МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1987

УДК 531.8

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ВИБРАЦИОННОГО МЕХАНИЗМА С ВИБРОВОЗБУДИТЕЛЯМИ ДЕБАЛАНСНОГО ТИПА

БОЛОТНИК Н. Н., ГУСЕВ Б. В., НГУЕН ЧЫОНГ,
ХОЛМИН И. Е., ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л.

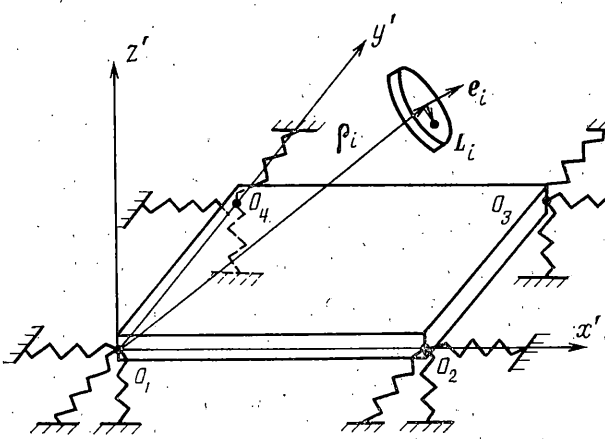
Одним из основных технологических процессов производства железобетонных изделий и изделий из неармированного бетона является объемное вибрационное формование. Формование осуществляется на специальных виброплощадках, представляющих собой стол (платформу), на котором устанавливается форма с бетонной смесью. Стол связан с неподвижным основанием (фундаментом) посредством виброизоляторов. Источниками вибраций чаще всего служат дебалансные вибровозбудители [1, 2], которые устанавливаются на платформе. Важной характеристикой процесса вибрационного формования, существенно влияющей на физические свойства материала производимого изделия (однородность бетона, прочность и т. п.), является равномерность распределения амплитуд вибраций по всему объему изделия. Обеспечение равномерности распределения амплитуд вибраций – актуальная инженерная задача, решаемая на этапах проектирования и рабочей настройки формовочных машин. С механической точки зрения проблема сводится к обеспечению поступательного движения платформы в рабочем режиме стационарных колебаний.

В публикуемой работе выводятся уравнения малых колебаний виброизолированной платформы, приводимой в движение одновальными дебалансными вибровозбудителями. Излагается методика определения коэффициентов жесткости виброизоляторов, а также геометрических параметров, характеризующих расположение вибровозбудителей, таких, что при установившихся колебаниях платформа движется поступательно. Для системы с одним вибровозбудителем получены формулы, которые могут быть положены в основу инженерных расчетов параметров вибрационных механизмов.

Различные аспекты теории вибрационных машин с инерционным возбуждением изложены в [2–4]. Задача выбора параметров вибрационной машины с двухвальным вибровозбудителем (направленного действия), вращающимся в вертикальной плоскости, решена в [5].

1. С механической точки зрения вибрационная площадка для формования железобетонных изделий представляет собой массивную платформу, на которой расположена форма с бетонной смесью. Платформа связана с неподвижным основанием (фундаментом) посредством упругих или упругодемпфированных виброизоляторов. Источником колебаний в большинстве случаев служат дебалансные вибровозбудители (одновальные или двухвальные), роторы которых вращаются вокруг осей, жестко связанных с платформой. Ниже рассматривается достаточно общая механическая модель системы подобного типа, которая может служить основой для инженерных расчетов конструкционных параметров виброплощадок, а также для анализа различных режимов их функционирования.

Платформа вместе с установленной на ней формой с бетонной смесью и неподвижными деталями вибровозбудителей рассматривается как абсолютно твердое тело. На платформе расположены N одновальных дебалансных вибровозбудителей. Их роторы — абсолютно твердые тела — равномерно вращаются вокруг осей, неподвижных относительно платформы. Каждый виброизолятор моделируется тремя пружинами с линейными характеристиками. Пружины имеют общую точку – точку крепления виброизолятора к платформе (фиг. 1). Для определенности будем считать, что платформа связана с основанием посредством четырех виброизоляторов так, что точки их крепления к платформе лежат в одной плоскости и являются вершинами прямоугольника $O_1O_2O_3O_4$ (фиг. 1). Если виброизо-



Фиг. 1

ляторы недеформированы, то плоскость прямоугольника $O_1O_2O_3O_4$ горизонтальна, при этом ось одной из пружин каждого виброизолятора вертикальна, а оси двух других направлены вдоль взаимно перпендикулярных сторон прямоугольника. Положение платформы, при котором виброизоляторы недеформированы, будем называть исходным положением.

