_{23}\omega_\theta\omega_\varphi+c_{33}\omega_\varphi^2+M_\Omega$$

$$Q_\varphi=d_{11}\omega_\psi^2+d_{12}\omega_\psi\omega_\theta+d_{22}\omega_\theta^2+N_\Omega \tag{3.7}$$

представляют искомые выражения для обобщенных сил, обеспечивающих регулярную прецессию (3.1) с заданными параметрами.

4. Проводимые далее рассуждения относятся к полю позиционных сил в предположении, что функции L_Ω, M_Ω, N_Ω непрерывны по ψ, θ, φ и обладают непрерывными вторыми производными по ω_ψ, ω_θ, ω_φ. В рассматриваемом случае частные производные обобщенных сил по переменным ω_ψ, ω_θ, ω_φ равны нулю; это дает линейную систему уравнений в частных производных первого порядка

$$\partial L_\Omega/\partial\omega_\psi=-b_{12}\omega_\theta-b_{13}\omega_\varphi, \quad \partial L_\Omega/\partial\omega_\theta=-b_{12}\omega_\psi-2b_{22}\omega_\theta-b_{23}\omega_\varphi$$

$$\partial L_\Omega/\partial\omega_\varphi=-b_{13}\omega_\psi-b_{23}\omega_\theta-2b_{33}\omega_\varphi, \quad \partial M_\Omega/\partial\omega_\psi=-2c_{11}\omega_\psi-c_{13}\omega_\varphi$$

$$\partial M_\Omega/\partial\omega_\theta=-c_{23}\omega_\varphi, \quad \partial M_\Omega/\partial\omega_\varphi=-c_{13}\omega_\psi-c_{23}\omega_\theta-2c_{33}\omega_\varphi$$

$$\partial N_\Omega/\partial\omega_\psi=-2d_{11}\omega_\psi-d_{12}\omega_\theta \tag{4.1}$$

$$\partial N_\Omega/\partial\omega_\theta=-d_{12}\omega_\psi-2d_{22}\omega_\theta, \quad \partial N_\Omega/\partial\omega_\varphi=0$$

Необходимое и достаточное условие [27] разрешимости таких систем, заключающееся в равенстве вторых смешанных производных выполняется. Решение системы (4.1) приводит к следующим выражениям для функций (3.6):

$$L_\Omega=-b_{12}\omega_\psi\omega_\theta-b_{13}\omega_\psi\omega_\varphi-b_{22}\omega_\theta^2-b_{23}\omega_\theta\omega_\varphi-b_{33}\omega_\varphi^2+L(\psi, \theta, \varphi)$$

$$M_\Omega=-c_{11}\omega_\psi^2-c_{13}\omega_\psi\omega_\varphi-c_{23}\omega_\theta\omega_\varphi-c_{33}\omega_\varphi^2+M(\psi, \theta, \varphi)$$

$$N_\Omega=-d_{11}\omega_\psi^2-d_{12}\omega_\psi\omega_\theta-d_{22}\omega_\theta^2+N(\psi, \theta, \varphi) \tag{4.2}$$

где L, M, N — непрерывные функции, произвольные всюду за исключением многообразия Ω, на котором они должны иметь вид

$$L|_\Omega=2b\omega_e\omega_r\sin^2\theta_0+d\omega_r(2\omega_e\cos\theta_0+\omega_r)\sin\theta_0$$

$$M|_\Omega=2f\omega_e(\omega_e\cos\theta_0+2\omega_r)\sin\theta_0+e(\omega_e^2\cos2\theta_0+2\omega_e\omega_r\cos\theta_0+\omega_r^2)$$

$$N|_\Omega=-b\omega_e^2\sin^2\theta_0-{}^1/_2 d\omega_e^2\sin2\theta_0 \tag{4.3}$$

обусловленный обращением в нуль правых частей равенств (4.2) при подстановке значений (3.2).

Замена L_Ω, M_Ω, N_Ω в (3.7) их выражениями (4.2) решает исходную задачу определения обобщенных сил $Q_\psi=L$, $Q_\theta=M$, $Q_\varphi=N$ в форме зависящих только от эйлеровых углов произвольных непрерывных функций, подчиняющихся условиям (4.3). При необходимости по известным формулам [24, 28]:

$$M_x=Q_\psi \sin^{-1}\theta \sin\varphi+Q_\theta \cos\varphi-Q_\varphi \operatorname{ctg}\theta \sin\varphi \tag{4.4}$$

$$M_y=Q_\psi \sin^{-1}\theta \cos\varphi-Q_\theta \sin\varphi-Q_\varphi \operatorname{ctg}\theta \cos\varphi, \quad M_z=Q_\varphi$$

находятся компоненты главного момента позиционных сил, в поле которых тело совершает регулярную прецессию (3.1). Условия (4.3) тогда также видоизменяются согласно формулам (4.4).

Следует заметить, что в рассматриваемом случае сил, не зависящих от скоростей, функции L, M, N можно считать определенными только в трехмерном подпространстве $R^3\{\psi, \theta, \varphi\}$ фазового пространства, а условия (4.3) — выполняющимися на прямой $\gamma\{\psi=\varkappa\varphi,\ \theta=\theta_0\}$, представляющей проекцию многообразия Ω в это подпространство. Таким образом, обобщенные силы оказываются произвольными в $R^3\{\psi, \theta, \varphi\}$ всюду, за исключением прямой γ, в точках которой они вычисляются по формулам (4.3).

С другой стороны, эти формулы можно полагать вариантом определения обобщенных сил (как непрерывных функций) во всем пространстве, если заменить θ_0 на его произвольное значение θ. Соответствующие выражения получают моменты (4.4), в таком виде они были выведены в [14]; их частные модификации ранее приводились в [22] для случая расположения оси z перпендикулярно круговому сечению эллипсоида инерции ($A=B$, $F=0$), а также в [5, 6] для случая, когда оси координат совпадают с главными ($D=E=F=0$). Наиболее изученным в этом отношении является симметричное твердое тело $A=B$, $D=E=F=0$. Указанный метод доопределения обобщенных сил дает $Q_\psi=Q_\varphi=0$, тогда, как видно из (4,4), величина главного момента $M(\theta)$ равна Q_θ, следовательно [20, 29]

$$M(\theta)=\omega_e \sin\theta[(C-A)\omega_e\cos\theta+C\omega_r] \tag{4.5}$$

5. Рассмотренное поле позиционных сил далее полагается потенциальным. Пусть $U(\psi, \theta, \varphi)$ — силовая функция, или потенциал поля, в котором регулярная прецессия твердого тела является одним из возможных его движений. Установим взаимосвязь структуры потенциала с геометрией масс тела и параметрами регулярной прецессии. Предположим, что вторые смешанные производные функции U непрерывны. Тогда

$$Q_\psi=\partial U/\partial\psi, \quad Q_\theta=\partial U/\partial\theta, \quad Q_\varphi=\partial U/\partial\varphi \tag{5.1}$$

Непрерывность функции U допускает возможность ее разложения в кратный ряд Фурье [30]. Так как силовое поле предполагается стационарным и его действие на твердое тело определяется только расположением тела в пространстве, то из смысла координат ψ, θ, φ следует периодичность функции U по каждому из аргументов с периодом 2π. Сформулируем следующее утверждение.

