

УДК 539.3

## О МЕТОДАХ УПРУГИХ РЕШЕНИЙ

ПОБЕДРА Б. Е., ШЕШЕНИН С. В.

Для решения задач теории малых упругопластических деформаций в [1] был предложен метод упругих решений [2]. Этот итерационный процесс оказался эффективным методом решения краевых задач для систем квазилинейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. В дальнейшем в связи с потребностями практики появились более общие определяющие соотношения механики деформируемого твердого тела [3, 4], а также различные обобщения метода упругих решений, связанные, прежде всего, с развитием вычислительной математики и ЭВМ. В [5] для решения операторных уравнений (к которым можно свести краевые задачи механики деформируемого твердого тела) использовался метод Ньютона (сейчас называют методом Ньютона—Канторовича), а в [6] — метод (модифицированный метод Ньютона—Канторовича), по существу совпадающий с методом упругих решений. В [7] был предложен метод, известный в настоящее время как метод переменных параметров упругости. Анализ его сходимости посвящена работа [8]. Сходимость метода упругих решений в классе обобщенных решений при активном деформировании впервые доказана в [9]. Обобщение схемы метода упругих решений, состоящее в введении итерационного числового параметра для одного эллиптического уравнения, предложено в [10]. Математическая литература, посвященная итерационным методам решения нелинейных операторных уравнений, довольно широка (см., например, [10—14]). В ней, как правило, отсутствуют ссылки на соответствующие работы механиков.

В [15, 16] были предложены итерационные методы решения квазистатических задач реономной механики деформируемого твердого тела с достаточно общими нелинейными соотношениями между напряжениями и деформациями, частным случаем которых являются и определяющие соотношения теории малых упругопластических деформаций (см. также [17, 18]). Поэтому сходимость ряда хорошо известных методов следует из теорем, доказанных в [16, 18]. Например, в [19, 20] итерационный процесс, рассмотренный в [16, 18], применяется к теории двузвенных ломанных и к теории пластического течения [3].

В настоящей работе рассматривается конкретизация методов, предложенных в [15, 18], к решению квазистатических задач теории малых упругопластических деформаций и дается практическое сравнение их сходимости.

1. Квазилинейные соотношения между тензором напряжений  $\sigma$  и малых деформаций  $\varepsilon$  можно записать в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.1)$$

где  $C_{ijkl}$  — функции инвариантов тензора деформации и тензоров, характеризующих анизотропию среды [21]. В частности, для изотропной среды имеем

$$C_{ijkl}(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon_u) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\varepsilon_u) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.2)$$

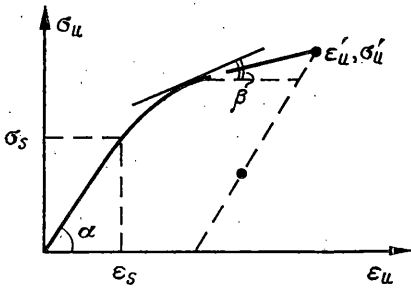
где  $\lambda(\varepsilon_u)$ ,  $\mu(\varepsilon_u)$  — функции интенсивности тензора деформаций  $\varepsilon_u$ , которые для теории малых упругопластических деформаций выражаются через функцию пластичности  $\omega$  [1] следующим образом:

$$\mu(\varepsilon_u) = \mu(1 - \omega(\varepsilon_u)), \quad \lambda(\varepsilon_u) = k^{-2/3} \mu(\varepsilon_u) \quad (1.3)$$

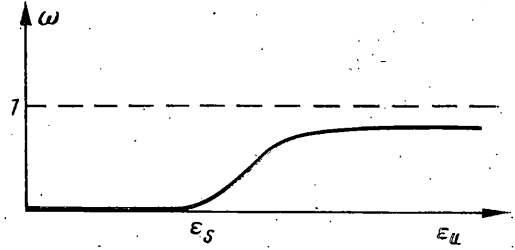
где  $\mu$  — модуль сдвига,  $k$  — модуль сжатия материала.

Представляя тензоры  $\sigma$  и  $\varepsilon$  в виде суммы девиаторов  $s$ ,  $e$  и шаровых частей, связь между напряжениями и деформациями для активных процессов записывается в виде

$$s = \sigma_u e / \varepsilon_u, \quad \sigma = k \theta \quad (1.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

причем из эксперимента известна функция  $\Phi(\epsilon_u)$  или  $\omega(\epsilon_u)$  (фиг. 1, 2,  $\operatorname{tg} \alpha = 2\mu$ ,  $\operatorname{tg} \beta = d\sigma_u/d\epsilon_u$ ):

$$\sigma_u = \Phi(\epsilon_u) = 2\mu(1 - \omega(\epsilon_u))\epsilon_u \quad (1.5)$$

Для пассивного процесса имеем

$$s - s' = 2\mu(e - e') \quad (1.6)$$

где  $s'$  и  $e'$  — соответственно девиаторы напряжений и деформаций, достигнутые к моменту разгрузки (фиг. 1).

Сформулируем квазистатическую задачу теории малых упругопластических деформаций. Для этого выразим напряжения через деформации согласно (1.4), (1.5), а деформации — через вектор перемещений  $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  ( $\epsilon = \operatorname{def} \mathbf{u}$ ). В результате получим три уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) + X_i = 0 \quad (1.7)$$

$$(C_{ijkl}(\mathbf{u})u_{k,l})_{,j} + X_i = 0 \quad (1.8)$$

относительно трех компонент вектора перемещений  $\mathbf{u}$ . Здесь и в дальнейшем выражения типа  $\sigma(\mathbf{u})$  означают, что величина  $\sigma$  выражена через перемещения с помощью определяющих соотношений и соотношений Коши. Так что записи (1.7), (1.8) эквивалентны. Предположим, что заданы граничные условия, например в виде

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad \sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j|_{\Sigma_2} = S_i^0 \quad (1.9)$$

где на частях  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  поверхности  $\Sigma$ , ограничивающей объем  $V$ , заданы соответственно перемещения  $u^0$  и поверхностные силы  $S^0$ , а внутри тела — объемные силы  $X$ .

Заметим, что в случае мягкой характеристики (фиг. 1) на функции  $\Phi$  и  $\omega$  обычно накладываются ограничения [1]:

$$0 < 2\mu\eta \leq d\sigma_u/d\epsilon_u \leq \sigma_u/\epsilon_u \leq 2\mu \quad (1.10)$$

$$0 \leq \omega \leq \omega + \epsilon_u d\omega/d\epsilon_u \leq 1 - \eta < 1 \quad (1.11)$$

Для случая жесткой характеристики (фиг. 3) соответствующие ограничения будут иметь вид

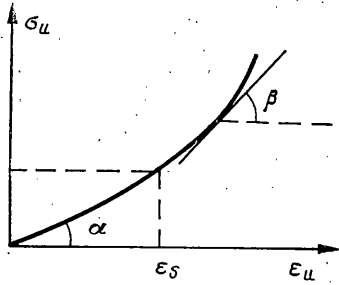
$$2\mu \leq \sigma_u/\epsilon_u \leq d\sigma_u/d\epsilon_u \leq 2\mu\eta_1 < \infty \quad (1.12)$$

$$-\infty < 1 - \eta_1 \leq \omega + \epsilon_u d\omega/d\epsilon_u \leq \omega \leq 0 \quad (1.13)$$

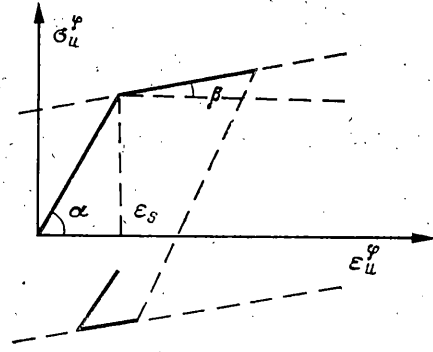
где  $\eta$ ,  $\eta_1$  — положительные числа. Ограничения (1.10)–(1.13) обеспечивают существование и единственность обобщенного решения задачи (1.7), (1.9), сходимость метода упругих решений, минимум лагранжиана в положении равновесия и максимум кастильяниана, единственность этих минимумов и максимумов и др. Введем некоторые определения.

