

УДК 531.8

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ МАНИПУЛЯТОРА ВДОЛЬ СВЯЗИ

ЛЕНСКИЙ А. В., ЛИЗУНОВ А. Б., МОЖЖЕВЕЛОВ С. Б.,
ФОРМАЛЬСКИЙ А. М., ШНЕЙДЕР А. Ю.

Использование силомоментной системы адаптации значительно расширяет возможности роботов-манипуляторов. Круг операций, осуществляемых с помощью такой системы, широк: различные операции сборки, например вставление вала в отверстие [1, 2], завинчивание детали [3], сварки, абразивной зачистки [4].

В публикуемой работе, продолжающей исследования [5–8], рассматривается решаемая на основе силовой информации задача поддержания контакта с неподвижным предметом при движении схвата робота вдоль контура предмета — вдоль связи. Подобное движение может быть использовано, например, для определения контура предметов, отслеживания шва при автоматической сварке, абразивной зачистки, шлифовки.

Алгоритм управления, обеспечивающего указанное движение, приведен в [5, 6]. В данной работе рассматривается несколько другой алгоритм управления, теоретически исследуются вопросы существования и устойчивости стационарных режимов при движении вдоль прямой и окружности.

В экспериментальных исследованиях использовался двурукий робот портального типа УМ-1.25 [7–9]. Каждая рука робота имеет три поступательные степени подвижности. В качестве силоизмерительного элемента используется четырехкомпонентный модульный датчик, измеряющий три составляющие вектора силы и одну составляющую момента¹. В рассматриваемой задаче используются две горизонтальные степени подвижности одной руки и две соответствующие компоненты силы. Манипулятор снабжен датчиками скорости и позиции. Программные значения скорости движения вычисляются на ЭВМ и поступают на следящие системы.

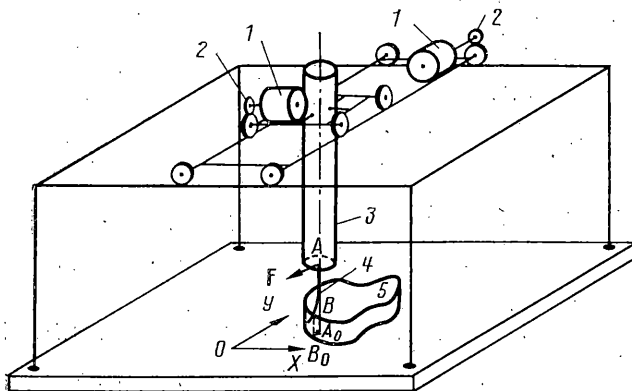
1. Математическая модель. Уравнения движения. Рассмотрим манипулятор, обладающий двумя поступательными степенями подвижности. В горизонтальной плоскости (на столе манипулятора) введем ортогональную систему координат OXY , ось OX которой направлена вдоль одной степени подвижности, ось OY — вдоль другой. Вдоль каждой из этих осей движение осуществляется с помощью своего электродвигателя. Схема манипулятора приведена на фиг. 1, а, где 1 — двигатель, 2 — редуктор, 3 — штанга манипулятора, 4 — силоизмерительный датчик, 5 — неподвижный предмет.

Обозначим через x и y координаты проекции на плоскость XY какой-либо точки штанги. Не учитывая индуктивность в цепи якоря двигателей, уравнения движения рассматриваемой системы с двумя степенями свободы можно записать [10] в виде

$$M_x \ddot{x} + \varepsilon_x \dot{x} = \alpha_x u_x + F_x, \quad M_y \ddot{y} + \varepsilon_y \dot{y} = \alpha_y u_y + F_y \quad (1.1)$$

Здесь M_x, M_y — приведенные массы всех подвижных частей — штанги манипулятора, шестерен редуктора, якоря двигателя и других для соответствующих степеней свободы; $\varepsilon_x \dot{x}$ и $\varepsilon_y \dot{y}$ — силы, складывающиеся из сил вязкого трения и противозлектродвижущих сил приводов; u_x, u_y — напряжения, подаваемые на двигатели; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \alpha_x, \alpha_y$ — положительные постоянные, зависящие от характеристик привода и редуктора; F_x и F_y — составляющие силы F (фиг. 1, б), действующей со стороны силоизмерительного датчика на штангу манипулятора.

¹ Шнейдер А. Ю., Гориневский Д. М., Ленский А. В., Можжевелов С. Б. Силомоментные датчики для робототехнических систем: Препринт. М.: ИПИ АН СССР. 1984. 70 с.



Фиг. 1

Будем считать датчик бесконечно тонким безмассовым упругим стержнем (фиг. 1), жесткость которого на изгиб одинакова по всем направлениям. В недеформированном состоянии стержень вертикален; он крепится к руке манипулятора в точке A , где и прикладывается сила F . Проекцию точки A на плоскость XU обозначим A_0 . Будем считать, что координаты x, y именно точки A_0 фигурируют в уравнениях (1.1).