Лемма 1. Если потенциал зависит не более, чем от двух эйлеровых углов, то необходимым условием регулярной прецессии является расположение оси собственного вращения перпендикулярно круговому сечению эллипсоида инерции для закрепленной точки.

Доказательство. Когда U не зависит от φ или ψ, соответственно первое или третье из выражений (4.3) обращается в нуль тождественно по всем φ. Тогда

$$A=B, \quad F=0 \tag{5.2}$$

Если U не зависит от θ, то обращается в нуль второе из выражений (4.3). Это влечет либо условие (5.2), либо соотношение

$$\cos\theta_0=-2\omega_e^{-1}\omega_r \tag{5.3}$$

при котором свободный член, равный $\omega_r(A+B-C)$, строго положителен в силу сделанного в п. 2 замечания о форме тела. Утверждение леммы следует теперь из равенств (5.2) и смысла величин A, B и F.

Изучим варианты зависимости потенциала от различных комбинаций эйлеровых углов.

1°. $U=\mathrm{const}$ (обобщенный случай Эйлера). В силу леммы тождественно выполняются условия

$$(2\omega_e \cos\theta_0+\omega_r)(D\sin\varphi-E\cos\varphi)=0 \tag{5.4}$$

$$(\omega_e^2\cos 2\theta_0+2\omega_e\omega_r\cos\theta_0+\omega_r^2)(E\sin\varphi+D\cos\varphi)+$$
$$+\omega_e\sin\theta_0[(C-A)\omega_e\cos\theta_0+C\omega_r]=0 \tag{5.5}$$

$$\cos\theta_0(D\sin\varphi-E\cos\varphi)=0 \tag{5.6}$$

которые являются совместными лишь при $D=E=0$, таким образом, тело обладает динамической симметрией относительно оси собственного вращения. Равенство (5.5) устанавливает соотношение между величинами угловых скоростей ω_e, ω_r и углом нутации в виде

$$\cos\theta_0=C\omega_r[(A-C)\omega_e]^{-1}\neq 0 \tag{5.7}$$

поэтому регулярная прецессия оказывается четырехпараметрической.

2°. $U=U(\varphi)$. В этом случае условия (5.4) и (5.5) выполняются тождественно. Обращение в нуль первой скобки в (5.4) дает уравнение

$$\cos\theta_0=-{}^1/_2\omega_e^{-1}\omega_r \tag{5.8}$$

которое несовместно с (5.7). Отсюда следует $D=E=0$, и тогда $U=\mathrm{const}$ в силу (5.6).

3°. $U=U(\psi)$. В этом случае тождественно выполняются условия (5.5) и (5.6), откуда следует $D=E=0$. Тогда

$$\partial U/\partial\psi|_{\psi=\varkappa\varphi}\equiv 0 \tag{5.9}$$

Представление U в виде ряда

$$U=u_0+\sum_{j=1}^{\infty}(w_j^s\sin j\psi+w_j^c\cos j\psi) \tag{5.10}$$

делает очевидным необходимость обращения в нуль всех коэффициентов для того, чтобы условие (5.9) имело место при подстановке $\psi=\varkappa\varphi$. Таким образом, $U=\mathrm{const}$.

4°. $U=U(\theta)$. В этом случае тождественно выполняются условия (5.4) и (5.6), откуда вытекает необходимость динамической симметрии тела: $D=E=0$. Представляется естественным поэтому рассматриваемый вариант охарактеризовать как обобщенный случай Лагранжа. Как следует из (4.3), регулярная прецессия осуществляется для любой гладкой функции $U(\theta)$ при выполнении условия

$$dU/d\theta|_{\theta=\theta_0}=\omega_e\sin\theta_0[(C-A)\omega_e\cos\theta_0+C\omega_r] \tag{5.11}$$

В случае однородного поля сил тяжести $U=\mp mgl\cos\theta$ (m – масса тела, l – расстояние от закрепленной точки до центра масс), соответствующая формула (5.11) указана в [3, 4] и несколько ранее в [20] для частного случая катящегося конуса. Если тело находится под действием центрального ньютоновского поля сил, то $U=\mp mgl\cos\theta+{}^3/_4(C-A)gR^{-1}\cos 2\theta$ (R – расстояние от закрепленной точки до притягивающего центра, большое по сравнению с размерами тела); соответствующее условие, аналогичное формуле Пуансо – Рауса, приведено в [11, 12]. В [9] был рассмотрен частный случай прецессии Земли, когда $U=-{}^3/_4\mu^2(C-A)H\sin^2\theta$ (μ – количество движения Земли, $H=1+{}^3/_2e^2+\varepsilon(1+{}^3/_2e'^2-{}^3/_2c^2)$, e и e' – эксцентриситеты орбит Земли и Луны соответственно, c – наклон орбиты Луны к плоскости эклиптики, $\varepsilon=2{,}1758\ldots$). Основной результат о произвольности функции $U(\theta)$ установлен в [10].

Для силовой функции общего вида регулярная прецессия является четырехпараметрической, и независимый выбор величин ω_e и ω_r определяет значение угла θ_0. Однако если в частном случае потенциал имеет вид

$$U=u_0+u_1\cos\theta+u_2\cos 2\theta \tag{5.12}$$

то в силу (5.11) величина угла нутации оказывается не связанной с угловыми скоростями прецессии и собственного вращения, которые находятся по формулам

$$\omega_e=2[(A-C)^{-1}u_2]^{1/2},\qquad \omega_r=-(C\omega_e)^{-1}u_1 \tag{5.13}$$

Тогда регулярная прецессия оказывается трехпараметрической, а эллипсоид инерции, как видно из первой формулы (5.13), представляет собой сжатый сфероид при $u_2>0$ и вытянутый при $u_2<0$. Результаты п.п. 2°, 3°, 4° составляют доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. Если потенциал зависит не более, чем от одного из эйлеровых углов, то регулярная прецессия существует тогда и только тогда, когда потенциал либо представляется постоянной, либо его возможным аргументом является угол нутации; при этом максимальное число начальных значений, выбираемых произвольно, равно четырем, а само движение совершается телами, обладающими динамической симметрией и составляет свойство всех полей с любым потенциалом, соответствующим приведенной альтернативе.