Для описания движения введем неподвижную систему координат $Oxyz$, подвижную систему координат $O_1x'y'z'$, жестко связанную с платформой, и системы координат $O^jx^jy^jz^j$ $(j=1, \ldots, N)$, жестко связанные с роторами вибровозбудителей. Оси O_1x' и O_1y' направлены вдоль сторон O_1O_2 и O_1O_4 прямоугольника $O_1O_2O_3O_4$, ось Oz — вертикально вверх. Системы координат $Oxyz$ и $O_1x'y'z'$ совпадают при положении платформы, отвечающем недеформированным виброизоляторам. Начало системы координат $O^jx^jy^jz^j$ $(j=1, \ldots, N)$ помещено в точке пересечения оси вращения ротора j-го вибровозбудителя с плоскостью, проходящей через центр инерции ротора и перпендикулярной оси вращения. Ось O^jz^j направлена вдоль оси вращения, ось O^jx^j — вдоль прямой, соединяющей точку O^j с центром масс ротора.

Обозначим $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки O_1 относительно точки O, $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор центра инерции платформы относительно точки O_1, $\mathbf{r}_j$ — радиус-вектор точки O_j $(j=1, 2, 3, 4)$ крепления j-го виброизолятора относительно точки O_1, $\boldsymbol{\rho}_j$ — радиус-вектор точки O^j относительно точки O_1, $\mathbf{L}_j$ — радиус-вектор центра инерции ротора j-го вибровозбудителя относительно точки O^j, $\mathbf{e}_j$ — единичный вектор, направленный вдоль оси вращения ротора j-го вибровозбудителя, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ — орты осей Ox, Oy, Oz (соответственно) неподвижной системы отсчета, α, β, γ — углы Крылова первого рода [6], определяющие ориентацию системы координат $O_1x'y'z'$ относительно неподвижной системы отсчета, $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор угловой скорости платформы относительно неподвижной системы координат, φ_j, $\omega_j=\dot{\varphi}_j$ — угол поворота и проекция на орт $\mathbf{e}_j$ угловой скорости вращения (относительно платформы) ротора j-го вибровозбудителя, M — масса платформы, m_j — масса ротора j-го вибровозбудителя, J_0 — тензор инерции платформы относительно точки O_1, J_j — тензор инерции ротора j-го вибровозбудителя относительно точки O^j, c_{ij} — коэффициенты жесткости пружин $(i=1, 2, 3, 4;$ $j=1, 2, 3)$; индекс i отвечает номеру виброизолятора; значение индекса $j=1, 2, 3$ отвечает пружинам, оси которых при исходном положении платформы ориентированы в направлении векторов $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$; g — ускорение силы тяжести.

Отметим, что рассмотрение только одновальных вибровозбудителей не ограничивает общности. Двухвальный вибровозбудитель направленного действия эквивалентен двум одновальным вибровозбудителям с совмещенными осями и роторами, синхронно вращающимися в противоположных направлениях $(\boldsymbol{\rho}_i=\boldsymbol{\rho}_j,\ \mathbf{e}_i=\mathbf{e}_j,\ \omega_j=-\omega_i)$.

Примем в качестве обобщенных координат компоненты вектора $\mathbf{R}=(x, y, z)$ в неподвижной системе отсчета и углы α, β, γ. Кинетическая энергия системы равна

$$T=T_0+\sum_{j=1}^{N}T_j \tag{1.1}$$

$$T_0={}^1/_2M\mathbf{R}^{\cdot 2}+{}^1/_2(\mathbf{\Omega},\ J_0\mathbf{\Omega})+M(\mathbf{R}^{\cdot},\ \mathbf{\Omega},\ \mathbf{r}_c)$$

$$T_j={}^1/_2m_j\mathbf{R}^{\cdot 2}+{}^1/_2m_j\rho_j^2\Omega^2-{}^1/_2m_j(\boldsymbol{\rho}_j,\ \mathbf{\Omega})^2+m_j(\mathbf{R}^{\cdot},\ \mathbf{\Omega},\ \boldsymbol{\rho}_j+\mathbf{L}_j)+$$
$$+{}^1/_2(\mathbf{\Omega},\ J_j\mathbf{\Omega})+{}^1/_2\omega_j^2(\mathbf{e}_j,\ J_j\mathbf{e}_j)+\omega_j(\mathbf{e}_j,\ J_j\mathbf{\Omega})+$$
$$+m_j\omega_j[(\mathbf{R}^{\cdot},\ \mathbf{e}_j,\ \mathbf{L}_j)+(\boldsymbol{\rho}_j,\ \mathbf{L}_j)(\mathbf{e}_j,\ \mathbf{\Omega})-(\mathbf{L}_j,\ \mathbf{\Omega})(\boldsymbol{\rho}_j,\ \mathbf{e}_j)]+$$
$$+m_j[(\boldsymbol{\rho}_j,\ \mathbf{L}_j)\Omega^2-(\boldsymbol{\rho}_j\mathbf{\Omega})(\mathbf{L}_j,\ \mathbf{\Omega})]$$

Здесь T_0, T_j — кинетические энергии платформы и ротора j-го вибровозбудителя соответственно. Символами $(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$ и $(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})$ обозначаются скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ соответственно.

Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}[(\mathbf{R}+\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_i^{\circ})\mathbf{k}_j]^2+g\Big[\Big(M+\sum_{j=1}^{N}m_j\Big)\mathbf{R}+ \tag{1.2}$$
$$+M\mathbf{r}_c+\sum_{j=1}^{N}m_j(\boldsymbol{\rho}_j+\mathbf{L}_j)\Big]\mathbf{k}_3$$

Первое слагаемое в (1.2) выражает потенциальную энергию упругой деформации виброизоляторов, второе — потенциальную энергию системы в поле сил тяготения. Верхний индекс нуль в обозначении векторной величины показывает, что данный вектор соответствует исходному положению платформы.

Для записи уравнений движения в форме Лагранжа необходимо выразить все векторные величины, входящие в (1.1), (1.2), через обобщенные координаты x, y, z, α, β, γ, их производные и геометрические параметры рассматриваемой механической системы. Геометрические параметры суть: A, B — длины сторон прямоугольника $O_1O_2O_3O_4$, вершины которого являются точками крепления виброизоляторов к платформе, ξ, η, ζ — координаты центра инерции платформы в системе отсчета $O_1x'y'z'$, жестко связанной с платформой, a^j, b^j, c^j — координаты точки O^j $(j=1,\dots,N)$ в системе $O_1x'y'z'$, δ_1^j, δ_2^j — углы, определяющие ориентацию оси вращения ротора j-го вибровозбудителя относительно системы отсчета $O_1x'y'z'$, l_j — расстояние от точки O^j до центра инерции ротора j-го вибровозбудителя.

В системе отсчета $O_1x'y'z'$, жестко связанной с платформой, векторы $\mathbf{r}_c$, $\mathbf{r}_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ $\boldsymbol{\rho}_j$, $\mathbf{e}_j$ $(j=1,\dots,N)$ имеют следующие постоянные координатные представления:

$$\mathbf{r}_c=\|\xi,\ \eta,\ \zeta\|^T,\quad \boldsymbol{\rho}_j=\|a^j,\ b^j,\ c^j\|^T$$
$$\mathbf{e}_j=\|\sin\delta_2^j\cos\delta_1^j,\quad \sin\delta_1^j\sin\delta_2^j,\ \cos\delta_2^j\|^T\quad (j=1,\dots,N) \tag{1.3}$$
$$\mathbf{r}_1=\|0,\ 0,\ 0\|^T,\quad \mathbf{r}_2=\|A,\ 0,\ 0\|^T,\quad \mathbf{r}_3=\|A,\ B,\ 0\|^T,\quad \mathbf{r}_4=\|0,\ B,\ 0\|^T$$

Индекс T здесь и в дальнейшем означает операцию транспонирования вектора или матрицы.

Проекции p, q, r вектора $\mathbf{\Omega}$ угловой скорости платформы соответственно на оси O_1x', O_1y', O_1z' системы координат $O_1x'y'z'$ выражаются соотношениями:

$$p=\alpha^{\cdot}\cos\beta\cos\gamma+\beta^{\cdot}\sin\gamma,\quad q=-\alpha^{\cdot}\cos\beta\sin\gamma+\beta^{\cdot}\cos\gamma$$
$$r=\alpha^{\cdot}\sin\beta+\gamma^{\cdot} \tag{1.4}$$

Матрица $A^{\vee}$ направляющих косинусов осей неподвижной системы отсчета $Oxyz$ в системе координат $O_1x'y'z'$ имеет вид

$$A^{\vee}=\left\|\begin{matrix} \cos\gamma\cos\beta & \sin\alpha\cos\gamma\sin\beta+\cos\alpha\sin\gamma & -\cos\gamma\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\sin\gamma \\ -\sin\gamma\cos\beta & -\sin\alpha\sin\gamma\sin\beta+\cos\gamma\cos\alpha & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\gamma \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{matrix}\right\| \tag{1.5}$$

Координатные представления произвольного вектора $\mathbf{u}$ в системах отсчета $Oxyz$ и $O_1x'y'z'$ связаны соотношениями

$$\{\mathbf{u}\}_{O_1x'y'z'}=A^{\vee}\{\mathbf{u}\}_{Oxyz},\qquad \{\mathbf{u}\}_{Oxyz}=(A^{\vee})^T\{\mathbf{u}\}_{O_1x'y'z'} \tag{1.6}$$

Получим выражения для матриц $A_j(\varphi_j)$ направляющих косинусов осей систем координат $O^jx^jy^jz^j$, жестко связанных с роторами вибровозбудителей, в системе отсчета $O_1x'y'z'$, жестко связанной с платформой. Орты осей O^jx^j, O^jy^j, O^jz^j обозначим соответственно через $\mathbf{t}_1^j$, $\mathbf{t}_2^j$, $\mathbf{t}_3^j$. За исходное положение системы координат $O^jx^jy^jz^j$, отвечающее нулевому значению угла поворота φ_j вокруг оси $\mathbf{e}_j$, примем положение, при котором ось O^jx^j параллельна координатной плоскости $O_1x'y'$ системы отсчета $O_1x'y'z'$, жестко связанной с платформой. При этом векторы $\mathbf{t}_1^j$, $\mathbf{t}_2^j$, $\mathbf{t}_3^j$ имеют следующие координатные представления в системе $O_1x'y'z'$: $\mathbf{t}_1^j=\|\sin\delta_1^j, -\cos\delta_1^j, 0\|^T$, $\mathbf{t}_3^j=\mathbf{e}_j=\|\cos\delta_1^j\sin\delta_2^j, \sin\delta_1^j\sin\delta_2^j, \cos\delta_2^j\|^T$, $\mathbf{t}_2^j=\mathbf{t}_3^j\times\mathbf{t}_1^j=\|\cos\delta_1^j\cos\delta_2^j, \sin\delta_1^j\cos\delta_2^j, -\sin\delta_2^j\|^T$ и матрица $A_j(0)$ определяется выражением