В отсутствие контакта датчика усилий с предметом сила $F=0$, так как датчик не наделен массой. При контакте с предметом в точке B (фиг. 1) стержень изгибается. Проекцию точки B на плоскость XU обозначим через B_0 . Вектор силы, действующей при контакте со стороны предмета на датчик, приложен в точке B и параллелен вектору r_0 , соединяющему точки A_0 и B_0 . Поскольку стержень считается безмассовым, эта сила равна силе

F , действующей со стороны датчика на манипулятор в точке A . Будем считать в дальнейшем, что жесткость стержня велика и его деформации малы. При этом силу F можно считать пропорциональной длине отрезка A_0B_0 : $F=cr_0$, где коэффициент $c=\text{const}>0$ характеризует жесткость стержня на изгиб.

Для простоты изложения будем рассматривать предметы цилиндрической формы, боковая поверхность которых ортогональна плоскости XU , а верхняя и нижняя поверхности параллельны ей. При контакте датчик касается такого предмета в точке B верхнего контура (фиг. 1). Уравнение проекции верхнего контура на плоскость XU запишем в параметрическом виде $x=x(s), y=y(s)$; где s — длина контура, отсчитываемая от какой-то его точки. Пусть $x(s_B), y(s_B)$ — координаты точки B_0 (фиг. 2). Тогда

$$F_x=c[x(s_B)-x], \quad F_y=c[y(s_B)-y] \quad (1.2)$$

Выражения для векторов касательной τ и внешней нормали n к контуру предмета в точке $B_0(s=s_B)$ имеют вид

$$\tau = \lambda \begin{vmatrix} x'(s_B) \\ y'(s_B) \end{vmatrix}, \quad n = \lambda \begin{vmatrix} -y'(s_B) \\ x'(s_B) \end{vmatrix}, \quad \lambda = [x'(s_B)^2 + y'(s_B)^2]^{-1/2}$$

где штрихом обозначается дифференцирование по параметру s и предполагается, что соответствующие производные существуют.

Проекции F_τ и F_n силы F на касательную и нормаль к контуру в точке B равны (фиг. 2):

$$F_\tau = \lambda c \{ x'(s_B)[x(s_B)-x] + y'(s_B)[y(s_B)-y] \} \quad (1.3)$$

$$F_n = \lambda c \{ -y'(s_B)[x(s_B)-x] + x'(s_B)[y(s_B)-y] \}$$

Величина F_τ равна силе трения датчика о предмет, F_n — силе нормального давления. Обозначим через β угол трения ($f = \operatorname{tg} \beta$). Если точка контакта B перемещается вдоль контура, т. е. $s_B \neq 0$, то направление силы F_τ противоположно скорости перемещения и вектор силы F лежит на границе конуса трения, т. е. $F_\tau = -f F_n \operatorname{sgn} s_B$. Следовательно, при $s_B \neq 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} x'(s_B)[x(s_B) - x] + y'(s_B)[y(s_B) - y] = \\ = f \{y'(s_B)[x(s_B) - x] - x'(s_B)[y(s_B) - y]\} \operatorname{sgn} s_B \quad (F_n > 0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если $s_B = 0$, то вектор силы F лежит в конусе трения

$$|F_\tau|/F_n \leq f \quad (1.5)$$

При заданном контуре предмета и координатах x, y соотношения (1.4), (1.5) определяют параметр s_B . При известном значении s_B по уравнениям контура отыскиваются координаты $x(s_B), y(s_B)$ точки B_0 , а затем и компоненты (1.2) силы F для подстановки в уравнения движения (1.1). Если $f=0$, то вместо (1.4), (1.5) остается только уравнение (1.4), которое упрощается.

Соотношения (1.1)–(1.5) представляют собой замкнутую систему уравнений управляемого двумерного движения манипулятора в контакте с предметом. В отсутствие контакта следует пользоваться только уравнениями (1.1), положив в них $F_x = F_y = 0$. Возникновение и потеря контакта также описывается в рамках соотношений (1.1)–(1.5).

Допустим, что управляющие воздействия u_x, u_y заданы в виде функций времени или фазовых координат, пусть заданы также начальные условия $x(0), y(0), x'(0), y'(0)$. Если при $t=0$ датчик контактирует с предметом, то зададим еще и координаты $x(s_B), y(s_B)$ точки контакта B , которые должны удовлетворять условиям (1.4) или (1.5). При этих условиях решение уравнений (1.1)–(1.5) описывает движение манипулятора для $t > 0$. В процессе решения уравнений могут возникнуть случаи, когда анализ соотношений (1.4), (1.5) дает несколько решений s_B . В этих случаях для выделения одного решения требуется привлечение дополнительных условий, например непрерывности функции $s_B(t)$.

