МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1987

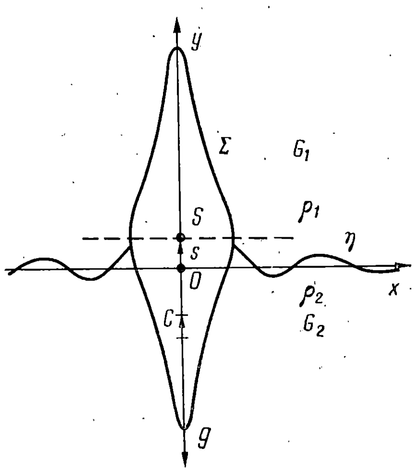
УДК 531.38

КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

АКУЛЕНКО Л. Д., НЕСТЕРОВ С. В.

Исследуется плоская задача колебаний симметричного твердого тела, помещенного на границе раздела двух тяжелых несжимаемых идеальных жидкостей. Жидкости предполагаются неограниченными, а начальные условия таковы, что допускается линеаризация уравнений гидродинамики. Методами операционного исчисления в случае слабо возмущающего жидкость поплавка – тела достаточно малой толщины – получено полное решение задачи, описывающее затухающие колебания тела и жидкости. Исследован пример колебаний тела конкретной формы. По постановке и способу решения задача примыкает к рассмотренной в [1] задаче колебаний поплавка на свободной поверхности идеальной однородной жидкости в поле сил тяжести.

1. Описание механической модели и предварительные замечания. Предполагается, что симметричное тело помещено на границе раздела двух несжимаемых идеальных жидкостей (фигура). Верхняя жидкость имеет постоянную плотность $\rho_1 \geqslant 0$, а нижняя – $\rho_2 > \rho_1$. Обе жидкости в горизонтальном и соответствующем вертикальном направлениях считаются неограниченными. Симметричное относительно ортогональных осей Ox и Oy твердое тело предполагается плоским, т. е. его боковая поверхность существенно больше торцевой, так что можно пренебречь эффектами на торцах тела (при $z=z_{1,2}$) и рассматривать плоскую задачу гидродинамики. Движения тела при этом будут только вертикальными (вдоль оси Oy). Считается, что в невозмущенном состоянии вес тела уравновешивается выталкивающей силой Архимеда, причем центр симметрии S тела находится в точке O. Последнее допущение принимается для упрощения условий обтекания тела и вывода уравнения его движения. Центр масс C тела может находиться в произвольной точке оси Oy.



Совместная постановка внешней задачи гидродинамики и задачи колебаний твердого тела заключается в следующем. Считается, что в некоторый начальный момент времени $t=t_0=0$ тело приподнято (или опущено) на некоторую малую величину $s^0>0$ (если опущено, то $s^0<0$), а поверхность раздела жидкостей горизонтальна: $y=\eta=0$. Затем тело отпускается с нулевой начальной скоростью и начинает совершать некоторые колебательные движения. Жидкости придут в движение без начальных скоростей своих частиц. Начальная потенциальная энергия тела будет расходоваться на образование волн, неограниченно расходящихся от тела (от оси Oy) в обе стороны. Требуется определить последующие движения тела с учетом возникающих волн в окружающей неоднородной жидкости (см. фигуру).

Отметим, что в приведенной выше формулировке задача о вертикальных колебаниях твердого тела на свободной поверхности однородной тяжелой жидкости впервые была поставлена и решена Л. Н. Сретенским в работе [2] (см. также [1]). Рассматриваемая плоская гидродинамическая модель используется в теории качки корабля (см., например, [3]). Следует также отметить, что интуитивное представление о приближенно экспоненциальном затухании колебаний поплавка, вообще говоря, неверно. Ниже доказывается, что уменьшение амплитуды вертикальных колебаний поплавка на поверхности раздела двух тяжелых жидкостей, обусловленное излучением волн, для достаточно больших значений времени происходит по другому закону [1]. Причина этого обусловлена широким (непрерывным и бесконечным) спектром внутренних волн и их дисперсией. Таким образом, применяемое в практических расчетах описание колебаний тел на свободной поверхности жидкости ($\rho_1=0$) линейными стационарными моделями, приводящими к постоянным частотам и коэффициентам демпфирования колебаний, может оказаться несостоятельным для достаточно больших интервалов времени. Более точным и адекватным представляется описание динамики тела интегродифференциальной задачей Коши, приводящей к ряду существенных особенностей движения по сравнению с указанным традиционным описанием.