При активных процессах напряжения обладают потенциалом  $W$  [22]:  $\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial W(\mathbf{u})/\partial \epsilon_{ij} + \partial W(\mathbf{u})/\partial \epsilon_{ji})$ , а именно:

$$W(\mathbf{u}) = \int_0^{\epsilon_u} \sigma_u(\mathbf{u}) d\epsilon_u(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} k\theta^2(\mathbf{u})$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Интеграл по объему от этого выражения

$$\varphi(\mathbf{u}) = \int_V W(\mathbf{u}) dV \quad (1.14)$$

называется энергией деформации, а интеграл

$$A^e(\mathbf{u}) = \int_V \mathbf{X} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Sigma_2} \mathbf{S}^o \cdot \mathbf{u} d\Sigma$$

работой внешних сил  $A^e$ .

Дифференциалом функционала  $\varphi$  (1.14) по векторному аргументу  $\mathbf{v}$  назовем выражение [22]:

$$D\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d\varphi(\mathbf{u} + \xi\mathbf{v})/d\xi|_{\xi=0}$$

Запишем выражение второго дифференциала  $\varphi$

$$\begin{aligned} D^2\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= \partial^2\varphi(\mathbf{u} + \xi_1\mathbf{v}_1 + \xi_2\mathbf{v}_2)/\partial\xi_1\partial\xi_2|_{\xi_1=0, \xi_2=0} \\ &= \int_V \left[ \frac{\partial s_{ij}}{\partial e_{kl}}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}_1) e_{kl}(\mathbf{v}_2) + k\theta(\mathbf{v}_1)\theta(\mathbf{v}_2) \right] dV \end{aligned}$$

где функциональные производные равны

$$\begin{aligned} \partial s_{ij}/\partial e_{kl} &= \mu(1 - \omega(\mathbf{u}))(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \\ &- 2\mu(d\omega/d\varepsilon_u) e_{ij}(\mathbf{u}) e_{kl}(\mathbf{u})/\varepsilon_u(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Нетрудно видеть, что

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_V [s_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) + k\theta(\mathbf{u})\theta(\mathbf{v})] dV = D\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_V \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dV \quad (1.16)$$

Обобщенным решением задачи (1.7), (1.9) называется вектор  $\mathbf{u}$ , принадлежащий множеству  $U = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in w_2^1, \mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}^o\}$  и удовлетворяющий тождеству (для любого вектора  $\mathbf{v} \in U$  [22]):

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = A^e(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad (1.17)$$

Как уже отмечено, теория малых упругопластических деформаций сформулирована в [1] для случая переменных нагружений, т. е. когда процессы нагрузки сменяются разгрузками [23, 24]. Но в реальных случаях такая смена может происходить неодновременно во всех точках  $\mathbf{x}$  тела.

Теория малых упругопластических деформаций справедлива для простых процессов или близких к ним [1]. В случае переменного нагружения простой процесс деформации в пятимерном пространстве Ильюшина описывается прямой линией [3]:  $\mathbf{e}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{e}^o(\mathbf{x})\kappa(t, \mathbf{x})$ ,  $\varepsilon_u = \sqrt{\mathbf{e}|\kappa|}$ .

Функция  $\kappa(t, \mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}$  может менять знак в некоторые моменты времени. Обозначим  $\text{sign } \kappa = \psi$ ,  $\kappa(0, \mathbf{x}) > 0$ ,  $\varepsilon_u^\psi = \psi \varepsilon_u$ . Тогда, например, для линейного упрочнения (фиг. 4,  $\text{tg } \beta = 2\mu\gamma$ ) и процесса деформации, для которого  $\kappa$  меняет знак в каждый момент времени  $t_l$  ( $l=1, 2, \dots$ ), соотношения (1.4) следует добавить зависимость

$$\sigma_u^\psi = \sigma_u^{(l)} + (-1)^l \mu [(-1)^l (\varepsilon_u^\psi - \varepsilon_u^{(l)})] \quad (1.18)$$

справедливой в моменты времени  $t_l \leq t \leq t_{l+1}$ , где

$$\varepsilon_u^{(l)} \equiv \varepsilon_u(t_l), \quad \sigma_u^{(l)} \equiv \sigma_u(t_l) \quad (1.19)$$

$$\mu(\varepsilon_u) = \begin{cases} 2\mu\varepsilon_u, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_s \\ 2\mu(1-\gamma)\varepsilon_s + 2\mu\gamma\varepsilon_u, & \varepsilon_u > \varepsilon_s \end{cases}$$

В случае переменного нагружения обобщенным решением задачи теории малых упругопластических деформаций будем называть вектор  $\mathbf{u}$ , удовлетворяющий тождеству (1.17) для любого момента времени, причем выражение  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  формулируется в соответствии с (1.16) соотношениями (1.4) и, например, (1.18), (1.19) или более общими.

2. Для доказательства утверждений, сформулированных в предыдущем пункте, и описания достаточно общих итерационных процессов решения квазистатических задач механики деформируемого твердого тела рассмотрим операторные определяющие соотношения [22, 25]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}^\sim(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.1)$$

которые означают, что тензор напряжений в момент  $t$  однозначно определяется значениями тензора деформаций во все предшествующие моменты  $\tau \in [0, t]$ . Если  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  зависит только от  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ , то оператор  $\mathbf{F}^\sim$  является функцией  $\mathbf{F}$ . Такая ситуация имеет место в теории упругости и в теории малых упругопластических деформаций, если априорно предполагается активность процесса деформации. Будем считать, что соотношения (2.1) однозначно разрешимы относительно деформаций ( $\mathbf{G}^\sim$  — оператор, обратный к  $\mathbf{F}^\sim$ ):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{G}^\sim(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.2)$$

Операторы  $\mathbf{F}^\sim$  и  $\mathbf{G}^\sim$  могут являться потенциальными. Тогда существуют скалярные операторы  $W^\sim$  и  $w^\sim$ , такие, что

$$\mathbf{F}^\sim(\boldsymbol{\varepsilon}) = \partial W^\sim(\boldsymbol{\varepsilon}) / \partial \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{G}^\sim(\boldsymbol{\sigma}) = \partial w^\sim(\boldsymbol{\sigma}) / \partial \boldsymbol{\sigma}.$$

Входящие сюда функциональные производные определяются следующим образом:

$$DW^\sim(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{h}) \equiv [\partial W^\sim(\boldsymbol{\varepsilon}) / \partial \boldsymbol{\varepsilon}] : \mathbf{h}, \quad Dw^\sim(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}) \equiv [\partial w^\sim(\boldsymbol{\sigma}) / \partial \boldsymbol{\sigma}] : \mathbf{h}$$

Естественно считать, что  $W^\sim(0) = w^\sim(0) = 0$ , тогда [22]  $W^\sim + w^\sim = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$ . Тензоры-операторы четвертого ранга  $\partial \mathbf{F}^\sim / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\partial \mathbf{G}^\sim / \partial \boldsymbol{\sigma}$  называются касательным модулем и касательной податливостью соответственно. При анализе обобщенных постановок краевых задач и итерационных методов их решения важную роль играют неравенства [25]:

$$0 < c_1 \Delta \leq \partial \mathbf{F}^\sim / \partial \boldsymbol{\varepsilon} \leq c_2 \Delta \quad (2.3)$$

$$0 < J_1 \Delta \leq \partial \mathbf{G}^\sim / \partial \boldsymbol{\sigma} \leq J_2 \Delta \quad (2.4)$$

ограничивающие механические свойства рассматриваемых материалов. Символ  $\Delta$  обозначает единичный тензор четвертого ранга [21]. Условно записанное неравенство (2.3) расширяется следующим образом

$$0 < c_1 \mathbf{h} : \mathbf{h} \leq \mathbf{h} : (\partial \mathbf{F}^\sim / \partial \boldsymbol{\varepsilon}) : \mathbf{h} \leq c_2 \mathbf{h} : \mathbf{h} \quad (2.5)$$

Аналогичный смысл имеет и неравенство (2.4). В этих неравенствах  $\mathbf{h}$  — произвольный симметричный тензор второго ранга,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензоры, входящие в (2.3), (2.4) как параметры (при доказательстве сходимости

итерационных методов достаточно выполнение неравенств в окрестности решения краевой задачи).

