МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1987

УДК 531.38

СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ ШАРНИРНОЙ СВЯЗКИ ДВУХ ТЕЛ

МОХАМЕД Э. А., СМОЛЬНИКОВ Б. А.

Рассматриваются две задачи о плоском движении составного тела, представляющего собой связку двух твердых тел, соединенных идеальным цилиндрическим шарниром. Предполагается, что ось шарнира параллельна главным осям инерции обоих тел, а их центры масс движутся в общей плоскости, перпендикулярной оси шарнира. В первой задаче составное тело не испытывает внешних воздействий и совершает свободное движение по инерции вокруг своего центра масс, аналогичное тому, какое совершает составной спутник в космическом пространстве. Дополнительно предполагается, что режим такого движения обладает устойчивостью.

Во второй задаче одно из тел прикреплено посредством дополнительного цилиндрического шарнира, параллельного первому, к неподвижному основанию, образуя шарнирный двухзвенник, имитирующий движение по инерции двухзвенного манипулятора в горизонтальной плоскости.

В обеих задачах уравнения движения и их интегралы имеют идентичную структуру, что позволяет ограничиться изучением их общей математической модели. Строится система интегралов и изучается качественный характер движения составного тела в зависимости от его собственных параметров и начальных условий. Дается классификация возможных режимов движения и строятся отвечающие им границы в пространстве параметров.

1. Исходные соотношения. Рассмотрим модель составного тела в виде шарнирной связки двух твердых тел 1 и 2, совершающих плоское движение по инерции вокруг их общего центра масс предполагаемого неподвижным (фиг. 1). Помещая в эту точку начало неподвижных осей $\xi\eta$, зададим текущее положение центров масс первого и второго тела радиусами-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ соответственно. По отношению к шарниру положения этих центров масс зададим векторами $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$, так что

$$\mathbf{r}_1-\mathbf{l}_1=\mathbf{r}_2-\mathbf{l}_2 \tag{1.1}$$

Обозначая m_1 и m_2 массы, а I_1 и I_2 — центральные моменты инерции тела, имеем

$$m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2=0 \tag{1.2}$$

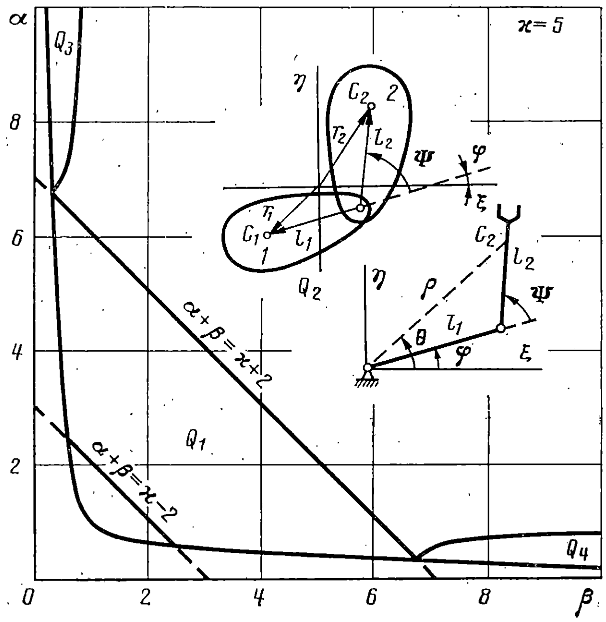
Из (1.1) и (1.2) находим

$$\mathbf{r}_1=(\mathbf{l}_1-\mathbf{l}_2)m_2/(m_1+m_2),\quad \mathbf{r}_2=(\mathbf{l}_2-\mathbf{l}_1)m_1/(m_1+m_2) \tag{1.3}$$