2. Постановка задачи гидродинамики. Уравнение замкнутой достаточно гладкой поверхности твердого тела записывается в виде

$$(x,\ y)\in\Sigma\colon\ x=\pm\alpha\omega(y),\quad \omega(y)=\omega(-y),\quad -h\leqslant y\leqslant h \tag{2.1}$$

Здесь ω — достаточно гладкая функция y; α — малый числовой параметр, показывающий, что тело тонкое, т. е. вытянуто по вертикали. Поэтому возмущения жидкости в некотором смысле будут малыми, а колебания двумерного тела близкими к гармоническим. Кроме того, движение неограниченной тяжелой двухслойной жидкости, вызванное колебаниями тела, смещенного из положения гидростатического равновесия на малую высоту (глубину), также двумерно и будет происходить с малой амплитудой. Поэтому далее, как и в [1], используются линеаризованные уравнения гидродинамики для описания волновых движений обеих жидкостей.

Обозначим $\varphi_{1,2}(x,\ y,\ t)$ потенциалы скоростей соответственно для верхней и нижней жидкости в плоских областях, не занимаемых телом. Они удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\Delta\varphi_{1,2}=0,\quad (x,\ y)\in G_{1,2} \tag{2.2}$$

т. е. являются гармоническими функциями x, y в указанных областях; время $t\geqslant0$ входит как параметр. Более того, $\varphi_{1,2}\to0$ при $|y|\to\infty$ или $|x|\to\infty$, поскольку бесконечно глубокие и высокие или удаленные частицы жидкости остаются в покое.

Краевые условия на поверхности раздела жидкостей $y=\eta(x,\ t)$ записываются следующим образом:

$$\rho_1(\partial\varphi_1/\partial t-g\eta)_{y=0}=\rho_2(\partial\varphi_2/\partial t-g\eta)_{y=0} \tag{2.3}$$

$$\partial\eta/\partial t=-\partial\varphi_1/\partial y\,|_{y=0}=-\partial\varphi_2/\partial y\,|_{y=0} \tag{2.4}$$

Условие (2.3) выражает равенство давлений на границе раздела, а условие (2.4) — кинематическое. Дифференцируя равенство (2.3) по времени t и исключая производную $\partial\eta/\partial t$ при помощи (2.4), эти условия можно привести к виду

$$(\rho_2\partial^2\varphi_2/\partial t^2-\rho_1\partial^2\varphi_1/\partial t^2+g(\rho_2-\rho_1)\partial\varphi_2/\partial y)_{y=0}=0 \tag{2.5}$$

$$\partial\varphi_1/\partial y\,|_{y=0}=\partial\varphi_2/\partial y\,|_{y=0}\quad (={}^1/_2(\partial\varphi_1/\partial y+\partial\varphi_2/\partial y)_{y=0}) \tag{2.6}$$

Скорости частиц жидкостей у поверхности Σ твердого тела (2.1) удовлетворяют следующим условиям обтекания [1]:

$$-\partial\varphi_{1,2}/\partial n\,|_\Sigma=c(t)\cos\gamma,\quad y\gtrless0 \tag{2.7}$$

Здесь $c(t)$ — неизвестная скорость вертикального перемещения центра инерции C тела, γ — угол между нормалью n к поверхности тела и осью Oy. Так как $\alpha\ll1$, то $\cos\gamma\simeq\mp\alpha\omega'(y)$ для почти всех точек поверхности Σ тела, кроме малой окрестности верхней и нижней вершин тела. Поэтому приближенное условие обтекания тела (2.7) можно представить выражениями

$$\partial\varphi_{1,2}/\partial x|_{x=0}=\alpha c(t)\omega'(y), \quad h\geqslant y\geqslant 0 \vee 0\geqslant y\geqslant -h \tag{2.8}$$

Поскольку тело симметрично также относительно оси Oy, то краевые условия (2.8) записаны только для правой его стороны ($x=+0$). Волновые движения жидкостей будут симметричными относительно вертикали Oy (см. фигуру), поэтому в дальнейшем рассматриваются решения задачи для правой полуплоскости $x\geqslant 0$, $y\gtrless 0$.