5°. $U=U(\theta,\varphi)$. В этом случае функция U и ее производные представимы в виде рядов (суммирование по i от 1 до ∞, штрих означает дифференцирование по θ):

$$U=u_0(\theta)+\sum[v_i^s(\theta)\sin i\varphi+v_i^c(\theta)\cos i\varphi] \tag{5.14}$$

$$\partial U/\partial\theta=u_0'(\theta)+\sum[v_i^{s\prime}(\theta)\sin i\varphi+v_i^{c\prime}(\theta)\cos i\varphi] \tag{5.15}$$

$$\partial U/\partial\varphi=\sum[iv_i^s(\theta)\cos i\varphi-iv_i^c(\theta)\sin i\varphi] \tag{5.16}$$

Условие (5.4) выполняется тождественно. Если $D=E=0$, то $N|_{\theta=\theta_0}=0$, и в силу (5.15) и (5.16) функции $v_i^s(\theta)$ и $v_i^c(\theta)$ $(i=1, 2, \ldots)$ имеют общий кратный нуль в точке $\theta=\theta_0$, а соотношение (5.11) имеет место для $u_0(\theta)$. Следовательно, при этих условиях в рассматриваемом поле регулярная прецессия симметричного тела существует и является трехпараметрической.

В случае тела с произвольным распределением масс условие (5.4) приводит к соотношению (5.8), в котором знак «минус» означает, что угол нутации может быть только тупым, а регулярная прецессия — обратной. Тогда

$$\theta_0=\pi-\arccos(^1/_2\omega_e^{-1}\omega_r),\qquad \sin\theta_0=(2\omega_e)^{-1}(4\omega_e^2-\omega_r^2)^{1/2} \tag{5.17}$$

и из условий (4.3) и формул (5.15) и (5.16) следует, что первые коэффициенты ряда (5.15) обязаны подчиняться условиям

$$\begin{aligned}
v_1^s(\theta_0)&=^1/_2E\omega_e^2\sin 2\theta_0=-^1/_4E\omega_r(4\omega_e^2-\omega_r^2)^{1/2}\\
v_1^c(\theta_0)&=^1/_2D\omega_e^2\sin 2\theta_0=-^1/_4D\omega_r(4\omega_e^2-\omega_r^2)^{1/2}\\
v_1^{s\prime}(\theta_0)&=E\omega_e^2\cos 2\theta_0=^1/_2E(\omega_r^2-2\omega_e^2)\\
v_1^{c\prime}(\theta_0)&=D\omega_e^2\cos 2\theta_0=^1/_2D(\omega_r^2-2\omega_e^2)\\
u_0'(\theta_0)&=-^1/_4(A+C)\omega_e^2\sin 2\theta_0=^1/_4(A+C)\omega_r(4\omega_e^2-\omega_r^2)^{1/2}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

а для остальных — θ_0 должно быть кратным нулем. Это последнее условие вынуждает характеризовать существование регулярной прецессии в рассматриваемом варианте как исключительный случай.

Предыдущее замечание справедливо для любого отрезка ряда (5.14) длины $i\geqslant 2$. Если $i=1$, то условия (5.18) для заданной функции U представляют систему уравнений относительно четырех параметров ω_e, ω_r, D, E. Однако структура системы такова, что необходимым условием ее совместности является пропорциональность центробежных моментов соответствующим значениям коэффициентов при $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, а также их производных при $\theta=\theta_0$. Если это выполняется (в частности, когда $v_1^s(\theta)=c_1\sin 2\theta$, $v_1^c(\theta)=c_2\cos 2\theta$, c_1, c_2 — const, — в этом случае пропорциональность имеет место для любого θ), то регулярная прецессия существует и является двухпараметрической. Если же это достигается поворотом осей x и y, что эквивалентно фиксированию начального значения φ_0, то количество независимых параметров прецессии сокращается на единицу. В остальных случаях исследуемое движение не осуществляется.

К рассмотренному варианту относится открытая в [12] регулярная прецессия несимметричного тела в ньютоновском центральном поле, совершающаяся вокруг оси, проходящей через закрепленную точку и притягивающий центр. Так как поле является осесимметричным, то аргумент ψ не входит в формулу для потенциала, поэтому его выражение [11] в силу леммы записывается в углах Эйлера следующим образом

$$U=-mg[(x_c \sin \varphi+y_c \cos \varphi) \sin \theta+z_c \cos \theta]-$$
$$-{}^3/_2 g[A \sin^2 \theta+C \cos^2 \theta-(D \cos \varphi+E \sin \varphi) \sin 2\theta]/R \qquad (5.19)$$

Тогда условия (5.18) представляют систему уравнений, совместную при $x_c=y_c=0$, и определяют величины угловых скоростей по формулам

$$\omega_e^2=3gR^{-1}, \quad C\omega_e\omega_r=mgz_c \qquad (5.20)$$

которые совпадают с указанными в [11, 14]. Таким образом, регулярная прецессия является двухпараметрической и, по лемме, обеспечивается расположением центра масс на оси собственного вращения, перпендикулярной круговому сечению эллипсоида инерции.

6°. $U=U(\psi, \theta)$. В этом случае функция U и ее производные представимы в виде рядов

$$U=u_0(\theta)+\sum (w_i^s(\theta)\sin i\psi+(w_i^c(\theta)\cos i\psi) \qquad (5.21)$$

$$\partial U/\partial \psi=\sum (iw_i^s(\theta)\cos i\psi-iw_i^c(\theta)\sin i\psi) \qquad (5.22)$$

$$\partial U/\partial \theta=u_0'(\theta)+\sum (w_i^{s\prime}(\theta)\sin i\psi+w_i^{c\prime}(\theta)\cos i\psi] \qquad (5.23)$$

Условие (5.6) выполняется тождественно. Если $D=E=0$, то $L|_\gamma=0$, и в силу (5.22), (5.23) и вида подстановки $\psi=\varkappa\varphi$ функции $w_i^s(\theta)$ и $w_i^c(\theta)$ ($i=1, 2\ldots$) имеют общий кратный нуль, а соотношение (5.11) имеет место для $u_0(\theta)$. Следовательно, при этих условиях регулярная прецессия существует и является трехпараметрической.