Постановка смешанной краевой задачи в перемещениях для материала, описываемого соотношением (2.1), аналогична (1.17) при условии  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ , где

$$a^\sim(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \int_V \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV = D\varphi^\sim(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_V DW^\sim(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dv$$

для случая потенциального оператора  $\mathbf{F}^\sim$  и  $a^\sim = \int_V \mathbf{F}^\sim(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV$  для непотенциального оператора  $\mathbf{F}^\sim$ . Выполнение неравенств (2.3) в окрестности решения влечет единственность обобщенного решения в этой окрестности.

Вариационная задача (1.17) в случае потенциального оператора эквивалентна задаче минимизации лагранжиана  $L^\sim = \varphi^\sim(\mathbf{u}) - A^e(\mathbf{u})$  на множестве  $U$ , если выполнены неравенства положительной определенности касательного модуля (2.3) [25].

Пусть  $\mathbf{p}^\sim(\varepsilon)$  — некоторый линейный оператор от деформаций, например тождественный оператор  $\Delta$ . Пространство функций  $U(\mathbf{u}^0=0)$  со скалярным произведением  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_p = \int_V \mathbf{p}^\sim(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV$  является гильбертовым (так

называемое энергетическое пространство  $H_p$  оператора  $\mathbf{p}$  [26]).

Левая часть (1.17) является линейным функционалом от  $\mathbf{v} - \mathbf{u}$  и по теореме Рисса [27] может быть представлена в виде скалярного произведения в  $H_p$ :  $(\mathbf{u}_*, \mathbf{v})_p = -a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ . Следовательно, определен некоторый оператор  $\mathbf{Q}$ , такой, что  $\mathbf{u}_* = \mathbf{Q}(\mathbf{u})$ .

Аналогично, в  $H_p$  существует элемент  $\mathbf{f}$ , такой, что  $(\mathbf{f}, \mathbf{v})_p = A^e(\mathbf{v})$  при условии, что  $X_i \in L_{p_1}(V)$ ,  $S_i^0 \in L_{p_2}(\Sigma)$ . Числа  $p_1, p_2$  определяются теоремами вложения Соболева [28] по формуле  $p > 2s/(2s - n + 2)$ , где  $n$  — размерность пространства, а  $s$  — размерность области, по которой вычисляется интеграл. Поэтому при  $n=3$  имеем  $p_1 = 6/5, p_2 = 4/3$ . Таким образом, задача (1.17) имеет вид операторного уравнения в  $H_p$ :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0 \quad (2.6)$$

Для решения задачи (2.6) рассмотрим двухслойный метод линейных приближений [22, 29]:

$$\mathbf{A}_n \cdot [\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}] / \tau_{n+1} + \mathbf{Q}(\mathbf{u}^{(n)}) + \mathbf{f} = 0 \quad (2.7)$$

где линейный оператор  $\mathbf{A}_n$  и параметры  $\tau_n$  могут выбираться различным образом. Выберем, например,  $\mathbf{A}_n = -E$  в  $H_p$ :

$$(\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v})_p = - \int_V \mathbf{p}^\sim(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV$$

а  $\tau_n = \tau = \text{const}$ . Тогда схема (2.7) эквивалентна итерационному процессу

$$\int_V \mathbf{p}^\sim(\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV + \tau \left\{ \int_V \mathbf{F}^\sim(\mathbf{u}^{(n)}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV - A^e(\mathbf{v}) \right\} = 0 \quad (2.8)$$

Достаточные условия сходимости процесса (2.8) определяются следующей теоремой [16, 18, 22].

Если выполнены неравенства

$$0 < \gamma_1 \mathbf{p}^\sim(\mathbf{h}) : \mathbf{h} \leq \mathbf{h} : [\partial \mathbf{F}^\sim(\mathbf{v}) / \partial \varepsilon] : \mathbf{h} \leq \gamma_2 \mathbf{p}^\sim(\mathbf{h}) : \mathbf{h} \quad (2.9)$$

для любого  $\mathbf{h} = \text{def } \mathbf{W}$ ,  $\mathbf{W} \in H_p$  и  $\mathbf{v}$ , принадлежащего некоторому выпуклому замкнутому множеству  $\Omega \in H_p$ , то метод (2.7) (или (2.8)) сходится в  $H_p$  начиная с  $\mathbf{u}^{(0)} \in \Omega$  к решению  $\mathbf{u}$  уравнения (2.6) (или (1.17)), которое существует и единственно в  $\Omega$  со скоростью геометрической прогрессии

$$\|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}\|_p \leq \rho^n \|\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}\|_p \quad (2.10)$$

$$\tau = 2/(\gamma_1 + \gamma_2), \quad \rho = (1 - \xi)/(1 + \xi), \quad \xi = \gamma_1/\gamma_2 \quad (2.11)$$

Значение  $\tau$ , определяемое (2.11), обеспечивает наилучшую сходимость метода (2.8); сходимость же будет иметь место, если  $0 < \tau < 2/\gamma_2$ , при этом  $\rho = \max\{|1 - \tau\gamma_1|, |1 - \tau\gamma_2|\}$ .

Приведем доказательство этой теоремы. Из (2.6), (2.7) следуют соотношения  $\mathbf{u} = \mathbf{S}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u} = \mathbf{S}(\mathbf{u}^{(n)}) - \mathbf{S}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{S}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \tau \mathbf{A}_n^{-1} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{v})$ .

Введем непрерывную функцию  $\psi(\xi) = (\mathbf{S}(\mathbf{u}_\xi) - \mathbf{S}(\mathbf{u}_1), \mathbf{v})_p$ ,  $\mathbf{u}_\xi = \mathbf{u}_1 + \xi(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)$  ( $\xi \in [0, 1]$ ),  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  — произвольные вектор-функции из  $\Omega$ . Будем предполагать, что оператор  $\mathbf{F}^\sim$  таков, что для любых  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  функция  $\psi$  кучно непрерывно дифференцируема. Для функции  $\psi$  справедливо неравенство (штрихом обозначается производная):

$$|\psi'(1)| \leq \sup_{0 < \xi < 1} |\psi'(\xi)| \quad (2.12)$$

Поскольку

$$\psi'(\xi) = (\mathbf{S}'(\mathbf{u}_\xi) \cdot \mathbf{W}, \mathbf{v})_p, \quad \psi(1) = (\mathbf{S}(\mathbf{u}_2) - \mathbf{S}(\mathbf{u}_1), \mathbf{v})_p,$$

то в предположении линейности оператора  $\mathbf{S}'(\mathbf{u}_\xi)$  по  $\mathbf{W}$  будем иметь

$$\sup_{0 < \xi < 1} |(\mathbf{S}'(\mathbf{u}_\xi) \cdot \mathbf{W}, \mathbf{v})_p| \leq \sup_{0 < \xi < 1} \|\mathbf{S}'(\mathbf{u}_\xi)\|_p \|\mathbf{W}\|_p \|\mathbf{v}\|_p$$

Тогда при  $\mathbf{v} = \mathbf{S}(\mathbf{u}_2) - \mathbf{S}(\mathbf{u}_1)$  из (2.12) получим неравенство Лагранжа [30]:

$$\|\mathbf{S}(\mathbf{u}_2) - \mathbf{S}(\mathbf{u}_1)\|_p \leq \sup_{0 < \xi < 1} \|\mathbf{S}'(\mathbf{u}_\xi)\|_p \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|_p \quad (2.13)$$

Параметр  $\tau$  надлежит выбрать так, чтобы минимизировать норму оператора  $\mathbf{S}'$ . Поскольку

$$(-\mathbf{Q}'(\mathbf{u}_\xi) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v})_p = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : (\partial \mathbf{F}^\sim / \partial \boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV$$

то для оператора  $\mathbf{Q}'$  справедливы оценки

$$0 < \gamma_1 (-\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v})_p \leq (-\mathbf{Q}'(\mathbf{u}_\xi) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v})_p \leq \gamma_2 (-\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v})_p \quad (2.14)$$

Задача минимизации нормы оператора  $\mathbf{S}'$  при условиях (2.14) имеет решение, определяемое соотношениями (2.11) [19, 22, 25]:  $\|\mathbf{S}'\|_p \leq \rho < 1$ .