Начальные условия для потенциалов скоростей $\varphi_{1,2}$, согласно сделанным предположениям, будут тривиальными:

$$\varphi_{1,2}(x, y, 0)=0, \quad \partial\varphi_{1,2}/\partial t(x, 0, 0)=0 \tag{2.9}$$

Итак, требуется найти согласно (2.2) гармонические по x, y функции $\varphi_{1,2}(x, y, t)$ в соответствующих неограниченных областях, удовлетворяющие граничным условиям (2.5), (2.6) на поверхности $y=\eta(x, t)$ раздела жидкостей (в линейном приближении $\eta\equiv 0$), граничным условиям обтекания (2.8) и начальным условиям (2.9).

3. Решение внешней задачи гидродинамики. Искомые потенциалы $\varphi_{1,2}(x, y, t)$, удовлетворяющие приведенным условиям (2.2)—(2.9), строятся, следуя [1], в виде

$$\varphi_{1,2}(x, y, t)=\pm\frac{\alpha}{2\pi}c(t)\int_0^{\pm h}\omega'(\beta)\ln\frac{x^2+(y-\beta)^2}{x^2+(y+\beta)^2}d\beta\pm\frac{\alpha}{\pi}\varphi^*_{1,2}(x, y, t),$$
$$y\gtrless 0 \tag{3.1}$$

Здесь h — «глубина погружения» тела, определенная формулами (2.1); функции $\varphi^*_{1,2}(x, y, t)$ — неизвестные потенциалы скоростей волнового движения. Первое интегральное слагаемое (3.1) стремится к нулю при $|y|\to\infty$ или $|x|\to\infty$. После подстановки выражений (3.1) в краевые условия (2.5), (2.6) с учетом условий обтекания (2.8) для $\varphi^*_{1,2}$ получаются соотношения

$$(\rho_2\,\partial^2\varphi_2^*/\partial t^2-\rho_1\,\partial^2\varphi_1/\partial t^2+g(\rho_2-\rho_1)\,\partial\varphi_2^*/\partial y)_{y=0}= \tag{3.2}$$
$$=2g(\rho_2-\rho_1)c(t)\int_0^h\omega'(\beta)\zeta(x,\beta)\,d\beta, \qquad \zeta(x,\beta)\equiv\frac{\beta}{x^2+\beta^2}=\int_0^\infty e^{-\beta k}\cos kx\,dk$$

$$\partial\varphi_1^*/\partial y|_{y=0}=\partial\varphi_2^*/\partial y|_{y=0} \quad (={}^1/_2(\partial\varphi_1^*/\partial y+\partial\varphi_2^*/\partial y)_{y=0}) \tag{3.3}$$

$$\partial\varphi_1^*/\partial x|_{x=0}=\partial\varphi_2^*/\partial x|_{x=0}=0 \tag{3.4}$$

Соотношения (3.2)—(3.4) позволяют строить искомые функции в виде следующих интегралов Фурье [1, 4]:

$$\varphi^*_{1,2}(x,y,t)=\int_0^h\omega'(\beta)\,d\beta\int_0^\infty A_{1,2}(k,t)e^{-k(\beta\pm y)}\cos kx\,dk \tag{3.5}$$

Функции $\varphi^*_{1,2}$ (3.5) удовлетворяют уравнениям Лапласа (2.2) и, кроме того, $\varphi^*_{1,2}\to 0$ (а вместе с ними и $\varphi_{1,2}\to 0$, см. (3.1)) при $|y|\to\infty$ или $|x|\to\infty$. Из первого условия (3.3) получаем связь между неизвестными функциями A_1 и A_2: $A_1(k, t)\equiv -A_2(k, t)$. Далее, из краевого условия (3.2) и начальных условий (2.9) следуют уравнение для определения $A_2(k, t)$ и тривиальные начальные условия (достаточно гладкая по предположению функция $c(t)$ считается пока заданной, k — параметр, волновое число)

$$\partial^2A_2/\partial t^2+g^*kA_2=2g^*c(t), \quad g^*=g(\rho_2-\rho_1)/(\rho_1+\rho_2)$$

$$A_2(k, 0)=\partial A_2/\partial t(k, 0)=0, \quad t\in[0, \infty) \tag{3.6}$$

Искомое решение задачи Коши (3.6) для A_2 ($A_1 \equiv -A_2$) равно

$$A_2(k,t)=2\frac{g^*}{\sqrt{g^*k}}\int_0^t c(\tau)\sin\sqrt{g^*k}(t-\tau)\,d\tau \tag{3.7}$$