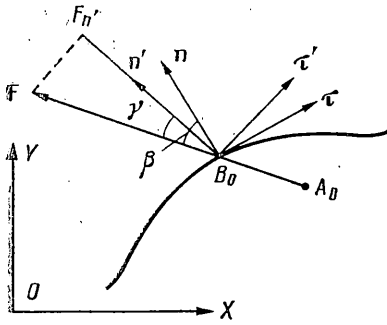
Допустим, что к нижнему концу датчика усилий прикреплен безмассовый абразивный круг, вращающийся вокруг вертикальной оси. При перемещении круга вдоль контура детали осуществляется ее абразивная обработка. Скорость вращения круга обычно настолько велика, что окружная скорость больше скорости центра круга. При этом сила взаимодействия круга с деталью лежит на границе конуса трения, а направление силы трения F_τ определяется направлением скорости вращения и не зависит от скорости центра круга. Приведенные выше уравнения движения манипулятора с некоторыми видоизменениями можно использовать и для описания процесса абразивной зачистки. При этом неравенство (1.5) из рассмотрения следует исключить, в уравнении (1.4) положить $s_B > 0$, а угол трения β , в зависимости от направления вращения круга, считать положительным или отрицательным $-\pi/2 < \beta < \pi/2$.

2. Управление. Пусть в начальный момент времени датчик усилий находится в контакте с некоторым предметом (фиг. 1, 2), контур которого заранее не известен. Опишем способ управления приводами, при котором датчик усилий, будучи в контакте с предметом, движется вдоль его контура — вдоль односторонней связи.

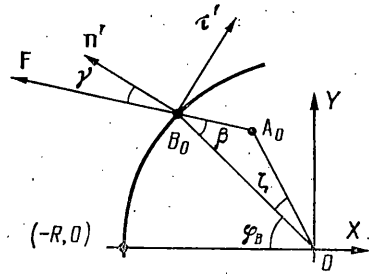
Движение манипулятора вдоль контура будем строить как суперпозицию двух базовых движений — по касательной и по нормали [7, 8]. В соответствии с этим зададим «программное» значение V_p вектора скорости манипулятора в виде суммы

$$V_p = V_\tau + V_n = V_\tau \tau + \kappa (F_n - F_p) n \quad (2.1)$$

Здесь $V_\tau = \operatorname{const} > 0$ — программное значение скорости движения манипулятора по касательной к предмету (контурной скорости); $F_p = \operatorname{const} > 0$ — программное значение нормальной составляющей силы прижатия датчика усилий к предмету, $\kappa > 0$ — постоянный коэффициент. Второе слагаемое в формуле (2.1) есть вектор, направленный к предмету при $F_n <$



Фиг. 3



Фиг. 4

$<F_p$ и от предмета при $F_n > F_p$. При $V_\tau = 0$ величина (2.1) — программное значение скорости, которое используется в работах [7, 8] для решения задачи поддержания контакта манипулятора с предметом.

Закон управления манипулятором выберем линейным по скорости ($k_x, k_y = \text{const} > 0$):

$$U = K(V_p - V) \quad (2.2)$$

$$U = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad V_p = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}$$

В отсутствие силы трения ($\beta = 0$) будем иметь $F = F_n n$, $F = F_n = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2}$. В этом случае при помощи датчика усилий, измеряющего вектор силы F , определяется вектор нормали n и величина F_n . Задав желаемое направление движения манипулятора, например, поворотом n на угол $\pi/2$ по часовой стрелке, можно однозначно определить вектор τ . Следовательно, в случае $\beta = 0$ при наличии датчиков скорости, измеряющих компоненты \dot{x} , \dot{y} вектора V , управление (2.2) может быть технически реализовано.

Пусть $\beta \neq 0$. Рассмотрим случай, когда датчик усилий, будучи в контакте с предметом, движется. В этом случае вектор силы F располагается на границе конуса трения (фиг. 3). Если угол трения β известен, то, используя датчик усилий, можно найти векторы τ , n , величину $F_n = F \cos \beta$ и реализовать управление (2.1), (2.2). Если угол β неизвестен, то датчик усилий не дает возможности вычислить ни векторы τ , n , ни величину F_n . Допустим, однако, что существуют какие-то априорные сведения относительно коэффициента трения. Обозначим γ предполагаемое значение угла трения, в отличие от обозначения β для истинного угла трения. Величину γ выбираем из диапазона углов трения, который для соответствующих материалов известен. Зададим вместо (2.1) другое программное значение V_p скорости

$$V_p = V_\tau \tau' + \kappa (F_n - F_p) n' \quad (2.3)$$

Здесь n' — единичный вектор, составляющий с измеряемым вектором силы F угол γ , единичный вектор τ' получен поворотом вектора n' на угол $\pi/2$ по часовой стрелке, $F_n = F \cos \gamma$ (фиг. 3). При $\gamma = \beta$ выражения (2.1), (2.3) совпадают. Можно считать, что в случае $\beta \neq 0$ при помощи выражения (2.3) приближенно вычисляется вектор (2.1).

Задача состоит в отыскании значений V_τ , F_p , κ , k_x , k_y , γ , при которых управление (2.2), (2.3) работоспособно для всех углов β из заданного диапазона.