Следовательно, оператор  $\mathbf{S}$  осуществляет сжатые отображения в области  $\Omega$ . Поэтому согласно известной теореме [27], решение задачи (2.6) существует и единственно, а из (2.13) следует оценка (2.10). Для доказательства сходимости достаточно выполнения (2.13) для  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}^{(n)}$ . Поэтому константы  $\gamma_1, \gamma_2$  можно вычислять исходя из неравенств (2.14) при  $\mathbf{u}_\xi = \mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{u} + \xi(\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u})$ .

Из существования и единственности решения уравнения (2.6) для каждого  $t$  и сходимости процесса (2.17) следуют соответственно существование и единственность обобщенного решения (1.17) и сходимость процесса (2.8).

Заметим, что в случае  $\mathbf{p} = \Delta$ , условия (2.9) являются следствием положительной определенности касательного модуля (2.5). Рассмотрим теперь более общий итерационный процесс, чем (2.8)

$$\int_V \mathbf{p}_n^\sim(\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV + \tau_{n+1} \{ \mathbf{F}^\sim(\mathbf{u}^{(n)}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV - A^e(\mathbf{v}) \} = 0 \quad (2.15)$$

где линейный оператор  $\mathbf{p}_n^\sim$  и параметр  $\tau_n$  зависят от номера итераций  $n$ . Обозначая через  $\mathbf{A}_n$  оператор в  $H_p$ , определенный равенством

$$(\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v})_p = - \int_V \mathbf{p}_n^\sim(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV$$

сопоставим процессу (2.15) итерационный процесс (2.7) в  $H_p$ . Сходимость последнего определяется формулами (2.10), (2.11), если выполнены неравенства (2.14), которые следуют из неравенств

$$0 < \gamma_1^{(n)} \mathbf{p}_n^\sim(\mathbf{h}) : \mathbf{h} \leq \mathbf{h} : [\partial \mathbf{F}^\sim(\mathbf{v}^{(n)}) / \partial \boldsymbol{\varepsilon}] : \mathbf{h} \leq \gamma_2^{(n)} \mathbf{p}_n^\sim(\mathbf{h}) : \mathbf{h} \quad (2.16)$$

Выберем линейный оператор  $A_n$  следующим образом:  $A_n \cdot v = Q'(u^{(n)}) \cdot v$ . Тогда итерационный процесс (2.7) будет соответствовать методу (2.15) при

$$p_n \tilde{v} = \partial F \tilde{v}(u^{(n)}) / \partial \varepsilon : \varepsilon(v) \quad (2.17)$$

Согласно теореме, для метода (2.15), (2.17) справедлива оценка скорости сходимости

$$\|u^{(n+1)} - u\|_p \leq \rho_n \|u^{(n)} - u\|_p \quad (2.18)$$

$$\rho_n = (1 - \xi_n) / (1 + \xi_n), \quad \xi_n = \gamma_1^{(n)} / \gamma_2^{(n)}$$

где константы  $\gamma_1^{(n)}$ ,  $\gamma_2^{(n)}$  определяются из соотношений (2.16), (2.18). Следовательно,  $\rho_n \rightarrow 0$ ,  $\gamma_1^{(n)} \rightarrow 1$  и  $\gamma_2^{(n)} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. скорость сходимости метода (2.15) возрастает при приближении к решению.

Итерационный процесс (2.15), (2.17) (метод Ньютона — Канторовича) для задач механики деформируемых тел впервые описан в [17]. Скорость его сходимости доказывается при  $\tau = 1$ ,  $p = \Delta$  в предположении дважды дифференцируемости оператора  $F \tilde{v}$ . При этом должны быть выполнены условия (2.9) и, например, неравенство

$$|[\partial^2 F_{ij} \tilde{v} / \partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{mn} h_{kl} h_{mn}] h_{ij}| \leq L h_u^3 \quad (2.19)$$

где  $h$  — произвольный симметричный тензор второго ранга,  $L$  — константа. В предположении малости деформаций доказывается, что отсюда следует неравенство  $\|u^{(n+1)} - u\| \leq \rho \|u^{(n)} - u\|^{1+\alpha}$ , где  $\alpha$  — некоторое число ( $0 < \alpha \leq 1$ ). Таким образом, сходимость итерационного процесса (2.15), (2.17) выше, чем (2.13), хотя для его осуществления требуется, чтобы нулевое приближение было выбрано достаточно близко к решению [17, 22].

С вариационной постановкой задачи в перемещениях естественно связана постановка в напряжениях. Для потенциального оператора  $G \tilde{v}$  (2.2) кастильяниан имеет вид [22]:

$$K \tilde{v} = \int_{\Sigma_1} u^\circ \cdot \sigma \cdot n \, d\Sigma - \varphi_* \tilde{v}(\sigma), \quad \varphi_* \tilde{v}(\sigma) = \int_V w \tilde{v}(\sigma) \, dV$$

Задача минимизации лагранжиана  $L \tilde{v}$  на множестве  $U$  эквивалентна задаче максимизации функционала  $K \tilde{v}$  на множестве  $S = \{\sigma : \sigma \in W_2^1, \operatorname{div} \sigma + X = 0, \sigma \cdot n|_{\Sigma_2} = S^\circ\}$ . Задача максимизации функционала  $K$  эквивалентна следующей вариационной задаче: на множестве  $S$  найти  $\sigma$ , удовлетворяющее для любого  $\tau \in S$  равенству

$$\int_V \tau : \varepsilon(\sigma) \, dV = \int_{\Sigma_1} u^\circ \cdot \tau \cdot n \, d\Sigma \quad (2.20)$$

которая справедлива и для непотенциального оператора  $G \tilde{v}$ .

3. Перейдем к конкретизации рассмотренных в п. 2 итерационных процессов в теории малых упругоэластических деформаций. Начнем с рассмотрения метода (2.8) в случае активного процесса деформации. Его сходимость зависит от констант  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , входящих в неравенства (2.14). Вычислим производную  $\partial s_{ij} / \partial \varepsilon_{kl} = \partial s_{ij} / \partial \varepsilon_{kl} + k \delta_{ij} \delta_{kl}$ .

Из (1.1), (1.15) имеем ( $h$  — произвольный симметричный тензор  $h = h_{ij}$ ):

$$W'' = h : (\partial F / \partial \varepsilon) : h = D^2 W(\varepsilon, h, h) = 2\mu(1 - \omega(u)) h_u^2 - 2\mu [d\omega / d\varepsilon_u] [e(u) : h] / \varepsilon_u(u) + kh^2 \quad (3.1)$$

Предположим, что материал имеет мягкую характеристику, т. е. выполняются неравенства (1.10), (1.11) (фиг. 1). В этом случае, используя неравенства  $0 \leq (e : h)^2 \leq \varepsilon_u^2 h_u^2$ , из (3.1) получим

$$W'' \geq 2\mu \min_{\varepsilon_u} (1 - \omega - \varepsilon_u d\omega / d\varepsilon_u) h_u^2 + kh^2$$

$$W'' \leq 2\mu h_u^2 + kh^2$$

Неравенства положительной определенности касательного модуля (2.3) справедливы при  $c_1 = \min \{2\mu\eta, 3k\}$ ,  $c_2 = \max \{2\mu, 3k\}$ .