Подстановка найденных согласно (3.7) выражений $A_{1,2}(k, t)$ в (3.5), а затем в (3.1) позволяет записать при заданной функции $c(t)$, $t \geqslant 0$ искомые потенциалы скоростей в следующем интегральном виде:

$$\varphi_{1,2}(x,y,t)=\frac{\alpha}{2\pi}c(t)\int_0^{\pm h}\omega'(\beta)\ln\frac{x^2+(y-\beta)^2}{x^2+(y+\beta)^2}d\beta \mp \tag{3.8}$$

$$\mp\frac{2\alpha}{\pi}g^*\int_0^h\omega'(\beta)\,d\beta\int_0^\infty e^{-k(\beta\pm y)}\cos kx\,dk\int_0^t c(\tau)\frac{\sin\sqrt{g^*k}(t-\tau)}{\sqrt{g^*k}}d\tau$$

После того как найдены потенциалы скоростей $\varphi_{1,2}(x, y, t)$ (3.8), внешнюю задачу гидродинамики можно считать решенной, поскольку при помощи этих функций однозначно определяются поля скоростей и давлений в обеих жидкостях, поверхность раздела $y=\eta(x, t)$ согласно (2.3) и другие характеристики двухслойной жидкости. Свойства гладкости потенциалов $\varphi_{1,2}(x, y, t)$ (3.8) определяются формой $\omega(y)$ (2.1) поверхности Σ тела и неизвестной пока скоростью $c(t)$ вертикального перемещения поплавка.

4. Вывод уравнения движения твердого тела (поплавка). Для определения функции $c(t)$ нужно построить уравнение движения центра масс C тела, т. е. вычислить внешние силы, действующие на тело. Условие симметрии тела относительно оси Oy приводит к равенству нулю результирующей силы X, действующей в направлении оси Ox. Сила Y, действующая со стороны колеблющейся жидкости в вертикальном направлении Oy, определяется интегрированием проекций сил давления на эту ось и равна

$$Y=-2\int_0^{h+s}p_1\cos\gamma\,dy-2\int_{-h+s}^0 p_2\cos\gamma\,dy, \qquad s^\cdot=c(t) \tag{4.1}$$

Здесь $s=s(t)$, $|s| \ll h$ – малое смещение центра масс C тела относительно гидростатического положения равновесия.

Вследствие сделанных предположений давление в каждой из жидкостей можно определить из линеаризованного выражения для интеграла Бернулли

$$p_{1,2}=\rho_{1,2}(\partial\varphi_{1,2}/\partial t-gy), \quad y \gtreqless 0 \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) в (4.1) и разлагая последнее выражение по степеням малой величины s/h, в первом (линейном) приближении после интегрирования по частям можно получить следующее представление для искомой силы Y:

$$Y=Y_A-2s(t)g(\rho_2-\rho_1)\alpha\omega(0)- \tag{4.3}$$

$$-\frac{2}{\pi}s^{\cdot\cdot}(t)(\rho_1+\rho_2)\alpha^2\int_0^h\int_0^h\omega'(\beta)\omega'(y)\ln\left|\frac{y+\beta}{y-\beta}\right|dy\,d\beta-$$

$$-\frac{4}{\pi}g^*(\rho_1+\rho_2)\alpha^2\int_0^t s^{\cdot\cdot}(\tau)\,d\tau\int_0^\infty R^2(k)\cos\sqrt{g^*k}(t-\tau)\,dk$$

$$Y_A=\frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)Vg, \qquad V=4\alpha\int_0^h\omega(y)\,dy$$

$$R(k)=-\int_0^h \omega'(y)\,e^{-ky}\,dy, \qquad k\geqslant 0$$

Здесь Y_A — постоянная величина, имеющая механический смысл выталкивающей силы Архимеда. Так как в положении гидростатического равновесия «вес твердого тела уравновешивается силой Архимеда Y_A», то уравнение вертикального движения его центра масс C (уравнение типа Ньютона) приводится к виду линейного интегродифференциального уравнения относительно неизвестной $s=s(t)$, т. е. к следующей интегродифференциальной задаче Коши:

$$s^{\cdot\cdot}+\Omega^2 s=-\frac{4\alpha}{M}g^*(\rho_1+\rho_2)\int_0^t K(t-\tau)\,s^{\cdot}(\tau)\,d\tau \tag{4.4}$$

$$s(0)=s^\circ, \qquad s^{\cdot}(0)=c(0)=0, \qquad t\in[0,\infty)$$

$$M=M_0+\frac{2\alpha}{\pi}(\rho_1+\rho_2)\int_0^h\int_0^h \omega'(\beta)\,\omega'(y)\ln\left|\frac{y+\beta}{y-\beta}\right|dy\,d\beta$$

$$\Omega^2=2g\frac{\rho_2-\rho_1}{M}\,\omega(0), \qquad K(\vartheta)=\int_0^\infty R^2(k)\cos\sqrt{g^*k}\,\vartheta\,dk$$

Здесь $|s^\circ|\ll h$ — малое начальное смещение тела относительно положения $y=0$ гидростатического равновесия, αM — эффективная масса единицы длины тела. Уравнение (4.4) получается делением на αM уравнения типа Ньютона. Величина Ω есть предельное значение частоты колебаний тела, толщина которого α стремится к нулю, т. е. условно «бесконечно тонкого» тела.

Требуется найти решение $s(t)$ интегродифференциальной задачи Коши (4.4) на достаточно большом для приложений интервале времени. После его вычисления дифференцированием по t получается искомая функция $c(t)=s^{\cdot}(t)$, определяющая согласно (3.8) потенциалы скоростей частиц обеих жидкостей, а также на основе последних поля давлений (4.2), уравнение формы поверхности $y=\eta(x,\,t)$ (2.3), разделяющей жидкости, и другие динамические и кинематические характеристики системы «твердое тело — двухслойная жидкость».

5. Аналитическое решение уравнения движения твердого тела (поплавка). Интегродифференциальная задача Коши (4.4) может быть решена аналитически при помощи методов операционного исчисления, поскольку интегральный член имеет вид свертки. Для этой цели вводится функция $s^*=s^*(p)$ — трансформанта (изображение) Лапласа [4]. Предполагается, что неизвестная функция $s(t)$, $t\geqslant 0$ удовлетворяет требованиям, налагаемым на функции-оригиналы в операционном исчислении. После решения задачи эти условия должны быть проверены. В соответствии с теоремами операционного исчисления [4] трансформанта $s^*(p)$ решения $s(t)$ задачи (4.4) имеет вид

$$s^*(p)\equiv\int_0^\infty s(t)\,e^{-pt}\,dt, \qquad \operatorname{Re}p\geqslant r_0\geqslant 0 \qquad (p=r+iq,\ i=\sqrt{-1})$$

$$s^*(p)=s^\circ p\left(1+\delta\int_0^\infty\frac{R^2(k)\,dk}{p^2+g^*k}\right)\left(p^2+\Omega^2+\delta p^2\int_0^\infty\frac{R^2(k)\,dk}{p^2+g^*k}\right)^{-1}$$

$$\delta=4\alpha g^*(\rho_1+\rho_2)M^{-1} \tag{5.1}$$

Здесь δ — размерный параметр ($[\delta]=[L]^{-1}[T]^{-2}$), стремящийся к нулю при $\alpha\downarrow 0$. Искомое аналитическое выражение для решения $s(t)$ задачи (4.4) после вычисления трансформанты $s^*(p)$ (5.1) получается при помощи формулы обращения [4]:

$$s(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}s^*(p)e^{pt}\,dp,\qquad \sigma\geqslant r_0\geqslant 0 \tag{5.2}$$

Однако выражение (5.2) для оригинала $s(t)$ не пригодно для анализа движения твердого тела и требует численных расчетов для конкретных видов функции $R(k)$ (4.3), т. е. формы $\omega(y)$ (2.1) поплавка. Далее по аналогии с задачей, рассмотренной в [1], считается, что форма тела (2.1) может быть аппроксимирована следующими выражениями $(x, y)\in\Sigma$:

$$x=\pm\alpha\omega(y),\quad \omega(y)=l\exp(-\mu|y|),\quad \mu>0,\quad y\in(-\infty,\infty) \tag{5.3}$$