В случае тела с произвольным распределением масс условие (5.6) выполняется при $\cos \theta_0=0$, что означает перпендикулярность осей прецессии и собственного вращения. Из вида условий (4.3) и структуры рядов (5.22) и (5.23) вытекают следующие замечания в отношении подстановки $\psi=\varkappa\varphi$. Очевидно, число $\varkappa$ не может быть иррациональным. Если далее $\varkappa=q/p$ (p, q — целые, взаимно простые числа), где $q>1$, то в выражениях (5.22) и (5.23) отсутствуют члены вида $h \sin \varphi$ и $h \cos \varphi$. Следовательно, $\varkappa=1/n$, где n — целое, и условия для коэффициентов ряда (5.21) имеют вид

$$w_n^s(\theta_0)=\mp E\omega_r^2/n, \quad w_n^c(\theta_0)=\mp D\omega_r^2/n, \quad w_n^{s\prime}(\theta_0)=E(\omega_r^2-\omega_e^2)$$
$$w_n^{c\prime}(\theta_0)=D(\omega_r^2-\omega_e^2), \quad u_0'(\theta_0)=\pm C\omega_e\omega_r \qquad (5.24)$$

(верхний знак соответствует $\theta_0=\pi/2$, нижний — $\theta_0=3\pi/2$), для остальных функций θ_0 должно быть кратным нулем. Характер последнего условия определяет существование регулярной прецессии в рассматриваемом варианте как исключительный случай.

Без нарушения общности можно полагать $\varkappa>0$; тогда n — натуральное число. Дифференцирование подстановки $\psi=\varphi/n$ дает соотношение между величинами угловых скоростей в виде $\omega_r=n\omega_e$, таким образом, угловая скорость собственного вращения в n раз больше угловой скорости прецессии (прецессия «медленная», если n велико).

К системе условий (5.24) применимы рассуждения, проведенные в отношении равенств (5.18); как частный результат, определяется максимальное число независимых начальных значений, равное двум.

Если потенциал представляет отрезок тригонометрического ряда длины l, то необходимым условием существования регулярной прецессии является неравенство $l \geqslant n$. В частности, предположение $l=1$ влечет $n=1$; тогда угловые скорости прецессии и собственного вращения оказываются равными по величине.

Именно этому случаю соответствует открытая в [7] регулярная прецессия несимметричного тяжелого тела вокруг оси, наклоненной к вертикали под углом β. Так как потенциал предполагается не зависящим от угла собственного вращения, то отсюда следует, что центр масс должен находиться на оси собственного вращения Oz.

Расположение оси OX в горизонтальной плоскости приводит к следующему выражению для потенциала

$$U=-mgz_c(\cos\beta\cos\theta-\sin\beta\sin\theta\cos\psi) \tag{5.25}$$

Тогда условия (5.24) представляют систему уравнений, совместную при $E=0$, а также $\beta=-\operatorname{arctg} D/C$ $(D<0)$, и определяют величину угловых скоростей по формуле

$$\omega_e=\omega_r=[mgz_c(C^2+D^2)^{-1}]^{1/4} \tag{5.26}$$

которая совпадает с указанной в [31].

Равенство нулю центробежного момента E наряду с $F=0$ означает, что ось Ox является главной; это эквивалентно выбору начального значения φ_0 угла собственного вращения. Таким образом, регулярная прецессия оказывается однопараметрической и обеспечивается начальным горизонтальным расположением средней из главных осей эллипсоида инерции.

7°. $U=U(\psi,\varphi)$. В этом случае функция U и ее производные представимы в виде двойных рядов [30]:

$$U=u_0+\sum_{i=1}^{\infty}(v_i^s\sin i\varphi+v_i^c\cos i\varphi)+\sum_{j=1}^{\infty}(w_j^s\sin j\psi+w_j^c\cos j\psi)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(u_{kn}^{cc}\cos k\varphi\cos n\psi+u_{kn}^{cs}\cos k\varphi\sin n\psi+u_{kn}^{sc}\sin k\varphi\cos n\psi+$$
$$+u_{kn}^{ss}\sin k\varphi\sin n\psi) \tag{5.27}$$

$$\partial U/\partial\psi=\sum_{j=1}^{\infty}(jw_j^s\cos j\psi-jw_j^c\sin j\psi)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(nu_{kn}^{cs}\cos k\varphi\cos n\psi-$$
$$-nu_{kn}^{cc}\cos k\varphi\sin n\psi+nu_{kn}^{ss}\sin k\varphi\cos n\psi-nu_{kn}^{sc}\sin k\varphi\sin n\psi) \tag{5.28}$$

$$\partial U/\partial\varphi=\sum_{i=1}^{\infty}(iv_i^s\cos i\varphi-iv_i^c\sin i\varphi)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(ku_{kn}^{sc}\cos k\varphi\cos n\psi+$$
$$+ku_{kn}^{ss}\cos k\varphi\sin n\psi-ku_{kn}^{cc}\sin k\varphi\cos n\psi-ku_{kn}^{cs}\sin k\varphi\sin n\psi) \tag{5.29}$$

Условие (5.5) выполняется тождественно. Предположение $D=E=0$ в итоге приводит к случаю $U=\text{const}$, поэтому далее тело полагается несимметричным. Тогда равенство (5.5) влечет выражение (5.7) для угла нутации и соотношение между угловыми скоростями в виде

$$\varkappa^{-1}=\omega_r/\omega_e=|A-C|(A^2+C^2)^{-1/2} \tag{5.30}$$

Отсюда $\cos\theta_0=\pm C(A^2+C^2)^{-1/2}$, где верхний знак выбирается при $A>C$, нижний – при $A<C$. При регулярной прецессии угол θ является постоянным, поэтому можно считать, что $0<\theta_0<\pi$; тогда $\sin\theta_0=A(A^2+C^2)^{-1/2}$, следовательно,

$$\theta_0=\operatorname{arctg}(A/C)\qquad(A>C) \tag{5.31}$$
$$\theta_0=\pi-\operatorname{arctg}(A/C)\qquad(A<C)$$

т. е. ось собственного вращения располагается либо внутри угла $\pi/4<\theta<\pi/2$ (прямая прецессия), либо внутри угла $^3/_4\pi<\theta<\pi$ (обратная прецессия). Таким образом, угол нутации определяется только геометрией масс тела и обеспечивает второе из условий (4.3).

Дальнейшее исследование касается выполнимости первого и третьего из них, а также множества допустимых значений $\varkappa$.

В силу соотношения (5.30) всегда $\varkappa>1$, следовательно, регулярная прецессия не может быть медленной.