Рассмотрим собственно метод упругих решений, характеризуемый следующим выбором в (2.8) оператора  $p: p_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij}$ . Энергия  $W^p = \mathbf{p}(\mathbf{h}) : \mathbf{h}$  имеет вид  $W^p = 2\mu h_u^2 + kh^2$ , поэтому справедливы неравенства (2.14) при  $\gamma_1 = \eta$ ,  $\gamma_2 = 1$ . Часто этот метод рассматривают при  $\tau = 1$ . Для металлов величина  $\eta = \min_{\epsilon_u} (1/2\mu^{-1} d\sigma_u/d\epsilon_u)$  равна  $10^{-1} - 10^{-2}$  и, следовательно, оптимальное значение  $\tau \leq 2$  (см. п. 5). Приведенная в п. 2 теорема гарантирует сходимость метода упругих решений при  $\eta > 0$ . Рассмотрим также случай упругопластического материала с жесткой характеристикой (фиг. 3):  $\omega \leq 0$ ,  $d\omega/d\epsilon_u \leq 0$ ,  $1 - \omega - \epsilon_u d\omega/d\epsilon_u \leq \eta_1 < \infty$ . Аналогично предыдущему случаю из (3.1) получим

$$W'' \geq 2\mu h_u^2 + kh^2$$

$$W'' \leq 2\mu \max_{\epsilon_u} (1 - \omega - \epsilon_u d\omega/d\epsilon_u) h_u^2 + kh^2$$

Поэтому константы  $c_1$ ,  $c_2$  определяются выражениями  $c_1 = \min \{2\mu, 3k\}$ ,  $c_2 = \max \{2\mu\eta_1, 3k\}$ , а константы  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  имеют вид  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = \eta_1$ .

Можно рассмотреть и более общий случай, когда функции  $\omega$ ,  $d\omega/d\epsilon_u$  изменяют знак, но так, что справедливы неравенства (фиг. 5):

$$0 < \eta < 1 - \omega - \epsilon_u d\omega/d\epsilon_u \leq \eta_1 < \infty \quad (3.2)$$

Тогда также выполняются неравенства

$$0 < \eta \leq 1 - \omega \leq \eta_1 < \infty \quad (3.3)$$

При  $d\omega/d\epsilon_u$  имеем

$$W'' \geq 2\mu (1 - \omega - \epsilon_u d\omega/d\epsilon_u) h_u^2 + kh^2$$

$$W'' \leq 2\mu (1 - \omega) h_u^2 + kh^2$$

и, наоборот, при  $d\omega/d\epsilon_u \geq 0$ :

$$W'' \geq 2\mu (1 - \omega) h_u^2 + kh^2$$

$$W'' \geq 2\mu (1 - \omega - \epsilon_u d\omega/d\epsilon_u) h_u^2 + kh^2$$

Следовательно,  $\gamma_1 = \eta$ ,  $\gamma_2 = \eta_1$ . Условия (3.2), (3.3) имеют ясный механический смысл (фиг. 5). Неравенства (3.2) означают, что кривая  $\sigma_u(\epsilon_u)$  не должна иметь горизонтальную или вертикальную касательные при  $\epsilon_u < \infty$ . Поэтому секущий модуль  $\sigma_u/\epsilon_u$  также ограничен и положителен. При выполнении этих требований и выборе параметра  $\tau$  по формуле (2.11) метод упругих решений сходится.

Совершенно аналогично можно найти константы  $J_1$ ,  $J_2$ , входящие в неравенства (2.4). Представим зависимость  $\epsilon_u(\sigma_u)$  в виде  $\epsilon_u = (1 - \Omega(\sigma_u))\sigma_u/(2\mu)$ , тогда  $e_{ij} = (1 - \Omega)s_{ij}/(2\mu)$ . Вычислим производную

$$\begin{aligned} \partial e_{ij}/\partial \sigma_{kl} = & 1/4\mu^{-1}(1 - \Omega) [(\delta_{ik}\delta_{jl} + \\ & + \delta_{il}\delta_{jk}) - 1/3\delta_{ij}\delta_{kl}] - \\ & - 1/2\mu^{-1}(d\Omega/d\sigma_u) s_{ij}s_{kl}/\sigma_u + 1/9\delta_{ij}\delta_{kl}/k \end{aligned}$$

Величина  $w'' = \mathbf{h} : (\partial \mathbf{G}/\partial \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{h}$  равна  $w'' = 1/2\mu^{-1} [(1 - \Omega)h_u^2 - (d\Omega/d\sigma_u) \cdot (\mathbf{s} : \mathbf{h})^2/\sigma_u + 1/9h^2/k]$ . Для жесткой характеристики (фиг. 3):  $0 \leq \Omega$ ,  $0 \leq d\Omega/d\sigma_u$ ,  $0 < \xi \leq 1 - \Omega - \sigma_u d\Omega/d\sigma_u$  следует, что

$$J_1 = \min \{\xi/(2\mu), 1/3k\}, \quad J_2 = \max \{1/2\mu, 1/3k\}$$

В случае мягкой характеристики (фиг. 1):  $J_1 = \min \{1/2\mu, 1/3k\}$ ,  $J_2 = \max \{\xi_1/2\mu, 1/3k\}$ , где  $\xi_1$  определяется из неравенств  $\Omega \leq 0$ ,  $d\Omega/d\sigma_u \leq 0$ ,  $1 - \Omega - \sigma_u d\Omega/d\sigma_u \leq \xi_1 < \infty$ .



Если потребовать  $0 < \xi \leq 1 - \Omega - \sigma_u d\Omega/d\sigma_u \leq \xi_1 < \infty$ , то  $J_1 = \min\{\xi/2\mu, 1/3k\}$ ,  $J_2 = \max\{\xi_1/2\mu, 1/3k\}$ .

Положительная определенность касательной податливости обеспечивает сходимость метода упругих решений для задачи теории малых упруго-пластических деформаций (2.20) аналогичного случаю задачи в перемещениях [21].

Таким образом, метод упругих решений как для задачи в перемещениях, так и для задачи в напряжениях сходится при достаточно слабых ограничениях, накладываемых на характер зависимости  $\sigma_u(\varepsilon_u)$ , причем скорость сходимости определяется формулами (2.10), (2.11).

4. Рассмотрим некоторые обобщения метода упругих решений (2.8). Остановимся прежде всего на методе переменных параметров упругости [7, 9]. Данный метод записывается в виде (2.15) при

$$p_{nij}(\varepsilon) = \lambda_0^{(n)} \theta \delta_{ij} + 2\mu_0^{(n)} \varepsilon_{ij}, \quad \lambda_0^{(n)} = \lambda(\varepsilon_u(\mathbf{u}^{(n)})), \quad \mu_0^{(n)} = \mu(\varepsilon_u(\mathbf{u}^{(n)})) \quad (4.1)$$

Обычно этот метод рассматривался при  $\tau=1$ . Его сходимость в этом случае изучалась в [8]. Показано, что сходимость имеет место при довольно жестком условии на функцию  $\omega$ :  $\eta > 1/2$ . Из теоремы п. 2 следует, что скорость сходимости метода переменных параметров упругости (2.15), (4.1) (величина  $q_n$ ) в неравенстве  $\|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}\|_p \leq q_n \|\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}\|_p$  определяется соотношением  $q_n = \rho_0 \rho_1 \dots \rho_{n-1}$  при  $\tau_{j+1} = 2(\gamma_1^{(j)} + \gamma_2^{(j)})^{-1}$ ,  $\rho_j = (1 - \xi_j)/(1 + \xi_j)$ ,  $\xi_j = \gamma_1^{(j)}/\gamma_2^{(j)}$ . Сходимость же будет иметь место не только для оптимальных значений  $\tau_j$ , но и для любого  $\tau_j < 2/\gamma_2^{(j)}$ .