Таким образом, в выражениях (4.3) полагается $h=\infty$. «Эффективная высота» h^* тела по оси Oy будет конечной и определяется коэффициентом μ $(h^*=1/\mu)$; согласно п. 4, величина $|s|\ll h^*$; максимальная толщина поплавка равна $2\alpha l\ll 1/\mu$. Проводя вычисления по формулам (4.3) с учетом выражения (5.3), получим

$$R^2(k)=\mu^2l^2(\mu+k)^{-2},\quad k\geqslant 0 \tag{5.4}$$

При помощи выражения (5.4) для ядра интегрального оператора $K(\vartheta)$, $\vartheta\geqslant 0$ согласно (4.4) находим представление в виде несобственного интеграла (аналитически не вычисляется)

$$K(\vartheta)=\mu l^2\int\limits_0^\infty\frac{\cos\sqrt{\xi}\,\vartheta}{(1+\xi)^2}\,d\xi,\qquad \vartheta=t-\tau\geqslant 0 \tag{5.5}$$

$$K(0)/\mu l^2=1,\quad K'(0)=0;\quad K(\vartheta)/\mu l^2=1+o(\vartheta),\quad \vartheta\downarrow 0$$

$$K(\vartheta)=-2\vartheta^{-2}-24\vartheta^{-4}+O(720\vartheta^{-6}),\quad \vartheta\to\infty$$

Эффективная масса единицы длины поплавка и частота колебаний согласно (4.4), (5.3), (5.4) равны

$$M=2(\rho_1+\rho_2)\mu^{-1}lI,\quad \Omega^2=\nu^2I^{-1},\quad I=1+(\alpha/2\pi)\mu l,\quad \nu^2=g^*\mu \tag{5.6}$$

Вычисление несобственного интеграла в формуле (5.1) для трансформанты Лапласа $s^*(p)$ с учетом выражения $R^2(k)$ (5.4) дает

$$\int\limits_0^\infty\frac{R^2(k)\,dk}{p^2+g^*k}=\frac{\mu l^2}{p^2-\nu^2}\left(1+\frac{\nu^2}{p^2-\nu^2}\ln\frac{\nu^2}{p^2}\right) \tag{5.7}$$

Далее в полученных выражениях (5.4)—(5.7) вводятся безразмерные величины

$$\Omega_*{}^2=\Omega^2/\nu^2=I^{-1}=1-\varepsilon_*/4\pi \tag{5.8}$$

$$\varepsilon_*=4\pi\varepsilon I^{-1},\quad \varepsilon={}^1/_2\alpha\mu l/\pi,\quad z=p/\nu$$

Здесь $0<\varepsilon_*\ll 1$ — малый числовой параметр, стремящийся к нулю при $\alpha\downarrow 0$, z — безразмерная комплексная переменная.

Трансформанта Лапласа $s^*(p)$ (5.1) для рассматриваемого частного случая формы тела (5.3) с учетом введенных выше обозначений записывается в виде трансцендентной функции z:

$$s^*(p)=s_*(z)=\frac{s^\circ}{\nu}\frac{(z^2-1)^2+\varepsilon_*(z^2-1-\ln z^2)}{(z^2+\Omega_*{}^2)(z^2-1)+\varepsilon_*z^2(z^2-1-\ln z^2)}z \tag{5.9}$$

Обращение трансформанты $s_*(z)$ (5.9) приводит к следующему выражению для оригинала $s(t)$:

$$s(t)=\frac{s^\circ}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(z^2-1)^2+\varepsilon_*(z^2-1-\ln z^2)}{(z^2+\Omega_*{}^2)(z^2-1)^2+\varepsilon_*z^2(z^2-1-\ln z^2)}ze^{\nu tz}\,dz \tag{5.10}$$

Из (5.10) следует, что искомое решение $s(t)$ интегродифференциальной задачи Коши (4.4) может быть записано в виде

$$s=s(t)=s^0 f(\theta, \varepsilon_*), \quad \theta=\nu t \geqslant 0 \tag{5.11}$$

Итак, требуется построить однопараметрическое семейство функций $f(\theta, \varepsilon_*)$, в котором $\theta \geqslant 0$ — безразмерный аргумент (время), $0<\varepsilon_* \ll 1$ — числовой параметр семейства.