$$A_j(0)=\|\mathbf{t}_1^j\,\mathbf{t}_2^j\,\mathbf{t}_3^j\|=\left\|\begin{matrix} \sin\delta_1^j & \cos\delta_1^j\cos\delta_2^j & \cos\delta_1^j\sin\delta_2^j \\ -\cos\delta_1^j & \sin\delta_1^j\cos\delta_2^j & \sin\delta_1^j\sin\delta_2^j \\ 0 & -\sin\delta_2^j & \cos\delta_2^j \end{matrix}\right\|$$

Текущее положение системы отсчета $O^jx^jy^jz^j$ получается из исходного поворотом на угол φ_j вокруг оси $\mathbf{e}_j=\mathbf{t}_3^j$, и искомая матрица $A_j(\varphi_j)$ равна

$$A_j(\varphi_j)=A_j(0)\left\|\begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix} \sin\delta_1^j\cos\varphi_j+\cos\delta_1^j\cos\delta_2^j\sin\varphi_j & -\sin\delta_1^j\sin\varphi_j+\cos\delta_1^j\cos\delta_2^j\cos\varphi_j & \cos\delta_1^j\sin\delta_2^j \\ -\cos\delta_1^j\cos\varphi_j+\sin\delta_1^j\cos\delta_2^j\sin\varphi_j & \cos\delta_1^j\sin\varphi_j+\sin\delta_1^j\cos\delta_2^j\sin\varphi_j & \sin\delta_1^j\sin\delta_2^j \\ -\sin\delta_2^j\sin\varphi_j & -\sin\delta_2^j\sin\varphi_j & \cos\delta_2^j \end{matrix}\right\|$$

Координатное представление радиуса-вектора $\mathbf{L}_j$ центра масс ротора j-го вибровозбудителя относительно точки O^j в системе $O^jx^jy^jz^j$ есть $\{\mathbf{L}_j\}_{O^jx^jy^jz^j}=\|l_j, 0, 0\|^T$.

Координатное представление вектора $\mathbf{L}_j$ в системе отсчета $O_1x'y'z'$ связано с представлением этого вектора в системе $O^jx^jy^jz^j$ соотношением

$$\{\mathbf{L}_j\}_{O_1x'y'z'}=A_j(\varphi_j)\{\mathbf{L}_j\}_{O^jx^jy^jz^j}=l_j\left\|\begin{matrix} \sin\delta_1^j\cos\varphi_j+\cos\delta_1^j\cos\delta_2^j\sin\varphi_j \\ -\cos\delta_1^j\cos\varphi_j+\sin\delta_1^j\cos\delta_2^j\sin\varphi_j \\ -\sin\delta_2^j\sin\varphi_j \end{matrix}\right\| \tag{1.7}$$

При равномерном вращении роторов $\varphi_j=\omega_jt+\varphi_j^\circ$, где φ_j° — начальные (при $t=0$) значения углов поворота.

Используя соотношения (1.4)—(1.7), можно представить кинетическую T и потенциальную Π энергии системы в виде функций обобщенных координат x, y, z, α, β, γ, обобщенных скоростей $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ и времени t и записать уравнения движения в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \quad (k=1, 2, \ldots, 6) \tag{1.8}$$

$$q_1=x, \quad q_2=y, \quad q_3=z, \quad q_4=\alpha, \quad q_5=\beta, \quad q_6=\gamma$$

При анализе движения рассматриваемой системы ограничимся линейным приближением, соответствующим малым смещениям платформы относительно исходного положения. Для допустимости такого приближения необходимо, чтобы смещения всех точек платформы были малы по сравнению с длинами недеформированных пружин виброизоляторов и размерами платформы. Это условие выполняется практически для всех типов вибрационных площадок.

Линеаризованные уравнения Лагранжа, соответствующие обобщенным координатам $\mathbf{R}=\|x, y, z\|^T$ в векторной записи имеют вид

$$\left(M+\sum_{j=1}^{N} m_j\right)\mathbf{R}^{\cdot\cdot}+\mathbf{\Phi}^{\cdot\cdot}\times\left[M\mathbf{r}_c{}^\circ+\sum_{j=1}^{N} m_j(\mathbf{\rho}_j{}^\circ+\mathbf{L}_j{}^\circ)\right]+ \tag{1.9}$$

$$+2\sum_{j=1}^{N} m_j\omega_j[\mathbf{e}_j(\mathbf{\Phi}^{\cdot},\mathbf{L}_j{}^\circ)-\mathbf{L}_j{}^\circ(\mathbf{\Phi}_j{}^{\cdot},\mathbf{e}_j)]-\sum_{j=1}^{N} m_j\omega_j{}^2\mathbf{L}_j=$$

$$=-\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}\{(\mathbf{R}+\mathbf{\Phi}\times\mathbf{r}_j{}^\circ,\mathbf{k}_j)\}\mathbf{k}_j-\left(M+\sum_{j=1}^{N} m_j\right)g\mathbf{k}_3$$