Константы  $\gamma_1^{(n)}$ ,  $\gamma_2^{(n)}$  определяются неравенствами (2.16) или им эквивалентными неравенствами

$$\gamma_1^{(n)} W_*^{pn} \leq W_*'' \leq \gamma_2^{(n)} W_*^{pn} \quad (4.2)$$

$$W_*^{pn} = 2\mu(\varepsilon_u(\mathbf{u}^{(n)})) h_u^2$$

$$W_*'' = 2\mu\{(1 - \omega(\mathbf{v}^{(n)})) h_u^2 - d\omega(\mathbf{v}^{(n)})/d\varepsilon_u[\mathbf{e}(\mathbf{v}^{(n)}): \mathbf{h}]^2/\varepsilon_u(\mathbf{v}^{(n)})\} \quad (4.3)$$

Поэтому справедливы оценки

$$W_*'' \leq [\inf_V (1 - \omega(\mathbf{u}^{(n)}))]^{-1} 2\mu(\varepsilon_u(\mathbf{u}^{(n)})) h_u^2$$

$$W_*'' \geq \eta [\sup_V (1 - \omega(\mathbf{u}^{(n)}))]^{-1} 2\mu(\varepsilon_u(\mathbf{u}^{(n)})) h_u^2$$

которые приводят к выражениям

$$\gamma_1^{(n)} = \mu \eta [\sup_V \mu(\varepsilon_u(\mathbf{u}^{(n)}))]^{-1}, \quad \gamma_2^{(n)} = \mu [\inf_V \mu(\varepsilon_u(\mathbf{u}^{(n)}))]^{-1}$$

При  $\tau=1$  сходимость метода переменных параметров упругости доказана, если  $2\mu(\varepsilon_u(\mathbf{u}^{(n)})) > \mu$ , т. е. при условии  $\omega < 1/2$ . Чтобы более точно оценить скорость сходимости метода переменных параметров упругости, рассмотрим частные случаи. Пусть области пластичности незначительны, т. е.  $\varepsilon_u \geq \varepsilon_s$ . Тогда, учитывая малость  $\omega$  по сравнению с единицей, получим  $W_*'' \geq 2\mu \eta h_u^2 \approx \eta W_*^{pn}$ ,  $W_*'' \leq 2\mu h_u^2 \approx W_*^{pn}$ . Следовательно,  $\gamma_1^{(n)} \approx \eta$ ,  $\gamma_2^{(n)} \approx 1$  и скорость сходимости такая же, как у метода упругих решений.

Рассмотрим другой крайний случай, когда  $n \rightarrow \infty$ . Тогда справедливы неравенства

$$W_*'' \leq [2\mu(\varepsilon_u(\mathbf{u}^{(n)})) + O(\Delta\varepsilon_u(\mathbf{u}^{(n)}))] h_u^2$$

$$W_*'' \geq [(1 - \omega - \varepsilon_u d\omega/d\varepsilon_u(\mathbf{u}^{(n)}))/(1 - \omega(\mathbf{u}^{(n)}))] \times 2\mu(\varepsilon_u(\mathbf{u}^{(n)})) + O(\Delta\varepsilon_u(\mathbf{u}^{(n)})) h_u^2 \quad (4.4)$$

$$\Delta\varepsilon_u(\mathbf{u}^{(n)}) = \Delta\mathbf{e}^{(n)} : \mathbf{e}^{(n)}/\varepsilon_u(\mathbf{u}^{(n)}), \quad \Delta\mathbf{e}^{(n)} = \mathbf{e}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}(\mathbf{u}^{(n)}).$$

Из выражений (4.4) вытекают оценки для констант  $\gamma_1^{(n)}$ ,  $\gamma_2^{(n)}$

$$\gamma_1^{(n)} \approx \inf_V \frac{1 - \omega - \varepsilon_u d\omega/d\varepsilon_u(\mathbf{u}^{(n)})}{1 - \omega}(\mathbf{u}^{(n)}), \quad \gamma_2^{(n)} \approx 1 \quad (4.5)$$

Из выражений (4.5) следует, что метод переменных параметров упругости при приближении к решению должен иметь более быструю сходимость, чем метод упругих решений.

Приведенные асимптотические оценки позволяют рассмотреть другую модификацию метода переменных параметров упругости. Оператор  $p_n$  теперь выберем в виде

$$p_{nij}(\varepsilon) = \lambda_1^{(n)} \theta \delta_{ij} + 2\mu_1^{(n)} \varepsilon_{ij}$$

$$\mu_1^{(n)} = \mu (1 - \omega - \varepsilon_u d\omega/d\varepsilon_u) \cdot (\mathbf{u}^{(n)}); \quad \lambda_1^{(n)} = k - 2/3 \mu_1^{(n)}$$

Оценим скорость сходимости этого итерационного процесса на основе теоремы п. 2. В (4.2)  $W_*^{p_n}$  теперь имеют вид

$$W_*^{p_n} = 2\mu_1^{(n)} h_u^2 \quad (4.6)$$

Получим асимптотические оценки констант  $\gamma_1^{(n)}, \gamma_2^{(n)}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Из (4.3), (4.6) получим

$$W_*'' \geq 2\mu (1 - \omega - \varepsilon_u d\omega/d\varepsilon_u) (\mathbf{v}^{(n)}) h_u^2 \approx W_*^{p_n}$$

$$W_*'' \leq 2\mu (1 - \omega (\mathbf{v}^{(n)})) h_u^2 \approx \mu_0^{(n)} W_*^{p_n} / \mu_1^{(n)}$$

Тогда  $\gamma_1^{(n)} \approx 1, \gamma_2^{(n)} = \sup_{\mathbf{v}} (\mu_0^{(n)} / \mu_1^{(n)})$ .

Таким образом, оба рассмотренных выше варианта метода переменных параметров упругости в окрестности решения задачи теоретически имеют одинаковую скорость сходимости. Также можно рассмотреть еще одну модификацию метода переменных параметров упругости, если положить

$$W_*^{p_n} = 2\mu_2^{(n)} h_u^2, \quad \mu_2^{(n)} = \alpha \mu_0^{(n)} + (1 - \alpha) \mu_1^{(n)} \quad (4.7)$$

Рассмотрим модификацию метода упругих решений, заключающуюся в выборе в методе (2.8) (при  $W_*^{p_n} = 2\mu h_u^2$ ) параметров  $\tau_j$  по формуле Ричардсона [31]:

$$\tau_{j+1} = 2[\gamma_1 + \gamma_2 + (\gamma_1 - \gamma_2) \cos((2j-1)\pi/(2n))]^{-1} \quad (4.8)$$

( $n$  — количество итераций в цикле:  $j=0, 1, \dots, n-1$ ). Выбор  $\tau_j$  по формуле (4.7) определяет так называемый чебышевский набор параметров, существенное преимущество которого по сравнению со случаем  $\tau = \text{const}$  доказано для линейных самосопряженных задач [29]. Для нелинейного случая оценим сходимость, предполагая малость нормы  $\|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}\|_p = O(\varepsilon), \varepsilon \ll 1$ . Из (2.7) следуют соотношения [29]:

$$\mathbf{W}^{(j+1)} \equiv \mathbf{u}^{(j+1)} - \mathbf{u} = \mathbf{S}_{j+1}(\mathbf{u}^j) - \mathbf{S}_j(\mathbf{u})$$

$$\mathbf{S}_{j+1}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \tau_{j+1} (\mathbf{Q}(\mathbf{v}) + \mathbf{f})$$

поэтому  $\mathbf{W}^{(n)} = \mathbf{T}_{n,0} \cdot \mathbf{W}^{(0)}$ ,

$$\mathbf{T}_{n,0} = \prod_{j=1}^n \int_0^1 \mathbf{S}'(\mathbf{v}^{(j)}) d\xi, \quad \mathbf{v}^{(j)} \equiv \mathbf{u} + \xi(\mathbf{u}^{(j)} - \mathbf{u}).$$

Используя малость  $\varepsilon$ , положим  $\mathbf{Q}'(\mathbf{v}^{(j)}) \approx \mathbf{Q}'(\mathbf{u}) + \mathbf{Q}''(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v}^{(j)} - \mathbf{u})$ . Тогда

$$\mathbf{W}^{(j+1)} = \mathbf{S}_{j+1}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{W}^{(j)} + \tau_{j+1} \Psi_{j+1}, \quad \Psi_{j+1} \equiv \mathbf{Q}'' : (\mathbf{v}^{(j)} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{W}^{(j)} \quad (4.9)$$

Из (4.9) следует [29]:

$$\|\mathbf{W}^{(n)}\|_p \leq \|\mathbf{T}_{n,0}\|_p \|\mathbf{W}^{(0)}\|_p + \sum_{j=1}^n \tau_j \|\mathbf{T}_{n,j}\|_p \max_j \|\Psi_j\|_p \quad (4.10)$$