Подстановка $\psi=\varkappa\varphi$ и применение формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму приводят к появлению в выражениях (5.28) и (5.29) коэффициентов при переменной φ вида $k\pm n\varkappa$, где k, n – целые. Если $\varkappa$ иррационально, то множество чисел такой структуры образует над кольцом целых чисел модуль, содержащий все целые числа в качестве подмодуля. Так как элемент $1+0\varkappa$ совпадает с числом 1, то во второй сумме выражения (5.28) не могут появиться члены вида

$h\sin\varphi$ или $h\cos\varphi$ (h=const). Это же утверждение в отношении первой суммы является очевидным. Теперь сравнение (5.28) с соответствующим выражением (4.3) устанавливает равенство нулю $L|_\Omega$, что в итоге приводит к случаю U=const. Следовательно, $\varkappa$ – рациональное число, то есть величины угловых скоростей прецессии и собственного вращения соизмеримы.

Пусть вначале $\varkappa$ – целое, $\varkappa=r$ $(r>0)$. Тогда условие совпадения коэффициентов преобразованного ряда (5.28) и соответствующего тригонометрического отрезка (4.3) дает серию равенств

$$\sum_{k,n} n(\overset{cs}{u}_{kn}+\overset{sc}{u}_{kn})+\sum_{l,m} m(\overset{cs}{u}_{lm}-\overset{sc}{u}_{lm})+\sum_{\mu,\nu}\nu(\overset{cs}{u}_{\mu\nu}-\overset{sc}{u}_{\mu\nu})+2jw_j{}^s=G_S{}^\psi \qquad (5.32)$$

$$\sum_{k,n} n(\overset{ss}{u}_{kn}-\overset{cc}{u}_{kn})+\sum_{l,m} m(\overset{ss}{u}_{lm}+\overset{cc}{u}_{lm})-\sum_{\mu,\nu}\nu(\overset{ss}{u}_{\mu\nu}+\overset{cc}{u}_{\mu\nu})-2jw_j{}^c=H_S{}^\psi$$

каждая пара которых составлена для последовательных значений величины $S=1, 2, 3, \ldots$, определяющей индексы суммирования по формулам $k+nr=l-mr=\nu r-\mu=S$; последние слагаемые в левых частях присутствуют, когда $j=S/r$ – целое, а правые части определяются по формулам

$$G_1{}^\psi=-E\gamma_1,\quad H_1{}^\psi=D\gamma_1,\quad G_2{}^\psi=-2F\gamma_2 \qquad (5.33)$$

$$H_2{}^\psi=(A-B)\gamma_2,\quad \gamma_1=2\omega_r(2\omega_e\cos\theta_0+\omega_r)\sin\theta_0$$

$$\gamma_2=2\omega_e\omega_r\sin^2\theta_0,\quad G_S{}^\psi=H_S{}^\psi=0\quad (S=3, 4, \ldots)$$

Аналогичные равенства записываются для ряда (5.29):

$$\sum_{k,n} k(\overset{cs}{u}_{kn}+\overset{sc}{u}_{kn})+\sum_{l,m} l(\overset{sc}{u}_{lm}-\overset{cs}{u}_{lm})+\sum_{\mu,\nu}\mu(\overset{sc}{u}_{\mu\nu}-\overset{cs}{u}_{\mu\nu})+2iv_i{}^s=G_S{}^\varphi$$

$$\sum_{k,n} k(\overset{ss}{u}_{kn}-\overset{cc}{u}_{kn})-\sum_{l,m} l(\overset{cc}{u}_{lm}+\overset{ss}{u}_{lm})+\sum_{\mu,\nu}\mu(\overset{cc}{u}_{\mu\nu}+\overset{ss}{u}_{\mu\nu})-2iv_i{}^c=H_S{}^\varphi\quad (i=S=1, 2, 3, \ldots) \qquad (5.34)$$

где правые части определяются по формулам

$$G_1{}^\varphi=E\delta_1,\quad H_1{}^\varphi=-D\delta_1,\quad G_2{}^\varphi=2F\delta_2,\quad H_2{}^\varphi=(B-A)\delta_2 \qquad (5.35)$$

$$\delta_1=\omega_e{}^2\sin 2\theta_0,\quad \delta_2=\omega_e{}^2\sin^2\theta_0,\quad G_S{}^\varphi=H_S{}^\varphi=0\quad (S=3, 4, \ldots)$$

В выражениях (5.33) и (5.35) величины связаны соотношениями (5.30) и (5.31) (и в силу леммы $A=B$, $F=0$), таким образом, для произвольного вида функции $U(\psi, \varphi)$ равенства (5.32) и (5.34) представляют систему уравнений относительно единственной величины – одной из угловых скоростей. Это характеризует существование регулярной прецессии с целым $\varkappa$ как исключительный случай.

Для общей ситуации система (5.32), (5.34) не является совместной, однако если в отдельных случаях она становится таковой выбором соответствующих значений центробежных моментов, то на геометрию масс тем самым накладывается ограничение; другое вытекает из указанного ранее условия рациональности отношения (5.30) (пара значений три и четыре для осевых моментов A и C дает пример целого $\varkappa$).

Положительный ответ на вопрос о существовании случаев, когда необходимые и достаточные условия регулярной прецессии как система уравнений является совместной, в п. 5° и 6° обеспечивался соответствующими примерами. Здесь аналогичный ответ достигается построением. Можно проверить, что равенства (5.32) и (5.34) для любых $r\geqslant 2$ и одного из ω_e и ω_r удовлетворяются значениями коэффициентов

$$\overset{cs}{u}_{r-1,1}=-\overset{sc}{u}_{r-1,1}={}^1/_2G_1{}^\psi,\qquad \overset{ss}{u}_{r-1,1}=\overset{cc}{u}_{r-1,1}=-{}^1/_2H_1{}^\psi \qquad (5.36)$$

$$v_1{}^s={}^1/_2[(r-1)G_1{}^\psi+G_1{}^\varphi],\quad v_1{}^c={}^1/_2[(1-r)H_1{}^\psi-H_1{}^\varphi]$$

при всех прочих, равных нулю. Тогда ряд (5.27) обращается в тригонометрический отрезок длины 1 по ψ и длины $r-1$ по φ. В общем случае отрезок может иметь сколь угодно большую длину. Можно провести соответствующее построение, отправляясь от уравнений (5.32) и (5.34), начиная с $S=1$. Снизу длина по φ ограничена числом $r-1$ для заданного параметра r регулярной прецессии. Действительно, при $S=1$ правые части уравнений отличны от нуля, тогда отличен от нуля хотя бы один из коэффициентов u_{lm} или $u_{\mu\nu}$. Множество решений уравнения $\mu-\nu r=\pm 1$ в целых числах дается формулой $\mu=\pm 1+r\tau$, $\nu=\tau$ $(\tau=1, 2, \ldots)$, следовательно, $\mu\geqslant r-1$.

Регулярная прецессия в поле с потенциалом, определяемым по формулам (5.36) в силу соотношений (5.30) и (5.31) является двухпараметрической, таким образом, три есть максимальное число независимых начальных значений для всех существующих регулярных прецессий, соответствующих рассматриваемому варианту.