В качестве обобщенных координат, определяющих конфигурацию составного тела, примем угол φ, задающий абсолютную ориентацию первого тела, и угол ψ, задающий относительную ориентацию второго тела (фиг. 1). Тогда абсолютные угловые скорости тел соответственно будут $\omega_1=\varphi^\cdot$, $\omega_2=\varphi^\cdot+\psi^\cdot$, а кинетическая энергия T составного тела примет вид $2T=m_1|\mathbf{r}_1^\cdot|^2+m_2|\mathbf{r}_2^\cdot|^2+I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2$. Заменяя здесь $|\mathbf{r}_1^\cdot|$ и $|\mathbf{r}_2^\cdot|$ их выражениями, согласно (1.3), и учитывая, что $|\mathbf{l}_1^\cdot|=|\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{l}_1|=l_1\varphi^\cdot$, $|\mathbf{l}_2^\cdot|=|\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{l}_2|=l_2(\varphi^\cdot+\psi^\cdot)$, $\mathbf{l}_1^\cdot\cdot\mathbf{l}_2^\cdot=l_1l_2\varphi^\cdot(\varphi^\cdot+\psi^\cdot)\cos\psi$, получим

$$2T=\varphi^{\cdot 2}[m(l_1^2+l_2^2)+I_1+I_2+2ml_1l_2\cos\psi]+2\varphi^\cdot\psi^\cdot[I_2+m(l_2^2+l_1l_2\cos\psi)]+$$
$$+\psi^{\cdot 2}(I_2+ml_2^2),\quad m=m_1m_2/(m_1+m_2) \tag{1.4}$$

Рассматриваемое составное тело обладает двумя степенями свободы во вращательном движении, и для него существуют классические интегралы энергии $T=\text{const}$ и углового момента $L=\partial T/\partial\varphi^\cdot=\text{const}$.



Фиг. 1

Введем безразмерные параметры составного тела

$$\alpha=(I_1+ml_1^2)/(ml_1l_2),\quad \beta=(I_2+ml_2^2)/(ml_1l_2)$$

$$\varkappa=L^2/(2Tml_1l_2),\quad d\tau=[2T/(ml_1l_2)]^{1/2}dt$$

Видно, что α и β характеризуют инерционность первого и второго тел, т. е. являются собственными параметрами составного тела, тогда как $\varkappa$ зависит от начального значения углового момента L. В дальнейшем дифференцирование по безразмерному времени τ будет обозначаться штрихом. Интегралы задачи примут теперь следующий вид:

$$(\alpha+\beta+2\cos\psi)\varphi'^2+2(\beta+\cos\psi)\varphi'\psi'+\beta\psi'^2=1$$

$$(\alpha+\beta+2\cos\psi)\varphi'^2+(\beta+\cos\psi)\psi'=\sqrt{\varkappa} \tag{1.5}$$

причем требование положительной определенности T приводит к ограничениям

$$\alpha\beta>1,\quad \alpha+\beta>2 \tag{1.6}$$

из которых первое перекрывает второе.

Можно убедиться, что и для шарнирного двухзвенника, показанного на фиг. 1, интегралы энергии и момента также будут иметь вид (1.5). Действительно, если I_1 и I_2 есть моменты инерции первого и второго звеньев по отношению к первому (неподвижному) и второму (подвижному) шарниру, l_1 — длина первого звена, а l_2 — расстояние от центра масс второго звена до подвижного шарнира, то кинетическая энергия двухзвенника запишется в виде

$$2T=\varphi^{\cdot 2}(I_1+ml_1^2+I_2+2ml_1l_2\cos\psi)+2\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}(I_2+ml_1l_2\cos\psi)+\psi^{\cdot 2}I_2 \tag{1.7}$$

где m — масса второго звена. С точностью до обозначений постоянных параметров это выражение идентично соответствующему выражению (1.4) первой задачи. Поэтому далее будем для определенности рассматривать задачу о двухзвеннике, трактуя первое и второе тела как соответствующие звенья шарнирного двухзвенника.