Если в формуле (2.3) положить $\kappa = 0$, а вектор τ' задать путем поворота вектора F/F по часовой стрелке на угол $\pi/2$ и еще на угол, пропорциональный разности $F - F_p$, то получится программное значение скорости, используемой в [5, 6].

Приближенное вычисление вектора (2.1) можно осуществить иначе. Измеряя при помощи позиционных датчиков в процессе перемещения вдоль контура координаты x , y манипулятора, можно находить текущую

к контуру предмета и, тем самым, строить вектор, близкий к вектору касательной τ .

3. Движение вдоль прямой. Рассмотрим случай, когда контур предмета — есть прямая линия. Не ограничивая общности, можно считать, что эта прямая проходит начало координат: $x=s \cos \delta$, $y=s \sin \delta$, где $\delta=\text{const}$ — угол между прямой и осью OX , длина s прямой отсчитывается от начала координат; $\tau=(\cos \delta, \sin \delta)$, $n=(-\sin \delta, \cos \delta)$.

Пусть точка контакта B движется так, что $s_B^* > 0$. Тогда при помощи уравнения (1.4) находим величину s_B , затем при помощи формул (1.2), (1.3) — компоненты вектора силы

$$\begin{aligned} F_x &= -F \sin(\delta+\beta), \quad F_y = F \cos(\delta+\beta) \\ F &= c(x \sin \delta - y \cos \delta) (\cos \beta)^{-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Уравнения (1.1) после подстановки в них формул (3.1) приобретают вид

$$\begin{aligned} M_x x'' + \varepsilon_x x' + c \sin(\delta+\beta) (x \sin \delta - y \cos \delta) (\cos \beta)^{-1} &= \alpha_x u_x \\ M_y y'' + \varepsilon_y y' - c \cos(\delta+\beta) (x \sin \delta - y \cos \delta) (\cos \beta)^{-1} &= \alpha_y u_y \end{aligned} \quad (3.2)$$

Компоненты управления (2.2), (2.3) таковы:

$$\begin{aligned} u_x &= k_x \{ V_\tau \cos(\delta+\beta-\gamma) - \kappa [c \cos \gamma (\cos \beta)^{-1} (x \sin \delta - y \cos \delta) - \\ &\quad - F_p] \sin(\delta+\beta-\gamma) - x' \} \\ u_y &= k_y \{ V_\tau \sin(\delta+\beta-\gamma) + \kappa [c \cos \gamma (\cos \beta)^{-1} (x \sin \delta - y \cos \delta) - \\ &\quad - F_p] \cos(\delta+\beta-\gamma) - y' \} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Уравнения (3.2), (3.3) имеют циклическую координату. После замены координат $\xi = x \cos \delta + y \sin \delta$, $\eta = x \sin \delta - y \cos \delta$ переменная ξ в уравнениях (3.2), (3.3) фигурировать не будет — останутся только ее производные. В переменных ξ, η уравнения контура имеют вид $\xi = s$, $\eta = 0$.

Будем искать стационарный режим системы (3.2), (3.3), отвечающий движению манипулятора с постоянной скоростью и постоянной силой прижатия

$$\begin{aligned} x' &= s_B^* \cos \delta, \quad y' = s_B^* \sin \delta \\ s_B^* &= \xi' = V_\tau + \Delta V = \text{const} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$F_n = c \cos \gamma (\cos \beta)^{-1} (x \sin \delta - y \cos \delta) = F_p + \Delta F = \text{const}$$

Линейные алгебраические уравнения для отыскания параметров ΔV , ΔF этого режима имеют вид ($\sigma_x = \alpha_x k_x$, $\sigma_y = \alpha_y k_y$):

$$\begin{aligned} (\varepsilon_x + \sigma_x) \cos \delta \Delta V + [\sin(\delta+\beta) (\cos \gamma)^{-1} + \kappa \sigma_x \sin(\delta+\beta-\gamma)] \Delta F &= \\ = -F_p \sin(\delta+\beta) (\cos \gamma)^{-1} + V_\tau [\sigma_x \cos(\delta+\beta-\gamma) - (\varepsilon_x + \sigma_x) \cos \delta] \\ (\varepsilon_y + \sigma_y) \sin \delta \Delta V - [\cos(\delta+\beta) (\cos \gamma)^{-1} + \kappa \sigma_y \cos(\delta+\beta-\gamma)] \Delta F &= \\ = F_p \cos(\delta+\beta) (\cos \gamma)^{-1} + V_\tau [\sigma_y \sin(\delta+\beta-\gamma) - (\varepsilon_y + \sigma_y) \sin \delta] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выражения для величин ΔV , ΔF слишком громоздки, поэтому выпишем их только при условии частичной идентичности степеней подвижности (каналов)

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon, \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma \quad (3.6)$$

При этом условии они имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta V &= \sigma(\varepsilon + \sigma)^{-1} [V_\tau (1 + \kappa \sigma) \cos \gamma - F_p \kappa \sin \gamma] D^{-1} - V_\tau \\ \Delta F &= [V_\tau \sigma \sin(\gamma - \beta) \cos \gamma - F_p \cos \beta] D^{-1} \\ D &= \cos \beta + \kappa \sigma \cos(\gamma - \beta) \cos \gamma \end{aligned} \quad (3.7)$$

Эти величины не зависят от угла δ , что при условиях (3.6) естествен-

но, и должны удовлетворять неравенствам

$$V_{\tau} + \Delta V > 0, F_p + \Delta F > 0 \quad (3.8)$$

так как они получены для движения в контакте с предметом при $s_B > 0$.