Пусть теперь $\varkappa=q/p$ – несократимая дробь $(p,\ q>0,\ p\neq 1)$. Тогда числа $k\pm n\varkappa$ (k, n – натуральные) приобретают вид σ/p, где σ пробегает множество всех целых чисел (кроме нуля). Действительно, p и q взаимно просты, поэтому существуют такие целые k° и n°, что $k^\circ p+n^\circ q=1$. Если $\sigma k^\circ>0$, то натуральное $k=\sigma k^\circ$ и целое $n=\sigma n^\circ$ реализуют равенство

$$kp+nq=\sigma \tag{5.37}$$

Когда $\sigma k^\circ<0$, это равенство обеспечивается выбором натурального $k=\sigma k^\circ+\tau^\circ q$ и целого $n=\sigma n^\circ-\tau^\circ p$, где τ° – первое натуральное число, при котором $k>0$.

Таким образом, для рассматриваемого случая необходимые и достаточные условия регулярной прецессии совместно с выражениями (5.30) и (5.31) записываются в виде равенств, совпадающих с (5.32) – (5.35), в которых полагается $S=|\sigma|$, а суммирование в левых частях проводится по всем индексам, удовлетворяющим соотношению (5.37) (более подробно: с условием индексации $kp+nq=lp-mq=\nu q-\mu p=S$; а также $ip=S$, $jp=Sq$, где в двух последних равенствах S кратно p).

Это соотношение при каждом σ, в частности при каждом S, представляет уравнение в целых числах, допускающее бесконечное множество решений; так если $(k,\ n)$ – пара его решений, то для каждого $\tau=1,\ 2,\ldots$ пары $(k_\tau,\ n_\tau)$, где $k_\tau=k+\tau q$, $n_\tau=n-\tau p$ также являются решениями (5.37). Значит, в случае, когда отрезок (5.27) имеет бесконечную длину, в левых частях равенств (5.32) и (5.34) содержится бесконечное число членов, иными словами, соответствующие ряды имеют нулевую сумму.

Приведенное выше замечание означает, что в рассматриваемом варианте существуют регулярные прецессии в полях с потенциалом, раскладывающимся в бесконечный ряд Фурье, а доказательство этого допускает простую геометрическую интерпретацию. Как известно, для заданных целых p и q множество их целочисленных линейных комбинаций образует полный модуль, представимый на плоскости в виде двумерной полной решетки. Полагая плоскость декартовой, можно совокупность искомых пар, удовлетворяющих равенству (5.37), изобразить точками правой полуплоскости (для $k>0$). Утверждение тогда заключается в том, что каждая прямая $x+y=S$ $(S=1,\ 2,\ 3,\ldots)$ проходит через бесконечное число точек, отождествленных с векторами введенной решетки.

8°. $U=U(\psi,\ \theta,\ \varphi)$. В этом случае функция U раскладывается в тройной ряд Фурье, который легко преобразуется в двойной ряд (5.27), где коэффициенты зависят от θ. Соответственно в виде рядов (5.28) и (5.29) представимы производные U по ψ и по φ, а производная по θ записывается следующим образом

$$\partial U/\partial\theta=u_0'+\sum_{i=1}^{\infty}(v_i^{s'}\sin i\varphi+v_i^{c'}\cos i\varphi)+\sum_{j=1}^{\infty}(w_j^{s'}\sin j\psi+w_j^{c'}\cos j\psi)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(u_{kn}^{cc'}\cos k\varphi\cos n\psi+u_{kn}^{cs'}\cos k\varphi\sin n\psi+u_{kn}^{sc'}\sin k\varphi\cos n\psi+$$

$$+u_{kn}^{ss'}\sin k\varphi\sin n\psi) \tag{5.38}$$

Необходимые и достаточные условия (4.3) существования регулярной прецессии в рассматриваемом случае сводятся к двум группам равенств, совпадающих соответственно с (5.32) и (5.34) (с учетом (5.33) и (5.35)), которые в отличие от п. 7° здесь дополняются равенствами

$$\sum_{k,n}(u_{kn}^{cc'}-u_{kn}^{ss'})+\sum_{l,m}(u_{lm}^{cc'}+u_{lm}^{ss'})+\sum_{\mu,\nu}(u_{\mu\nu}^{cc'}+u_{\mu\nu}^{ss'})+2v_i^{c'}+2w_j^{c'}=H_S^{\theta}$$

$$\sum_{k,n}(u_{kn}^{sc'}+u_{kn}^{cs'})+\sum_{l,m}(u_{lm}^{sc'}-u_{lm}^{cs'})-\sum_{\mu,\nu}(u_{\mu\nu}^{sc'}-u_{\mu\nu}^{cs'})+2v_i^{s'}+2w_j^{s'}=G_S^{\theta} \tag{5.39}$$

$$G_1^{\theta}=E\lambda_1,\qquad H_1^{\theta}=D\lambda_1,\qquad G_2^{\theta}=2F\lambda_2,\qquad H_2^{\theta}=(A-B)\lambda_2$$

$$\lambda_1=2(\omega_e^2\cos 2\theta_0+2\omega_e\omega_r\cos\theta_0+\omega_r^2),\qquad \lambda_2=4\omega_e(\omega_e\cos\theta_0+2\omega_r)\sin\theta_0 \tag{5.40}$$

Здесь G_S^{θ}, H_S^{θ} равны нулю при остальных значениях S, равных $S=$ $=k+n\varkappa=l-m\varkappa=\nu\varkappa-\mu$ и добавочно $S=i=\varkappa j$ при целых S; эти соотношения служат условием для индексов в выражениях левых частей, вычисляемых при $\theta=\theta_0$.

Также имеет место равенство

$$u_0'(\theta_0)={}^1/_4(2C-A-B)\,\omega_e^2\sin 2\theta_0+C\omega_e\omega_r\sin\theta_0 \tag{5.41}$$

Уравнения (5.32), (5.34) и (5.39) непосредственно следуют из формул (4.3) и представления потенциала в виде кратного ряда Фурье и могут быть поэтому использованы с соответствующими видоизменениями для исследования всех рассматриваемых вариантов 1°–8°. Индекс S может принимать рациональные значения (в частности, целые), а также иррациональные вида $k \pm n\varkappa$ с натуральными k и n при иррациональном $\varkappa$. Ниже доказывается, что если переменная ψ входит в список аргументов функции U, то для величины $\varkappa$, а следовательно, и для S иррациональные значения невозможны — это утверждение является общим для вариантов 6°, 7° и 8°.