Для вычисления интеграла в (5.10) путь интегрирования переносится на мнимую ось, т. е. полагается

$$z=i\varkappa, \quad \ln z=\ln|\varkappa| \pm i\pi/2, \quad \varkappa \gtrless 0 \tag{5.12}$$

После подстановки (5.12) в (5.11) получается следующее выражение для искомого оригинала $s(t)$:

$$s(t)=s^\circ f(\theta, \varepsilon_*) \equiv \frac{s^\circ}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{\pi\varepsilon_*(\varkappa^2 P+Q)}{Q^2+\pi^2\varepsilon_*^2\varkappa^4}\cos\varkappa\theta - \frac{PQ-\pi^2\varepsilon_*^2\varkappa^2}{Q^2+\pi^2\varepsilon_*^2\varkappa^4}\sin\varkappa\theta\right]\varkappa\, d\varkappa$$

$$P=P(\varkappa)\equiv(1+\varkappa^2)^2-\varepsilon_*(1+\varkappa^2+\ln\varkappa^2) \tag{5.13}$$

$$Q=Q(\varkappa)\equiv(\Omega_*^2-\varkappa^2)(1+\varkappa^2)^2+\varepsilon_*\varkappa^2(1+\varkappa^2+\ln\varkappa^2)$$

Второе подынтегральное слагаемое в (5.13) для больших $|\varkappa|\to\infty$ имеет асимптотику $\varkappa^{-1}\sin\varkappa\theta$; это требует регуляризации при приближенном интегрировании.

Интегрируя по частям в (5.13), находим, как и в [1], что для фиксированного $\varepsilon_*>0$ и асимптотически больших значений безразмерного времени $\theta\to\infty$ ($\theta=\nu t$) справедливо приближенное асимптотическое представление для оригинала $s(t)$:

$$\frac{s(t)}{s^\circ}=f(\theta,\varepsilon_*)\simeq\frac{\varepsilon_*}{\theta^2}=\frac{2\alpha}{I}\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_2-\rho_1}\frac{l}{gt^2} \tag{5.14}$$

Из формулы (5.14) следует: для больших значений $\theta\to\infty$, не зависящих от $\varepsilon_*>0$, затухание движения $s(t)$ (5.13) — решения интегродифференциальной задачи (4.4), (5.5) — происходит по закону, существенно отличному от экспоненциального. Следует также отметить, что формулы (5.13), (5.14) при $\rho_1=0$, т. е. при $g^*=g$, переходят в соответствующие выражения [1, 2] для движения поплавка в случае однородной тяжелой идеальной жидкости, имеющей свободную поверхность.

Более детальное исследование особенностей колебаний поплавка может быть проведено весьма трудоемкими расчетами плохо сходящегося несобственного интеграла (5.13), зависящего от времени $\theta\geqslant 0$ и малого числового параметра $\varepsilon_*\ll 1$. Возможно также применение численно-аналитических методов, основанных на процедуре усреднения для асимптотически малых значений числового параметра $0<\varepsilon\ll 1$ на интервале безразмерного времени $\theta\sim 1/\varepsilon$, аналогично [5, 6], или численных методов интегрирования интегродифференциальной задачи Коши (4.4), (5.5), приведенной к виду интегрального уравнения Вольтерра второго рода [7]. Эти подходы требуют вычисления ядра интегрального оператора $K(\vartheta)$ в (4.4) согласно (5.5) с высокой точностью, что требует трудоемких расчетов. Полученные результаты численно-аналитических исследований искомого решения на основе указанных подходов и детальный качественный анализ движения поплавка предполагается привести в отдельной статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука. 1977. 816 с.
2. *Сретенский Л. Н.* О затухании вертикальных колебаний центра тяжести плавающих тел // Тр. ЦАГИ. 1937. Вып. 310. С. 1–12.
3. *Хаскинд М. Д.* Гидродинамическая теория качки корабля. М.: Наука. 1973. 328 с.
4. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит. 1955. 668 с.
5. *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую неоднородную жидкость // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 27–36.
6. *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Нерезонансные колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую двухслойную жидкость // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 52–58.
7. *Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л.* Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука. 1965. 384 с.

Москва

Поступила в редакцию 17.IX.1986