При $\gamma \neq \beta$ программная скорость V_{τ} задается вдоль прямой с углом наклона $\delta + \beta - \gamma$, а не вдоль контура. Это вносит систематические ошибки в отслеживание скорости и силы прижатия, которые остаются и при $\sigma \rightarrow \infty$:

$$\Delta V = V_{\tau} [\cos^{-1}(\gamma - \beta) - 1], \quad \Delta F = V_{\tau} \operatorname{tg}(\gamma - \beta) / \kappa \quad (3.9)$$

Предельный переход $\sigma \rightarrow \infty$ ($k_x, k_y \rightarrow \infty$) можно трактовать как переход к релейной системе управления [11], поскольку напряжения u_x, u_y всегда ограничены по модулю.

Формулами (3.9) описывается решение системы (3.5) при $\sigma_x, \sigma \rightarrow \infty$ также и в отсутствие предположения (3.6).

Рассмотрим несколько частных случаев. Пусть $\gamma = \beta = 0$, тогда

$$\Delta V = -V_{\tau} \varepsilon / (\varepsilon + \sigma), \quad \Delta F = -F_p / (1 + \kappa \sigma) \quad (3.10)$$

При $\gamma = \beta$ значение ΔF совпадает с (3.10), а $\Delta V = -V_{\tau} \varepsilon (\varepsilon + \sigma)^{-1} - F_p \kappa \alpha \operatorname{tg} \beta [(\varepsilon + \sigma) \cdot (1 + \kappa \sigma)]^{-1}$.

Появление здесь дополнительного, по сравнению с (3.10), слагаемого связано с наличием силы трения. Если $\sigma \rightarrow \infty$, то статические ошибки $\Delta V, \Delta F$ стремятся к нулю. Если $\kappa \rightarrow \infty$, то $\Delta F \rightarrow 0$. При $\gamma = 0$ имеем

$$\Delta V = V_{\tau} \sigma [(\varepsilon + \sigma) \cos \beta]^{-1} - V_{\tau}, \quad \Delta F = -[V_{\tau} \sigma \operatorname{tg} \beta + F_p] (1 + \kappa \sigma)^{-1}$$

4. Устойчивость движения вдоль прямой. Запишем линейные уравнения (3.2), (3.3) в отклонениях $\Delta x, \Delta y$ от стационарного режима (3.4):

$$\Delta \ddot{x} + q_x \Delta \dot{x} + r_x \sin \delta \Delta x - r_x \cos \delta \Delta y = 0 \quad (4.1)$$

$$\Delta \ddot{y} + q_y \Delta \dot{y} - r_y \sin \delta \Delta x + r_y \cos \delta \Delta y = 0$$

$$q_x = (\varepsilon_x + \sigma_x) / M_x, \quad q_y = (\varepsilon_y + \sigma_y) / M_y$$

$$r_x = c [\sin(\delta + \beta) + \kappa \sigma_x \cos \gamma \sin(\delta + \beta - \gamma)] (M_x \cos \beta)^{-1}$$

$$r_y = c [\cos(\delta + \beta) + \kappa \sigma_y \cos \gamma \cos(\delta + \beta - \gamma)] (M_y \cos \beta)^{-1}$$

Характеристическое уравнение системы (4.1) имеет вид

$$\lambda^4 + \lambda^3 (q_x + q_y) + \lambda^2 (r_x \sin \delta + r_y \cos \delta + q_x q_y) + \lambda (q_x r_y \cos \delta + q_y r_x \sin \delta) = 0 \quad (4.2)$$

Наличие нулевого корня у уравнения (4.2) связано с цикличностью координаты ξ . Устойчивость системы (3.2), (3.3) рассматривается по отношению к трем переменным ξ, η, η . Запишем условия Гурвица асимптотической устойчивости

$$q_x r_y \cos \delta + q_y r_x \sin \delta > 0 \quad (4.3)$$

$$q_x r_x \sin \delta + q_y r_y \cos \delta + q_x q_y (q_x + q_y) > 0$$

К равенствам (3.6) присовокупим равенство $M_x = M_y = M$. При данных условиях идентичности каналов неравенства (4.3) сводятся к одному, не зависящему от угла δ наклона контура

$$\cos \beta + \kappa \sigma \cos(\gamma - \beta) \cos \gamma > 0 \quad (4.4)$$

Так как $0 \leq \gamma, \beta < \pi/2$, то при $\kappa, \sigma \geq 0$ неравенство (4.4) выполняется. При условии (4.4) неравенства (3.8) принимают вид

$$V_{\tau} (1 + \kappa \sigma) > \kappa F_p \operatorname{tg} \gamma, \quad \lambda F_p \cos(\beta - \gamma) > V_{\tau} \sin(\beta - \gamma) \quad (4.5)$$

Задавая величины V_{τ}, F_p, γ и подставляя в неравенства (4.5) всевозможные значения β из диапазона углов трения соответствующих материалов, можно найти коэффициенты κ, σ , при которых существует стационарный режим.