При упорядочении номеров  $j$  известным образом, для второго члена правой части неравенства (4.10) верна оценка [29]:

$$\sum_{j=1}^n \tau_j \|\mathbf{T}_{n,j}\|_p \leq (1 - q_n) / \gamma_1$$

Минимум нормы  $\mathbf{T}_{n,0}$  достигается при  $\tau_j$ , определяемых выражением (4.8), причем [29]:

$$q_n = \|\mathbf{T}_{n,0}\|_p = 2\rho^n / (1 + \rho^{2n}), \quad \rho = (1 - \sqrt{\xi}) / (1 + \sqrt{\xi}), \quad \xi = \gamma_1 / \gamma_2 \quad (4.11)$$

Таблица 1

$\delta$	1	2	3	4
$10^{-1}$	12	7	6	4
$10^{-2}$	34	18	11	6
$10^{-3}$	56	30	15	8
$10^{-4}$	77	41	20	10

Таблица 2

$\delta$	1	2	3	4
$10^{-1}$	7	3	5	3
$10^{-2}$	18	4	8	4
$10^{-3}$	30	12	11	5
$10^{-4}$	41	20	14	6

Таблица 3

	1	2	3	4	5
$n$	24	20	24	20	40
$\varepsilon \cdot 10^3$	0,84	1,01	0,06	0,52	9,38
$T$	9,2	7,7	9,2	8,7	8,5

Поскольку  $\|\psi_j\|_p = O(\varepsilon^2)$ , то из (4.10), (4.11) следует, что при приближении к решению метод упругих решений с чебышевскими параметрами должен иметь более быструю сходимость, чем в случае с постоянным  $\tau$ .

Нетрудно видеть, что дополнительное условие (2.19), необходимое для сходимости быстросходящегося метода в теории малых упругопластических деформаций, приобретает вид  $\max_{\varepsilon_u} |d^2 \sigma_u / d\varepsilon_u^2| \leq L$ . Для случая линейного упрочнения материала, если в качестве нулевого приближения взято решение соответствующей задачи теории упругости, быстросходящийся метод сходится за одну итерацию.

Трудность реализации его состоит в том, что на каждой итерации необходимо решать задачу анизотропной неоднородной упругости для среды с упругими константами

$$C_{ijkl}^{(n)} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} (\mathbf{u}^{(n)}) \quad (4.12)$$

5. Приведем сначала сравнение методов на примере модельной одномерной задачи: требуется найти  $\varepsilon_u$  из уравнения

$$\sigma_u(\varepsilon_u) = \sigma_*$$

с помощью итерационного процесса

$$a_n (\varepsilon_u^{(n+1)} - \varepsilon_u^{(n)}) / \tau_{n+1} + \sigma_u(\varepsilon_u^{(n)}) - \sigma_* = 0$$

В табл. 1 приведено число итерации  $n$ , необходимое для достижения точности  $\delta$ :  $|\sigma_u^{(n)} - \sigma_*| < \delta$  в методе упругих решений и методе переменных параметров упругости. Расчет проведен для линейного упрочнения при  $\gamma = 0,1$ ,  $\sigma_* = \sigma / \varepsilon_s = 1,5$ . Колонки 1, 2 соответствуют методу упругих решений, 3, 4 — методу переменных параметров упругости, причем значения  $n$  в колонках 1, 3 получены при  $\tau = 1$ ; 2, 4 — при  $\tau = 2/(1+\gamma)$ . Число итераций от  $\sigma_*$  зависит слабо и меняется от 9 при  $\sigma_* = 1,05$  до 20 при  $\sigma_* = 2$  ( $\delta = 10^{-2}$ ). При использовании чебышевского набора параметров для достижения точности  $10^{-1}$  потребовалось 3 итерации,  $10^{-2}$  — 7 итераций, точности  $10^{-3}$  и  $10^{-4}$  — 10 и 14 итераций соответственно. В качестве начального приближения выбиралось «упругое решение». Для сравнения метода упругих решений и метода переменных параметров упругости с методом Ньютона рассмотрен пример с нелинейным упрочнением:  $\sigma_u = \sigma_s \sqrt{\varepsilon_u / \varepsilon_s}$  при  $\varepsilon_u > \varepsilon_s$ . В табл. 2 приведены значения  $n$  для  $\sigma_* = 5$ . Первая колонка соответствует методу упругих решений с  $\tau = 2/(1+\eta)$ , вторая — методу упругих решений с чебышевскими параметрами; третья и четвертая колонки соответствуют методу переменных параметров упругости (третья —  $\tau = 1$ , четвертая —  $\tau = 2/(1+\eta)$ ). Метод Ньютона в этом примере сходится следующим образом: на первой итерации достигается точность  $\delta = 1,7 \cdot 10^{-1}$ , на второй —  $1,4 \cdot 10^{-2}$ , на третьей —  $9,8 \cdot 10^{-5}$ .

Рассмотренные выше методы приводят на каждой итерации к необходимости решения краевой задачи линейной теории упругости. Поскольку

последняя задача в настоящее время чаще всего решается численными методами, то необходимо изучить численную реализацию описанных выше итерационных методов.

Используя разностную аппроксимацию краевой задачи теории малых упругопластических деформаций, например, методами, описанными в [22, 31, 32], получим конечномерный аналог операторного уравнения (2.6):  $Q^h(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}^h = 0$  и аналог итерационной схемы (2.7):

$$\mathbf{A}_n^h \cdot (\mathbf{u}_h^{(n+1)} - \mathbf{u}_h^{(n)}) / \tau_{n+1} + Q^h(\mathbf{u}_h^{(n)}) + \mathbf{f}^h = 0 \quad (5.1)$$

Каждая итерация схемы (5.1) состоит в решении уравнения

$$\mathbf{A}_n^h \cdot \mathbf{u}_h^{(n+1)} = \mathbf{A}_n^h \cdot \mathbf{u}_h^{(n)} - \tau_{n+1} [Q^h(\mathbf{u}_h^{(n)}) + \mathbf{f}^h] = -\Phi_n^h \quad (5.2)$$

для чего используем внутренний итерационный процесс

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{v}_h^{(m+1)} - \mathbf{v}_h^{(m)}) / \beta_{m+1} = \mathbf{A}_n^h \cdot \mathbf{v}_h^{(m)} + \Phi_n^h \quad (5.3)$$

$$\mathbf{v}_h^{(0)} = \mathbf{u}_h^{(n)}, \quad \mathbf{u}_h^{(n+1)} = \mathbf{v}_h^{(M)}$$

Совокупность итерационных процессов (5.1) и (5.3) образует так называемый двухступенчатый метод [31, 33], состоящий из внешнего процесса (5.1) и внутреннего (5.3).

Наиболее важное свойство двухступенчатого метода состоит в том, что скорость сходимости процесса (5.1) слабо зависит от точности решения задачи (5.2), т. е. от числа  $M$ . Например, расчет показывает, что при  $M=8$  и  $M=40$  скорость сходимости метода (5.1) в задаче о сжатии куба из упругопластического материала с линейным упрочнением равномерно распределенной по двум противоположным граням нагрузкой изменяется лишь на 2% [31].

Определение оптимального значения  $M$  может осуществляться теоретически и практически [29].

На каждом шаге быстроходящегося метода необходимо решать линейную краевую задачу неоднородной анизотропной теории упругости

$$Q_h'(\mathbf{u}_h^{(u)}) \cdot \mathbf{u}_h^{(n+1)} + \Phi_n^h = 0 \quad (5.4)$$

$$\Phi_n^h = Q_h'(\mathbf{u}_h^{(n)}) \cdot \mathbf{u}_h^{(n)} - Q^h(\mathbf{u}_h^{(n)}) + \mathbf{f}^h$$

Решение линейной задачи (5.4) представляет определенные трудности, так как вычисление  $\Phi_n^h$  (5.4) требует больше времени и памяти ЭВМ, чем вычисление  $\Phi_n^h$  (5.2). По-видимому, целесообразно для решения задачи (5.4) применить описанный выше двухступенчатый метод, позволяющий «реже» вычислять  $\Phi_n^h$ , чем это требуется в одноступенчатых методах.