Лемма 2. Если потенциал зависит от угла прецессии, то в соответствующих регулярных прецессиях величины угловых скоростей прецессии и собственного вращения соизмеримы.

Доказательство. Пусть $\varkappa = \omega_e \omega_r^{-1}$ — иррациональное число. Каждой паре натуральных k, n соответствует ровно одна двойка чисел $S_1 = k + n\varkappa$, $S_2 = k - n\varkappa$ и обратно, тогда уравнения (5.32) для этих значений индекса S записываются в виде системы

$$u_{kn}{}^{cs} + u_{kn}{}^{sc} = 0, \quad u_{kn}{}^{ss} - u_{kn}{}^{cc} = 0 \quad (S = S_1)$$

$$u_{kn}{}^{cs} - u_{kn}{}^{sc} = 0, \quad u_{kn}{}^{ss} + u_{kn}{}^{cc} = 0 \quad (S = S_2)$$

допускающей только нулевое решение. Равенство нулю коэффициентов w_j является очевидным. Доказательство леммы следует теперь из представления потенциала в виде (5.27).

Таким образом, в качестве необходимых и достаточных условий регулярной прецессии в рассматриваемом варианте уравнения (5.32), (5.34) и (5.39) можно составлять лишь для рациональных значений S. Существование искомого движения является следствием совместности этих уравнений и при заданном произвольном U имеет место в исключительных случаях. Последние действительно возможны, как показывает следующее построение.

Пусть k и l — наименьшие из таких натуральных чисел, что $kp - nq = p$, $lp - mq = 2p$ для заданного $\varkappa = q/p$, где p и q взаимно просты. Тогда тригонометрический отрезок (5.27) с коэффициентами

$$\begin{gathered}
u_{kn}{}^{cs} = -u_{kn}{}^{sc} = (2n)^{-1} G_1{}^{\psi}, \quad u_{kn}{}^{ss} = u_{kn}{}^{cc} = (2n)^{-1} H_1{}^{\psi} \\
u_{lm}{}^{cs} = -u_{lm}{}^{sc} = (2m)^{-1} G_2{}^{\psi}, \quad u_{lm}{}^{ss} = u_{lm}{}^{cc} = (2m)^{-1} H_2{}^{\psi} \\
v_1{}^{s}(\theta) = \alpha_1 \sin(\theta - \theta_0) + a_1, \quad \alpha_1 = G_1{}^{\theta}/2 \\
a_1 = {}^1/_2 (G_1{}^{\varphi} + kn^{-1} G_1{}^{\psi}), \quad v_1{}^{c}(\theta) = \beta_1 \sin(\theta - \theta_0) + b_1 \\
\beta_1 = H_1{}^{\theta}/2, \quad b_1 = -{}^1/_2 (H_1{}^{\varphi} + kn^{-1} H_1{}^{\psi}) \\
v_2{}^{s}(\theta) = \alpha_2 \sin(\theta - \theta_0) + a_2, \quad \alpha_2 = G_2{}^{\theta}/2 \\
a_2 = {}^1/_4 (G_2{}^{\varphi} + lm^{-1} G_2{}^{\psi}), \quad v_2{}^{c}(\theta) = \beta_2 \sin(\theta - \theta_0) + b_2 \\
\beta_2 = H_2{}^{\theta}/2, \quad b_2 = -{}^1/_4 (H_2{}^{\varphi} + lm^{-1} H_2{}^{\psi})
\end{gathered} \tag{5.42}$$

при всех прочих, равных нулю, и свободным членом в виде $u_0(\theta) = u_0'(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$ или в виде $u_0(\theta) = {}^1/_8 (A + B - 2C) \omega_e^2 \cos 2\theta_0 - C \omega_e \omega_r \times \cos\theta$ — определяет формулу для потенциала $U(\psi, \theta, \varphi)$, обеспечивающего существование двухпараметрической регулярной прецессии с произвольным расположением в теле оси собственного вращения.

Основные результаты п.п. 5°—8° допускают следующее объединение.

Теорема 2. Если потенциал зависит от двух или трех эйлеровых углов, то свойство тела совершать регулярную прецессию в соответствующем поле не является необходимым и реализуется в исключительных случаях; при этом максимальное число начальных значений, выбираемых произвольно, не превосходит двух. Для существующих регулярных прецессий справедливы следующие утверждения:

Если один из эйлеровых углов не входит в выражение для потенциала, то ось собственного вращения перпендикулярна круговому сечению эллипсоида инерции в неподвижной точке.

Если аргументом, который не входит в выражение для потенциала, является угол прецессии, то регулярная прецессия — обратная.

Если угол прецессии входит в выражение для потенциала, то величины угловых скоростей прецессии и собственного вращения соизмеримы.

Если выражение для потенциала не содержит угла собственного вращения, то угловая скорость собственного вращения в целое число раз больше угловой скорости прецессии или равна ей.

Если угол нутации не входит в выражение для потенциала, то абсолютная величина тангенса этого угла равна наибольшему отношению моментов инерции тела относительно средней полуоси эллипсоида инерции и оси собственного вращения.

Следствие. Если хотя бы один из эйлеровых углов не входит в выражение для потенциала и ось собственного вращения является главной, то свойство тела совершать регулярную прецессию влечет динамическую симметрию относительно этой оси.

Частный вариант этого следствия составляет один из результатов [24] применительно к регулярным прецессиям в осесимметричном поле (аргументом, который не содержит силовая функция, в этом случае является угол прецессии).

6. Приведенное исследование позволяет очертить границы разрешимости поставленной в п. 1 обратной задачи и в этих границах дать ее полное решение. Формулы (3.7) и (4.2) решают поставленную задачу для любых заданных свойств и параметров регулярной прецессии в поле позиционных сил; существующие ограничения связаны с предположенной далее потенциальностью силового поля. Твердое тело, предназначенное совершать требуемую регулярную прецессию, полагается имеющим, вообще говоря, произвольную форму и точку закрепления, выбор которой не зависит от исследователя. Условие оптимальности допускает иерархию в убывающем порядке сокращения числа аргументов силовой функции и уменьшения длины тригонометрического отрезка потенциала по любому из углов. Алгоритм построения искомой силовой функции основан на следующих положениях:

Если тело обладает осью динамической симметрии, которая предполагается осью собственного вращения, то потенциал можно выбрать постоянным, когда заданные величины составляющих угловых скоростей и угол нутации удовлетворяют соотношению (5.7). Когда это соотношение не выполняется, потенциал выбирается в виде произвольной функции, зависящей от угла нутации и подчиняющейся формуле (5.11).