2. Анализ движений второго звена. Разрешая систему (1.5) относительно ψ' и φ', придем к выражениям

$$\psi'=(\alpha+\beta+2\cos\psi-\varkappa)^{1/2}(\alpha\beta-\cos^2\psi)^{-1/2} \tag{2.1}$$

$$\varphi' = \{ [\varkappa(\alpha\beta-\cos^2\psi)]^{1/2} - (\beta+\cos\psi)(\alpha+\beta+2\cos\psi-\varkappa)^{1/2} \} [(\alpha+\beta+ +2\cos\psi)(\alpha\beta-\cos^2\psi)^{1/2}]^{-1} \qquad (2.2)$$

которые определяют характер движения звеньев в зависимости от соотношения параметров α, β, $\varkappa$. Из (1.6) следует, что при малых значениях $\varkappa$, когда

$$0 \leqslant \varkappa < \alpha+\beta-2 \qquad (2.3)$$

подкоренное выражение в (2.1) ни при каких ψ не меняет своего знака, т. е. движение по углу ψ является круговращательным. При этом угловая скорость ψ' достигает своего максимального значения ψ'_{max} в точке $\psi=0$, когда оба звена вытянуты вдоль одной прямой $\psi'_{max}=[(\alpha+\beta+2-\varkappa)/(\alpha\beta-1)]^{1/2}$. Минимальное значение ψ'_{min} достигается либо в точке $2\cos\psi=\varkappa-\alpha-\beta+[(\alpha+\beta-\varkappa)^2-4\alpha\beta]^{1/2}$, если выполнено условие

$$0 < \varkappa < (\alpha-1)(1-\beta) \qquad (2.4)$$

или в точке $\psi=\pm\pi$, если оно не выполнено. В случае (2.4) имеем

$$\psi'_{min} = \{\alpha+\beta-\varkappa+[(\alpha+\beta-\varkappa)^2-4\alpha\beta]^{1/2}\}/(2\alpha\beta)$$

Рассмотрим теперь характер движения второго звена при достаточно больших значениях углового момента, когда $\varkappa>4$, так что становится возможным выполнение условия

$$\alpha+\beta-2 < \varkappa < \alpha+\beta+2 \qquad (2.5)$$

В этом случае второе звено колеблется около значения $\psi=0$ с амплитудой $|\psi_*|$, определяемой выражением

$$2\cos\psi_* = \varkappa-\alpha-\beta \qquad (2.6)$$

и периодом по τ, равным

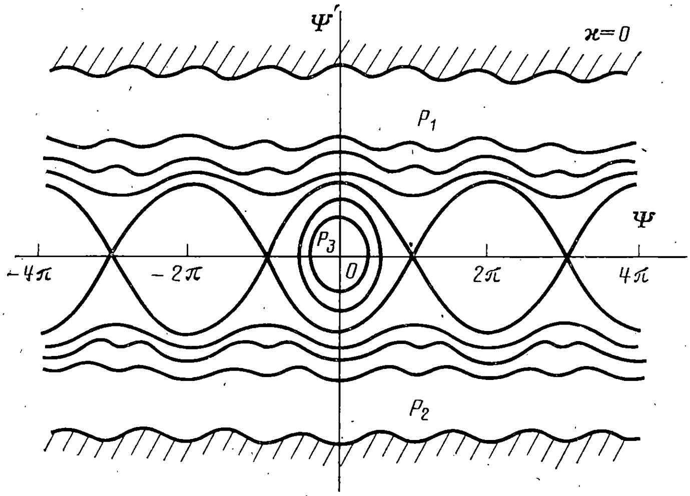
$$\tau_0 = 4\int_0^{\psi_*} [(\alpha\beta-\cos^2\psi)/(\alpha+\beta+2\cos\psi-\varkappa)]^{1/2} d\psi$$

На плоскости параметров α, β (фиг. 1) области существования рассмотренных режимов ограничиваются дугами гиперболы $\alpha\beta=1$ и прямыми $\alpha+\beta=\varkappa\pm2$. При этом колебания второго звена имеют место в полосе между этими прямыми (область Q_1), а его круговращение — в области $Q_2+Q_3+Q_4$, где подобласти Q_2 отвечает наличие двух экстремумов угловой скорости $\psi'(\psi)$ (в точках $\psi=0$ и $\psi=\pm\pi$), а подобластям Q_3 и Q_4, определяемым неравенством (2.4), — наличие четырех экстремумов $\psi'(\psi)$.