Область, описываемую приведенными неравенствами, можно построить в плоскости переменных β, γ . Если $\kappa=0$, то неравенства (4.5) упрощаются: $V_\tau > 0, \gamma > \beta$.

Заметим, что производная величины ΔV по γ при $\gamma = \beta$ отрицательна, а величины ΔF — положительна. Следовательно, с ростом угла γ скорость движения убывает, а сила прижатия увеличивается.

Пусть теперь каналы не являются идентичными. Тогда можно показать, что если выполняется второе из неравенств (4.5), то условия (3.8) выполняются при достаточно больших значениях σ_x, σ_y . Для каждой точки (β, γ) , удовлетворяющей условию $0 \leq \gamma, \beta < \pi/2$ при достаточно больших значениях σ_x, σ_y , неравенства (4.3) также выполняются и, следовательно, имеет место асимптотическая устойчивость стационарного режима.

5. Движение вдоль окружности. Пусть контур предмета есть окружность радиуса R с центром в начале координат O (фиг. 4): $x = -R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, s = R\varphi$. Длина дуги s отсчитывается здесь от точки $(-R, 0)$ по часовой стрелке; $\tau = (\sin \varphi, \cos \varphi), \mathbf{n} = (-\cos \varphi, \sin \varphi)$. При изучении движения внутри окружности нужно заменить \mathbf{n} на $-\mathbf{n}$.

Пусть манипулятор находится в контакте с окружностью, а точка контакта B движется так, что $s_B > 0$. Тогда уравнение (1.4) для определения величины s_B принимает вид

$$x \sin(\varphi_B - \beta) + y \cos(\varphi_B - \beta) = R \sin \beta, \quad \varphi_B R = s_B \quad (5.1)$$

Векторы силы \mathbf{F} и векторы τ', \mathbf{n}' равны (фиг. 4):

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} -F \cos(\varphi_B - \beta) \\ F \sin(\varphi_B - \beta) \end{vmatrix}, \quad \tau' = \begin{vmatrix} \sin(\varphi_B - \beta + \gamma) \\ \cos(\varphi_B - \beta + \gamma) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{vmatrix} -\cos(\varphi_B - \beta + \gamma) \\ \sin(\varphi_B - \beta + \gamma) \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

Уравнения (1.1) с учетом выражений (5.2) можно записать так:

$$M_x x'' + \varepsilon_x x' + F \cos(\varphi_B - \beta) = \alpha_x u_x \quad (5.3)$$

$$M_y y'' + \varepsilon_y y' - F \sin(\varphi_B - \beta) = \alpha_y u_y$$

Используя формулы (5.2), выпишем выражения для компонент управления (2.2), (2.3):

$$u_x = k_x [V_\tau \sin(\varphi_B - \beta + \gamma) - \kappa (F \cos \gamma - F_p) \cos(\varphi_B - \beta + \gamma) - x'] \quad (5.4)$$

$$u_y = k_y [V_\tau \cos(\varphi_B - \beta + \gamma) + \kappa (F \cos \gamma - F_p) \sin(\varphi_B - \beta + \gamma) - y']$$

Сила \mathbf{F} определяется соотношениями (1.2), в которые подставляется величина s_B , найденная из уравнения (5.1), либо соотношениями

$$r = [R^2 + F^2/c^2 - 2FR \cos \beta/c]^{1/2} \quad (5.5)$$

$$R/\sin(\beta + \xi) = r/\sin \beta = F/(c \sin \xi)$$

где $r = (x^2 + y^2)^{1/2} = OA_0, \xi$ — угол A_0OB_0 (фиг. 4).