Здесь $\Phi=\|\alpha, \beta, \gamma\|^T$ — вектор малого поворота платформы. Для угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ имеет место приближенное (с точностью до членов второго порядка малости) равенство $\mathbf{\Omega}=\mathbf{\Phi}^{\cdot}$.

Уравнения, отвечающие обобщенным координатам $\Phi=\|\alpha, \beta, \gamma\|^T$, весьма громоздки и здесь не приводятся.

2. Рассмотрим установившиеся режимы движения механической системы, описанной в п. 1, представляющие собой вынужденные полигармонические колебания с частотами, равными частотам вращения роторов вибровозбудителей (ω_j). Такие колебания происходят в реальных системах описанного типа после затухания переходных процессов и представляют наибольший практический интерес. Ставится задача. Найти значения параметров системы, отвечающих поступательному движению платформы ($\mathbf{\Phi}^{\cdot}\equiv0$) в установившемся режиме. Будем рассматривать случай, когда $\mathbf{\Phi}\equiv0$. Это условие, несущественное с точки зрения процедуры анализа, приводит к менее громоздким вычислениям. Из (1.7), (1.9) вытекает, что при $\mathbf{\Phi}\equiv0$ переменные x, y, z удовлетворяют уравнениям

$$M_\Sigma x^{\cdot\cdot}+c_1x=\sum_{j=1}^{N} m_jl_j\omega_j{}^2[\sin\delta_1{}^j\cos(\omega_jt+\varphi_j{}^\circ)+ \tag{2.1}$$

$$+\cos\delta_1{}^j\cos\delta_2{}^j\sin(\omega_jt+\varphi_j{}^\circ)]$$

$$M_\Sigma y^{\cdot\cdot}+c_2y=\sum_{j=1}^{N} m_jl_j\omega_j{}^2[\sin\delta_1{}^j\cos\delta_2{}^j\sin(\omega_jt+\varphi_j{}^\circ)-\cos\delta_1{}^j\cos(\omega_jt+\varphi_j{}^\circ)]$$

$$M_\Sigma z^{\cdot\cdot}+c_3z=-\sum_{j=1}^{N} m_jl_j\omega_j{}^2\sin\delta_2{}^j\sin(\omega_jt+\varphi_j{}^\circ)-M_\Sigma g$$

$$M_\Sigma=M+\sum_{j=1}^{N} m_j, \qquad c_i=\sum_{j=1}^{4} c_{ji} \qquad (i=1, 2, 3)$$

Здесь φ_j° $(j=1,\ldots,N)$ — начальные значения углов поворота роторов вибровозбудителей.

Уравнения Лагранжа, отвечающие угловым переменным α, β, γ при $\Phi\equiv 0$, в векторной форме записи имеют вид

$$\left[M\mathbf{r}_c+\sum_{j=1}^{N} m_j(\boldsymbol{\rho}_j+\mathbf{L}_j)\right]\times\mathbf{R}^{\cdot\cdot}+\sum_{j=1}^{N}\omega_j^2(m_j\boldsymbol{\rho}_j\times[\mathbf{e}_j\times[\mathbf{e}_j\times\mathbf{L}_j]]+\mathbf{e}_j\times J_j\mathbf{e}_j)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}(\mathbf{R},\mathbf{k}_j)[\mathbf{r}_i\times\mathbf{k}_j]-g\left[M\mathbf{r}_c+\sum_{j=1}^{N}m_j(\boldsymbol{\rho}_j+\mathbf{L}_j)\right]\times\mathbf{k}_3 \qquad (2.2)$$

Если $M_\Sigma\omega_j^2\neq c_i$ $(i=1,2,3;\ j=1,\ldots,N)$, то уравнения (2.1) имеют единственное решение искомого вида

$$x=\sum_{j=1}^{N}\frac{m_jl_j\omega_j^2}{c_1-M_\Sigma\omega_j^2}[\sin\delta_1^j\cos(\omega_jt+\varphi_j^\circ)+\cos\delta_1^j\cos\delta_2^j\sin(\omega_jt+\varphi_j^\circ)]$$

$$y=\sum_{j=1}^{N}\frac{m_jl_j\omega_j^2}{c_2-M_\Sigma\omega_j^2}[\sin\delta_1^j\cos\delta_2^j\sin(\omega_jt+\varphi_0^j)-\cos\delta_1^j\cos(\omega_jt+\varphi_j^\circ)] \qquad (2.3)$$

$$z=-\sum_{j=1}^{N}\frac{m_jl_j\omega_j^2}{c_3-M_\Sigma\omega_j^2}\sin\delta_2^j\sin(\omega_jt+\varphi_j^\circ)-\frac{M_\Sigma g}{c_3}$$

В резонансных случаях, когда $M_\Sigma\omega_j^2=c_i$ $(i=1,2,3;\ j=1,\ldots,N)$, установившихся полигармонических колебаний не существует. Ниже предполагается, что неравенства $M_\Sigma\omega_j^2\neq c_i$ $(i=1,2,3;\ j=1,\ldots,N)$ выполнены.