Если тело имеет произвольное распределение масс, то регулярная прецессия с иррациональным соотношением составляющих угловых скоростей возможна лишь обратная и в случае, когда ось собственного вращения перпендикулярна круговому сечению эллипсоида инерции в закрепленной точке, а заданные параметры связаны соотношением (5.8), или (5.17). При выполнении этих условий потенциал строится в виде отрезка (5.14) наименьшей длины 2 по φ и с коэффициентами, удовлетворяющими равенствам (5.18).

В случае, когда соотношение угловых скоростей является рациональным числом, а ось собственного вращения предполагается расположенной указанным выше образом, потенциал строится двояким путем. Если величина угловой скорости прецессии в n раз меньше величины угловой скорости собственного вращения или равна ей, а их направления перпендикулярны, то искомое построение осуществляется в виде отрезка (5.21) наименьшей длины n по ψ и с коэффициентами, составленными по формулам (5.24). Если же угол нутации не является прямым, а отношение (5.30) рационально и тело заведомо не обладает осью симметрии, предназначенной служить осью собственного вращения, то по формулам (5.27), (5.36) и (5.31) строится потенциал, реализующий как прямую, так и обратную регулярную прецессию, в которой величина угловой скорости прецессии в r раз больше величины угловой скорости собственного вращения. Когда это отношение равно q/p, построение проводится с помощью формул (5.27) и (5.42), где коэффициенты перед $\sin(\theta-\theta_0)$ полагаются равными нулю. С соответствующим выбором чисел k и l достигается оптимальность в уменьшении длины отрезка (5.27) по φ, аналогичный выбор n и m обеспечивает оптимальность в уменьшении длины по ψ.

Необходимость использования зависимости потенциала от всех трех эйлеровых углов становится актуальной, когда ось собственного вращения (ось фигуры) предполагается имеющей произвольное расположение в теле. В этом случае с единственным ограничением на соотношение угловых скоростей тригонометрический отрезок с коэффициентами, составленными по формулам (5.42), имеющий длину $\max\{k, l\}$ по φ или длину $\max\{m, n\}$ по ψ, а также длину 1 по θ (если выбрать первую формулу (5.42) для свободного члена), определяет потенциал, формирующий силовое поле, в котором твердое тело совершает заданную регулярную прецессию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Euleri L.* Commentationes mechanicae ad theoriam corporum rigidorum pertinents // Opera omnia. Ser. 2. V. 8. Auctoritate et impensis societatis scientiarum naturallium Helveticae. Turici: Orell Füssli, 1965. 417 p.
2. *Tournaire.* Mémoire sur la rotation des corps pesant // C. r. Acad. Sci. 1860. T. 50. P. 476–481.
3. *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
4. *Routh E. J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. P. 2. London: Macmillan, 1884. 343 p.
5. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применения. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 352 с.
6. *Grammel R.* Die stabilität der Staudeschen Kreiselbewegungen // Math. Z. 1920. Bd. 6, H. 1/2. S. 124–142.
7. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura ed appl. 1947. Ser. 4. V. 26, fsc. 3–4. P. 271–281.
8. *Гуляев М. П.* О динамически возможных регулярных прецессиях твердого тела, имеющего одну закрепленную точку // Тр. сектора математики и механики АН КазССР. 1958. Т. 1. С. 202–208.
9. *Tisserand F.* Sur le mouvement de rotation de la Terre autor de son centre de gravité // C. r. Acad. Sci. 1885. T. 101. P. 195–199.
10. *Gyldén H.* Undersökning af fall, der rotations – problemets lösning kan uttryckas medelst reelt periodiska funktioner af tiden // Öfversigt af Kongl. Vetensk.– Akad. förhandlingar. 1893. V. 50. № 2. P. 63–75.
11. *Бентсик Э.* Об одном виде регулярной прецессии твердого несимметричного тела в поле ньютоновского притяжения // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1970. № 2. С. 3–8.
12. *Bentsik E.* Su di un tipo di precessioni regolari per un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze newtoniane // Rendiconti Sem. mat. Univ. Padova. 1968–1969. V. 41. P. 252–260.
13. *Горр Г. В.* Регулярная прецессия гиростата в центральном ньютоновском поле сил // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1972. Вып. 4. С. 105–108.
14. *Смотров В. М.* Регулярные прецессии твердого тела с неподвижной точкой в ньютоновском поле сил // Теоретическая механика: Сб. научно-метод. статей. М.: Наука, 1977. Вып. 8. С. 70–77.
15. *Colombo G.* Osservazioni sulla stabilità dei moti merostatici di un giroscopio ed applicazioni ad un caso notevole // Rend. Sem. mat. Univ. Padova. 1951. V. 20, prte 1. P. 59–77.
16. *Goldstein H.* The classical motion of a rigid charged body in a magnetic field // Amer. J. Phys. 1951. V. 19. № 2. P. 100–109.
17. *Самсонов В. А.* О вращении тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 32–34.
18. *Гриоли Дж.* К общей теории асимметричных гироскопов // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 34–39.
19. *Grioli G.* Movimenti dinamicamente possibili per un solido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. fis., mat. e natur. 1957. Ser. 8. V. 22, fsc. 4. P. 459–463.
20. *Poinsot L.* Théorie des cônes circulaires roulants // J. Math. Pures et Appl. 1853. T. 18, № 1. P. 41–70.
21. *Grammel R.* Zusätze zur Kreiseltheorie mit einer Anwendung auf die Ballistik // Z. Math. und Phys. 1916. Bd. 64, H. 2. S. 129–168.
22. *Grioli G.* Precessioni regolari di un solido pesante asimmetrico // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. fis., mat. e natur. 1948. S. 8. V. 4, fsc. 4. P. 420–423.
23. *Суслов Г. К.* Основы аналитической механики. Т. 2. Киев: Тип. ун-та, 1902. 287 с.
24. *Галиуллин И. А.* Обратные задачи динамики твердого тела с одной закрепленной точкой // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 1. С. 12–21.
25. *Добронравов В. В.* Основы аналитической механики. М.: Высш. шк., 1976. 263 с.
26. *Галиуллин А. С.* Обратные задачи динамики. М.: Наука, 1981. 143 с.
27. *Гюнтер Н. М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. Л.; М.: Гостехиздат, 1934. 359 с.
28. *Горячев Д. Н.* Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава, 1910. 62 с.
29. *Schell W.* Theorie des Bewegung und der Kräfte. Bd. 2. Leipzig: Teubner, 1879. 618 s.
30. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. Л.; М.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
31. *Гуляев М. П.* О регулярной прецессии несимметричного гироскопа. Случай Гриоли // Теоретическая механика: Сб. научно-метод. статей. М.: Наука, 1975. Вып. 5. С. 130–137.

Москва

Поступила в редакцию
29.X.1985