Будем искать стационарный режим системы (5.3), (5.4), соответствующий постоянной скорости перемещения и постоянной силе прижатия

$$s_B' = VR/r = \text{const} \quad (V = V_\tau + \Delta V), \quad F \cos \gamma = F_p + \Delta F = \text{const}$$

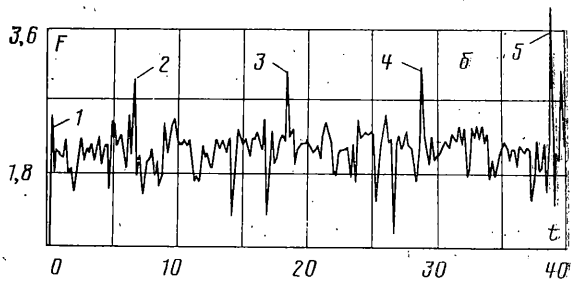
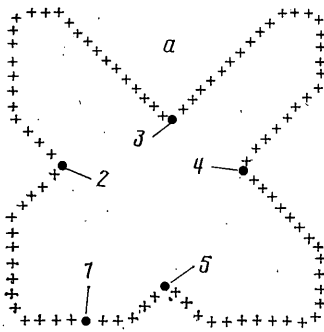
$$r = \text{const}, \quad \xi = \text{const}, \quad \varphi_B = Vt/r + \text{const}$$

$$x = -r \cos(\varphi_B + \xi), \quad y = r \sin(\varphi_B + \xi) \quad (5.6)$$

Алгебраические уравнения (нелинейные, в отличие от (3.5)) для отыскания параметров $\Delta V, \Delta F$ стационарного режима имеют вид

$$M_x V^2 \cos(\varphi_B + \xi)/r + (\varepsilon_x + \sigma_x) V \sin(\varphi_B + \xi) + (F_p + \Delta F) (\cos \gamma)^{-1} \cos(\varphi_B - \beta) = \\ = \sigma_x V_\tau \sin(\varphi_B - \beta + \gamma) - \sigma_x \kappa \Delta F \cos(\varphi_B - \beta + \gamma) \quad (5.7)$$

$$-M_y V^2 \sin(\varphi_B + \xi)/r + (\varepsilon_y + \sigma_y) V \cos(\varphi_B + \xi) - (F_p + \Delta F) (\cos \gamma)^{-1} \sin(\varphi_B - \beta) = \\ = \sigma_y V_\tau \cos(\varphi_B - \beta + \gamma) + \sigma_y \kappa \Delta F \sin(\varphi_B - \beta + \gamma)$$



Фиг. 5

При неидентичных каналах уравнения (5.7) решения не имеют. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть их при $\beta = \gamma = 0$. Допустим, что каналы идентичны, т. е. имеют место равенства (3.6) и $M_x = M_y = M$, тогда из (5.7) получим уравнения

$$\begin{aligned} MV^2/r + \Delta F [\cos(\beta + \xi) (\cos \gamma)^{-1} + \kappa \sigma \cos(\beta + \xi - \gamma)] = \\ = -\sigma V_\tau \sin(\beta + \xi - \gamma) - F_p \cos(\beta + \xi) (\cos \gamma)^{-1} \\ (\varepsilon + \sigma) V + \Delta F [\sin(\beta + \xi) (\cos \gamma)^{-1} + \kappa \sigma \sin(\beta + \xi - \gamma)] = \\ = \sigma V_\tau \cos(\beta + \xi - \gamma) - F_p \sin(\beta + \xi) (\cos \gamma)^{-1} \end{aligned} \quad (5.8)$$

При $r \rightarrow \infty$ решение уравнений (5.8) стремится к решению (3.7) уравнений (3.5).

Если $\beta = \gamma = 0$, то $\xi = 0$. Видно, что в этом случае при

$$\kappa F_p > \sigma M V_\tau^2 (\varepsilon + \sigma)^{-2} R^{-1} \quad (5.9)$$

уравнения (5.8) имеют единственное удовлетворяющее условиям (3.8) решение

$$V = V_\tau \sigma / (\varepsilon + \sigma), \quad \Delta F < 0 \quad (5.10)$$

причем $\Delta V, \Delta F \rightarrow 0$, если $\sigma \rightarrow \infty$. Если $\kappa \rightarrow \infty$, то $\Delta F \rightarrow 0$.

Условие (5.9) связано с наличием отрывающей манипулятор от предмета центробежной силы.

Допустим теперь, что углы β и γ близки к нулю, а величина V и F близки к найденным при $\beta = \gamma = 0$ значениям (5.10). Тогда, рассматривая соотношения (5.5), (5.8) как уравнения относительно скорости V_τ и силы F_p , можно однозначно определить эти величины. При этом условия (3.8) будут удовлетворены. Таким образом, перебирая значения β, γ, V, F , можно найти значения V_τ, F_p , при которых существует стационарный режим (5.6).

Если для идентичных каналов существует стационарный режим, удовлетворяющий условиям (3.8), то, благодаря непрерывной зависимости решения уравнений движения от параметров, для «мало» отличающихся каналов существует множество начальных условий, при которых движение вдоль окружности происходит в желаемом направлении без потери контакта с ней.