При установившемся режиме движения платформа перемещается поступательно тогда и только тогда, когда подстановка выражений (2.3) в уравнения (2.2) обращает последние в тождества. Из условий тождественного выполнения равенств (2.2) после подстановки в них выражений (2.3) получаются соотношения, которым должны удовлетворять параметры системы (коэффициенты жесткости пружин виброизоляторов, параметры a_j, b_j, c_j, δ_1^j, δ_2^j, характеризующие расположение вибровозбудителей относительно платформы и т. д.), соответствующие поступательному движению платформы в установившемся режиме. Эти соотношения служат для определения искомых значений параметров.

3. Рассмотрим типичную виброплощадку с одним одновальным вибровозбудителем. Ось вращения ротора вибровозбудителя перпендикулярна плоскости, в которой лежат точки крепления виброизоляторов к платформе. В этом случае $N=1$, $\delta_1^1=\delta_2^1=0$ (см. п. 1). В дальнейшем индекс, указывающий номер вибровозбудителя, будет опускаться.

Предположим, что ось вращения ротора совпадает с одной из его главных осей инерции и, следовательно, $\mathbf{e}\times J\mathbf{e}=0$ (см. (2.2)). Совмещение осей вращения роторов различных механизмов с их главными осями инерции весьма желательно, поскольку в противном случае имеются ненулевые проекции моментов сил, действующих на оси со стороны роторов, на направления, перпендикулярные этим осям, и последние испытывают сильные изгибающие нагрузки.

При перечисленных выше условиях решения (2.3) системы уравнений (2.1) имеют вид

$$x=\frac{ml\omega^2}{c_1-M_\Sigma\omega^2}\sin\varphi,\qquad y=-\frac{ml\omega^2}{c_2-M_\Sigma\omega^2}\cos\varphi \qquad (3.1)$$

$$z=-M_\Sigma g/c_3,\quad M_\Sigma=M+m,\quad \varphi=\omega t+\varphi^\circ$$

Подстановка выражений (3.1) в уравнения (2.2) приводит к следующим равенствам (ξ, η, ζ — компоненты вектора $\mathbf{r}_c$ в системе координат $O_1x'y'z'$):

$$ml\left[\frac{\omega^4}{c_2-(M+m)\omega^2}(M\zeta+mc)+\omega^2c+g\right]\cos\varphi+ \tag{3.2}$$
$$+g\{(c_{33}+c_{43})B(M+m)/c_3-M\eta-mb\}=0$$
$$ml\left[\frac{\omega^4}{c_1-(M+m)\omega^2}(M\zeta+mc)+\omega^2c+g\right]\sin\varphi+$$
$$+g\{M\xi+ma-[(c_{23}+c_{33})A(M+m)/c_3]\}=0$$
$$ml\omega^2\left[\frac{\omega^2(M\eta+mb)}{c_1-(M+m)\omega^2}+b-\frac{(c_{31}+c_{41})B}{c_1-(M+m)\omega^2}\right]\sin\varphi+$$
$$+ml\omega^2\left[\frac{\omega^2(M\xi+ma)}{c_2-(M+m)\omega^2}+a-\frac{(c_{22}+c_{32})A}{c_2-(M+m)\omega^2}\right]\cos\varphi+$$
$$+m^2l^2\omega^4\left[\frac{1}{c_2-(M+m)\omega^2}-\frac{1}{c_1-(M+m)\omega^2}\right]\sin\varphi\cos\varphi=0$$
$$c_i\neq(M+m)\omega^2\ (i=1,2),\ c_3>0$$

Поскольку функции 1, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\varphi$ линейно независимы, для тождественного выполнения равенств (3.2) необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при указанных функциях в каждом выражении (3.2) равнялись нулю. Это условие в предположении $m\neq0$, $l\neq0$, $\omega\neq0$ приводит к системе равенств

$$c_3(M\eta+mb)-(c_{33}+c_{43})B(M+m)=0 \tag{3.3}$$
$$c_3(M\xi+ma)-(c_{23}+c_{33})A(M+m)=0 \tag{3.4}$$
$$\omega^4(M\zeta+mc)+(\omega^2c+g)[c_0-(M+m)\omega^2]=0 \tag{3.5}$$
$$\omega^2(M\eta+mb)+b[c_0-(M+m)\omega^2]-(c_{31}+c_{41})B=0 \tag{3.6}$$
$$\omega^2(M\xi+ma)+a[c_0-(M+m)\omega^2]-(c_{22}+c_{32})A=0 \tag{3.7}$$
$$c_1=c_2=c_0 \tag{3.8}$$

Здесь c_0 — произвольная неотрицательная постоянная.