На задаче о сжатии куба жесткими плитами без проскальзывания проводилось сравнение метода упругих решений с методом переменных параметров упругости. Расчеты осуществлены для случая линейного упрочнения с  $\gamma=0,1$ , сближение плит, отнесенное к длине ребра куба, равнялось  $4\epsilon_s$ , число узлов сетки по каждому ребру — 11. Итерационный процесс останавливался, когда начальная невязка  $\|Q^h(\mathbf{u}_h^{(0)}) + \mathbf{f}^h\|$  уменьшалась в  $\epsilon^{-1}$  раз. В табл. 3 приведены число итераций (число внутренних итераций метода переменных направлений равнялось 4), машинное время  $T$  (мин.) и достигнутая точность  $\epsilon$ . Цифра 1 соответствует методу упругих решений с  $\tau=1$ ; 2, 3 — методу упругих решений с чебышевскими параметрами, 4 — методу переменных параметров упругости при  $\tau=1$ ; 5 — одноступенчатому методу переменных направлений. В методе упругих решений с чебышевскими параметрами в первом случае длины внешних циклов равнялись 4, во втором — 8. Эти расчеты подтверждают вывод о том, что ускорение Ричардсона достигается при приближении к решению.

Приведенные расчеты показывают, что в рассмотренном примере метод переменных параметров упругости не имеет явного преимущества перед методом упругих решений с постоянным  $\tau$ , как в одномерном случае, и уступает методу упругих решений с чебышевским ускорением. В описан-

ной задаче наблюдалось немонотонное приближение интенсивности  $\varepsilon_u^{(n)}$  к интенсивности точного решения  $\varepsilon_u(\mathbf{u})$  в некоторых точках куба, чего не происходит в одномерной задаче.

6. Рассмотрим случай переменного нагружения. Для решения краевой задачи (1.17), (1.4) используем метод упругих решений (2.8). Его сходимость исследуем с помощью теоремы п.2. Согласно этой теореме, для сходимости итерационного процесса (2.8), а также существования и единственности решения задачи (1.17) достаточно существования линейного дифференциала Гато у оператора  $F^\sim$  и выполнение неравенств (2.9). Будем рассматривать процессы деформации  $\varepsilon(\mathbf{u})$ , такие, что в каждой точке  $\mathbf{x}$  тела интенсивность  $\varepsilon_u(t, \mathbf{x})$  является непрерывной кусочно-монотонной функцией  $t$  с ненулевой производной. В точках разрыва скорости интенсивности  $t'$  функцию  $\varepsilon_u^\cdot$  считаем непрерывной слева. Такие предположения, очевидно, являются вполне допустимыми в теории малых упруго-пластических деформаций.

Вычислим производную Гато  $\partial F^\sim / \partial \varepsilon$  оператора  $F^\sim$  сначала для определяющих соотношений (1.1)–(1.3), (1.4), (1.6):

$$\begin{aligned} \partial s / \partial \varepsilon(\mathbf{u}) &= 2\mu(1-\omega)\Delta - 2\mu(d\omega/d\varepsilon_u) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} / \varepsilon_u \\ (\varepsilon_u^\cdot(u) > 0), \partial s / \partial \varepsilon &= 2\mu\Delta \quad (\varepsilon_u^\cdot(u) < 0) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оператор  $[\partial s / \partial \varepsilon(\mathbf{u})] : \mathbf{h}$  является линейным по  $\mathbf{h}$ . Кроме того, для любого  $u$  выполняются неравенства (2.9) с константами  $\gamma_1, \gamma_2$ , ранее определенными в п. 3. Поэтому выполнены все утверждения теоремы п. 2. Заметим, что сходимость метода упругих решений для определяющих соотношений при дискретизации по  $t$  доказана в [34].

Рассмотрим более общие соотношения (1.18)–(1.19). Проверим выполнение условий теоремы п.2, вычислив производную Гато  $\partial s / \partial \varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{h} : (\partial s / \partial \varepsilon) : \mathbf{h} &= (\sigma_u^\psi / \varepsilon_u^\psi)(\mathbf{u}) h_u^2 + (\varepsilon_u^\psi d\sigma_u^\psi / d\varepsilon_u^\psi - \sigma_u^\psi)(\mathbf{u})(\mathbf{e}(\mathbf{u}) : \\ &: \mathbf{h})^2 / (\varepsilon_u^\psi(\mathbf{u}))^3, d\sigma_u^\psi / d\varepsilon_u^\psi = d\mu(\varepsilon_u^\psi) / d\varepsilon_u^\psi \geq 2\mu\gamma \end{aligned}$$

Из этих соотношений вытекают неравенства (2.9) с теми же константами  $\gamma_1, \gamma_2$ , как и при активных процессах деформирования. Следовательно, справедливы все утверждения теоремы п.2, в частности, имеет место сходимость процесса (2.8).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. М., Л.: Гостехиздат. 1948. 376 с.
2. Ильюшин А. А. Некоторые вопросы теории пластических деформаций // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 4. С. 245–272.
3. Ильюшин А. А. Пластичность (Основы общей математической теории). М.: Изд-во АН СССР. 1963. 272 с.
4. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука. 1970. 280 с.
5. Канторович Л. В. О методе Ньютона // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1949. Т. 28. С. 104–144.
6. Канторович Л. В. Некоторые дальнейшие приложения метода Ньютона // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия. 1957. Т. 7. № 2. С. 68–103.
7. Биргер И. А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 6. С. 97–106.
8. Быков Д. Л. О некоторых методах решения задач теории пластичности // Упругость и неупругость. Вып. 4. М.: Изд-во МГУ. 1975. С. 119–139.
9. Воронич И. И., Красовский Ю. П. О методе упругих решений // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1959. Т. 126. № 4. С. 740–743.
10. Кошелев А. И. О сходимости метода последовательных приближений для квазилинейных эллиптических уравнений // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1962. Т. 142. № 5. С. 1007–1010.
11. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука. 1969. 456 с.
12. Скрыпник И. В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев: Наук. думка. 1973. 220 с.
13. Ортега Дж., Рейнболд В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир. 1975. 538 с.
14. Кошелев А. И. Регулярность решений эллиптических уравнений и систем. М.: Наука. 1986. 240 с.

15. *Победря Б. Е.* О сходимости метода «упругих решений» в нелинейной вязкоупругости // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1970. Т. 195. Вып. 2. С. 307–310.
16. *Победря Б. Е.* Методы нелинейной вязкоупругости // Некоторые вопросы нелинейного деформирования твердых тел: Научн. тр. Ин-та механики. МГУ. М., 1970. № 8. С. 47–74.
17. *Победря Б. Е.* О новом методе решения некоторых квазистатических задач нелинейной механики сплошной среды // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1974. Т. 197. Вып. 2. С. 277–280.
18. *Победря Б. Е.* Математическая теория нелинейной вязкоупругости // Упругость и неупругость. Вып. 3. М.: Изд-во МГУ. С. 95–173.
19. *Шешенин С. В.* Метод упругих решений в теории двузвенных ломаных // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 116–120.
20. *Васин Р. А., Колгин Г. П., Шешенин С. В.* Об одном методе решения плоских краевых задач при сложном нагружении // Вестн. МГУ. Сер. I. Математика. Механика. 1986. № 2. С. 60–64.
21. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ. 1986. 236 с.
22. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ. 1981. 344 с.
23. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ. 1978. 287 с.
24. *Москвитин В. В.* Циклические нагружения элементов конструкций. М.: Наука. 1981. 344 с.
25. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ. 1984. 336 с.
26. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука. 1970. 512 с.
27. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука. 1965. 520 с.
28. *Соболев С. Л.* Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ. 1950. 256 с.
29. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
30. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука. 1977. 742 с.
31. *Победря Б. Е., Шешенин С. В.* Численное решение задачи Ламе об упругом параллелепипеде // Изв. АН АрмССР. 1981. Т. 34. № 5. С. 61–71.
32. *Победря Б. Е., Шешенин С. В.* Некоторые задачи о равновесии упругого параллелепипеда // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 1. С. 74–86.
33. *Дьяконов Е. Г., Николаев И. К.* О решении некоторых задач теории сетчатых оболочек // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1973. Т. 13. № 4. С. 938–951.
34. *Шешенин С. В.* Численное решение некоторых задач теории пластичности // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск. 1984. С. 316–322.

Москва

Поступила в редакцию  
23.III.1987