6. Устойчивость движения вдоль окружности. Рассматривая последние два равенства (5.6) как формулы перехода от переменных x, y к переменным r, φ_B , можно уравнения (5.3), (5.4) записать в полярных координатах. При идентичных каналах угол φ_B в этих уравнениях является циклической переменной, так же как координата ξ в уравнениях (3.2), (3.3). Уравнения в вариациях $\Delta r, \Delta \varphi_B$ относительно стационарного режима (5.6) имеют форму

$$\begin{aligned} \Delta r'' + [(\varepsilon + \sigma)/M + 2V \operatorname{tg}(\beta + \xi)/r] \Delta r' + \{c[1 + \kappa \sigma \cos \gamma \cos^{-1}(\beta + \xi) \cos(\beta + \xi - \\ - \gamma)]/M - (V/r)^2 + (\varepsilon + \sigma) V \operatorname{tg}(\beta + \xi)/(Mr)\} \Delta r - 2V \Delta \varphi_B' = 0 \\ \Delta \varphi_B'' + [(\varepsilon + \sigma)/M - 2V \operatorname{tg}(\beta + \xi)/r] \Delta \varphi_B' + 2V r^{-2} \cos^{-2}(\beta + \xi) \Delta r' + \\ + [(\varepsilon + \sigma)V/r + c \kappa \sigma \sin \gamma \cos \gamma] (Mr)^{-1} \cos^{-2}(\beta + \xi) \Delta r = 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

При выводе уравнений (6.1) удобно использовать соотношения (5.5). Устойчивость системы (6.1) рассматривается по отношению к перемен-

ным Δr , $\Delta r'$, $\Delta \varphi_v$. Выписав характеристический полином, нетрудно убедиться в том, что при $(\beta + \xi) < \pi/2$ и достаточно больших значениях σ условия Гурвица асимптотической устойчивости выполняются. При $\beta = \gamma = 0$ уравнения (6.1) упрощаются; условия Гурвица для них выполняются всегда, если только κ , $\sigma > 0$.

7. Эксперименты. В предыдущих разделах аналитически исследуется движение манипулятора вдоль прямой и окружности. Подобное аналитическое исследование движения вдоль более сложных контуров затруднительно. При этом целесообразно обратиться к экспериментальным исследованиям. Как показывают результаты экспериментов, управление (2.2), (2.3) позволяет «отслеживать» контуры предметов довольно сложной формы. В процессе движения манипулятора вдоль контура с позиционных датчиков поступают в ЭВМ координаты x , y . По ним восстанавливается контур предмета. С датчика усилий в ЭВМ поступает информация о силе F . На фиг. 5, а показан контур одного из предметов, а на фиг. 5, б — график силы F для $V_r = 1$ см/с, $F_p = 2$ Н. Точки на фиг. 5, а соответствуют точкам с теми же номерами на фиг. 5, б. Поскольку сила F не превосходит 4 Н (см. фиг. 5, б), то ошибка в определении контура из-за податливости датчика ($c = 8 \cdot 10^3$ Н/м) не превышает 0,5 мм.

Заметим, что время вычисления на ЭВМ скорости V_p составляет примерно 5 мс, тогда как электромеханическая постоянная времени двигателя порядка 100 мс.

При увеличении программного значения V_r контурной скорости возникают отрывы датчика усилий от предмета на участках с малым радиусом кривизны. Устранить их можно увеличив программное значение F_p силы прижатия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Whitney D. E. Force feedback control of manipulation fine motion // Dynamics Systems, Measur. and Control. V. 99. 1977. V. 99. Trans. ASME. Ser. G. P. 91–97.
2. Paul R., Shimano Br. Compliance and Control // Proc. Joint Automatic Control Conference West Lafayette. N. Y. ASME. 1976. P. 694–699.
3. Mason M. T. Compliance and force control for computer controlled manipulators // IEEE Trans. on Systems, Man and Cyber., 1981. V. SMC 11. № 6. P. 418–432.
4. Warnecke H. J., Abele E., Schroft R. D. Pilot Installation for Fettling of Casting with Industrial Robots Basic Equipment Strategies, Experiments and Results // Proc. 11th Symp. Industr. Robots. Tokyo: Japan Industr. Robots Associat. of 1981. P. 713–722.
5. Анищенко С. А. Определение манипулятором контура предмета // Тр. МФТИ. Сер. Радиотехника и электроника. 1978. № 13. С. 28–33.
6. Гурфинкель В. С., Можжевелов С. Б., Анищенко С. А. и др. Некоторые вопросы оцувствления роботов силовыми сенсорами // Моделирование и оптимизация сложных систем управления. М.: Наука, 1981. С. 195–204.
7. Гурфинкель В. С., Девянин Е. А., Ленский А. В. и др. Силовая обратная связь в системе управления манипулятором // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 56–64.
8. Gurfinkel V. S., Devjanin E. A., Lensky A. V. et al. Controlling a manipulator using sensory motor interaction // Robotica. 1984. V. 2. № 3. P. 155–159.
9. Современные промышленные роботы. Каталог/Под ред. Козырева Ю. Г., Шифрина Я. А. М.: Машиностроение. 1984. 150 с.
10. Чулкин М. Г., Сандлер А. С. Общий курс электропривода. М.: Энергоиздат. 1981. 576 с.
11. Цыпкин Я. З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974. 575 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.V.1986