При расчете конструкции и рабочей настройке виброплощадок для формования железобетонных изделий регулируемыми параметрами обычно являются коэффициенты жесткости упругих элементов виброизоляторов (c_{ij}, $i=1, 2, 3, 4$; $j=1, 2, 3$) и геометрические параметры (a, b, c) установки вибровозбудителя относительно платформы. Разрешив (3.3)—(3.5) относительно a, b, c, получим

$$a=[(c_{23}+c_{33})A(M+m)]/(c_3m)-M\xi/m,\quad c_3>0 \tag{3.9}$$
$$b=[(c_{33}+c_{43})B(M+m)]/(c_3m)-M\eta/m,\quad c_3>0 \tag{3.10}$$
$$c=\frac{\omega^2g(M+m)-gc_0-M\omega^4\zeta}{\omega^2(c_0-M\omega^2)},\quad c_0\neq M\omega^2 \tag{3.11}$$

После подстановки выражений (3.9)—(3.11) в соотношения (3.6), (3.7) последние принимают вид

$$Bm[\omega^2(c_{33}+c_{43})(M+m)-c_3(c_{31}+c_{41})]+ \tag{3.12}$$
$$+[(c_{33}+c_{43})B(M+m)-Mc_3\eta][c_0-(M+m)\omega^2]=0$$
$$Am[\omega^2(c_{23}+c_{33})(M+m)-c_3(c_{22}+c_{32})]+ \tag{3.13}$$
$$+[(c_{23}+c_{33})A(M+m)-Mc_3\xi][c_0-(M+m)\omega^2]=0$$

Формулы (3.8), (3.9)—(3.13) могут служить основой для расчета параметров виброплощадки, обеспечивающих поступательное перемещение платформы в установившемся режиме работы механизма. Отметим, что в силу (3.1), (3.8) платформа совершает круговые колебания в горизонтальной плоскости.

Важнейшими технологическими параметрами формования бетонных изделий на виброплощадках являются амплитуда колебаний u и частота вращения ротора вибровозбудителя ω. Если эти величины заданы, то из (3.8), (3.1) вычисляется величина c_0:

$$c_0=(M+m)\omega^2 \pm ml\omega^2/u \tag{3.14}$$

Знак (+) в (3.14) отвечает дорезонансному режиму работы механизма ($\omega^2<c_0/(M+m)$), знак (–) – зарезонансному режиму. В дальнейшем рассматривается только зарезонансный режим как наиболее типичный для формовочных виброплощадок. Подставив выражение (3.14) в (3.11), получим

$$c=(mgl-Mu\zeta\omega^2)/[m\omega^2(u-l)] \tag{3.15}$$

Равенства (3.12), (3.13) с учетом (3.14) принимают вид

$$(M+m)B\frac{c_{33}+c_{43}}{c_3}\left(1-\frac{u}{l}\right)-M\eta+(c_{31}+c_{41})B\frac{u}{l\omega^2}=0 \tag{3.16}$$

$$(M+m)A\frac{c_{33}+c_{23}}{c_3}\left(1-\frac{u}{l}\right)-M\xi+(c_{22}+c_{32})A\frac{u}{l\omega^2}=0 \tag{3.17}$$

Формулы (3.8)–(3.10), (3.15)–(3.17) можно использовать для расчета параметров, обеспечивающих стационарные колебания заданной частоты и амплитуды при условии поступательного перемещения платформы.

Исследуем возможность реализации такого режима на конкретном примере, отражающем типичные особенности формовочных виброплощадок. Пусть $\xi=A/2$, $\eta=B/2$, т. е. проекция центра масс платформы на плоскость, в которой расположены точки крепления виброизоляторов, совпадает с центром прямоугольника $O_1O_2O_3O_4$. Параметры M, m, l, u, ω примем равными следующим (типичным) значениям: $M=2\cdot10^4$ кг, $m=25$ кг, $l=0{,}2$ м, $u=10^{-3}$ м, $\omega=50\pi$ с$^{-1}$. Величина c однозначно определяется формулой (3.15), если задано значение ζ. Параметры a, b, c_{ij} ($i=1, 2, 3, 4$; $j=1, 2, 3$) из соотношений (3.8) – (3.10), (3.15) – (3.17) определяются неоднозначно. Эту неоднозначность можно использовать для удовлетворения дополнительных требований к конструкции виброплощадки, полагая некоторые параметры равными конкретным значениям, или подчиняя их определенным соотношениям. Положим, например, $a=b=0$. Тогда из (3.9), (3.10) вытекают равенства

$$(c_{33}+c_{23})/c_3=(c_{33}+c_{43})/c_3={}^1/_2M/(M+m)\approx0{,}499 \tag{3.18}$$

Подставив (3.18) в (3.16), (3.17), получим соотношения

$$c_{22}+c_{32}=c_{31}+c_{41}=M\omega^2/2\approx2{,}467\cdot10^8 \text{ Н/м} \tag{3.19}$$

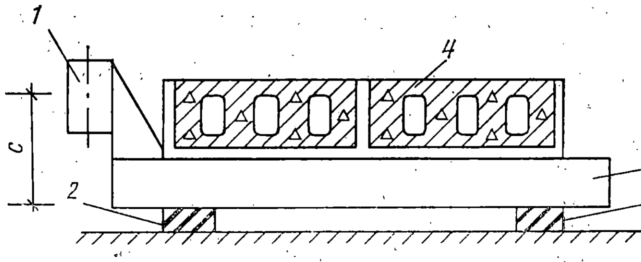
Из (3.8), (3.14), (3.19) следует, что

$$c_{11}+c_{21}=c_{12}+c_{42}=\omega^2({}^1/_2(M+2m)-ml/u)\approx1{,}240\cdot10^8 \text{ Н/м} \tag{3.20}$$

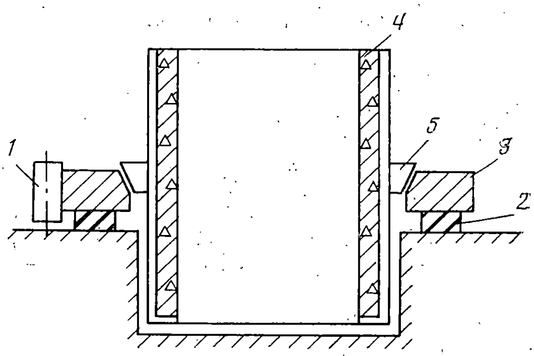
Искомые параметры c_{ij} ($i=1, 2, 3, 4$; $j=1, 2, 3$) определяются из (3.18) – (3.20) неоднозначно. Например, их можно выбрать равными следующим значениям: $c_{11}=c_{21}=c_{12}=c_{42}={}^1/_2\omega^2({}^1/_2(M+2m)-ml/u)\approx0{,}620\cdot10^8$ Н/м; $c_{22}=c_{32}=c_{31}=c_{41}={}^1/_4M\omega^2\approx1{,}234\cdot10^8$ Н/м; $c_{23}=c_{33}=c_{43}=K=10^8$ Н/м, $c_{13}=(M+4m)K/M=1{,}005\cdot10^8$ Н/м.

Отметим, что параметр K в (3.21) может принимать произвольные значения. Это непосредственно следует из уравнения (3.18), служащего для определения c_{i3}, $i=1, 2, 3, 4$. Принятое в (3.21) значение $K=10^8$ Н/м отвечает статическому смещению системы в вертикальном направлении $z=-(M+m)g/c_3\approx0{,}49\cdot10^{-3}$ м.

4. Изложенная в статье методика расчета геометрических и жесткостных характеристик вибрационного механизма использовалась для определения оптимальных параметров виброплощадки для формования вентиляционных блоков. Схема площадки дана на фиг. 2. Здесь *1* – вибровозбудитель, *2* – упругие опоры (виброизоляторы), *3* – платформа, *4* – формуемое изделие. Определены оптимальное расположение вибровозбудителя и жесткости упругих опор, позволяющие обеспечить поступательное перемещение платформы и, как следствие, однородность вибрационного поля по объему формуемого изделия. В результате достигнуто высокое качество поверхности изделия.



Фиг. 2



Фиг. 3

Одним из существенных параметров исследуемой в статье вибрационной системы является определяемая формулой (3.15) высота c установки вибровозбудителя на платформе. Величина c может достигать больших значений (для примера, описанного в п. 3, при $\zeta=0{,}65$ м имеем $c=2{,}6$ м), что по конструктивным соображениям весьма нежелательно.

Как следует из (3.15), высоту установки вибровозбудителя можно уменьшить за счет уменьшения величины ζ — высоты центра масс системы «платформа — изделие» над плоскостью крепления виброизоляторов к платформе. На фиг. 3 показан один из возможных способов конструктивной реализации уменьшения величины ζ. В площадке *3*, установленной на виброизоляторах *2*, делается проем, в который опускается форма *4* с изделием. Фиксация формы относительно площадки может осуществляться, например, при помощи клиновых выступов *5*, входящих в соответствующие пазы площадки. Положение клиновых выступов относительно формы можно сделать регулируемым по высоте, что позволит изменять величину ζ в широких пределах. Такое конструктивное решение целесообразно использовать при создании оборудования для формования объемных элементов: труб, колец и других высоких изделий, формируемых в вертикальном положении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гладков С. Н.* Электромеханические вибраторы. М.: Машиностроение. 1966. 83 с.
2. Вибрации в технике: Справочник. Т. 4. Вибрационные процессы и машины. М.: Машиностроение. 1981. 509 с.
3. *Быховский И. И.* Основы теории вибрационной техники. М.: Машиностроение. 1969. 363 с.
4. *Бауман В. А., Быховский И. И.* Вибрационные машины и процессы в строительстве. М.: Высш. шк., 1977. 255 с.
5. *Болотник Н. Н., Нгуен Чыонг.* О выборе параметров вибрационных машин с инерционным возбуждением // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 1. С. 59–66.
6. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука. 1976. 670 с.

Москва, Ханой

Поступила в редакцию
13.II.1986