Таким образом, в зависимости от величины начального углового момента движение второго звена по отношению к первому может иметь как колебательный (либрационный), так и круговращательный (ротационный) характер аналогично движению математического маятника. Аналогия с маятником обнаруживается и в структуре траекторий на фазовой плоскости (фиг. 2), описываемых уравнением (2.1). Отличие состоит лишь в том, что ширина потока фазовых траекторий здесь ограничена предельными траекториями $\varkappa=0$, и, кроме того, если выполнено условие (2.4), зависимость $\psi'(\psi)$ имеет локальные максимумы при $\psi=\pm\pi$. Значению $\varkappa=\alpha+\beta-2$ отвечает сепаратрисса, отделяющая колебательные и круговращательные движения, а значению $\varkappa=\alpha+\beta+2$ — положение относительного покоя второго звена.

3. Анализ движения первого звена. После того как найдено движение второго звена, т. е. установлена зависимость $\psi(\tau)$, движение первого звена определяется квадратурой, вытекающей из соотношения (2.2). Ликвидируя иррациональность в числителе выражения (2.2) и обозначая $\cos\psi=u$, получаем

$$\varphi' = [\beta(\varkappa-\beta)-2\beta u-u^2]\{(\alpha\beta-u^2)\varkappa^{1/2}+ +(\beta+u)[(\alpha\beta-u^2)(\alpha+\beta+2u-\varkappa)]^{1/2}\}^{-1} \qquad (3.1)$$



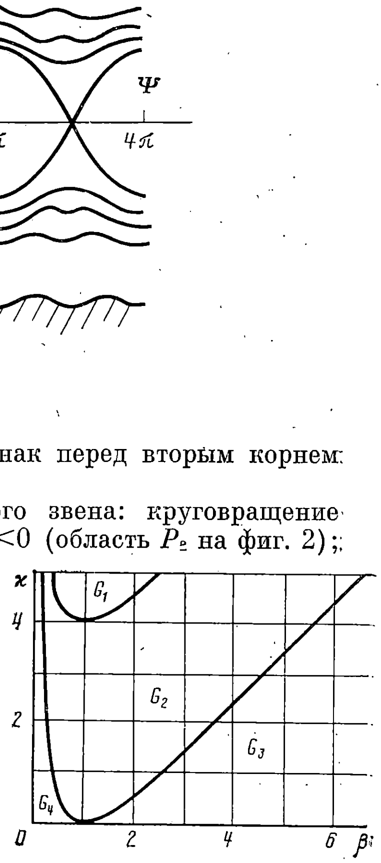
Фиг. 2

Для определенности будем считать $L \geqslant 0$. Знак перед вторым корнем знаменателя определяется, очевидно, знаком ψ'.

Будем различать три типа движения второго звена: круговращение $\psi' > 0$ (область P_1 на фиг. 2), круговращение $\psi' < 0$ (область P_2 на фиг. 2); колебания $\psi' \gtreqless 0$ (область P_3 на фиг. 2).

В случае первого типа движения знаменатель выражения (3.1) всегда положителен, так что знак φ' определяется знаком числителя, т. е. знаком полинома $f(u) = -u^2 - 2\beta u + \beta(\varkappa - \beta)$. Расположение корней u_1, u_2 этого полинома определяет качественный характер изменения угла φ. Находя корни

$$u_1 = -\beta - (\varkappa\beta)^{1/2}, \quad u_2 = -\beta + (\varkappa\beta)^{1/2} \qquad (3.2)$$



Фиг. 3

заключаем, что в этом случае, когда $-1 \leqslant u \leqslant 1$, угол φ монотонно растет ($\varphi' > 0$) при условии, что $u_2 \geqslant 1$, т. е. если $\varkappa \geqslant (\beta+1)^2/\beta$. Это условие, согласно (2.3), выполнимо только для тех двухзвенников, у которых $\beta > (\alpha - 4)^{-1}$, $\alpha > 4$.

Монотонное вращение первого звена в обратном направлении ($\varphi' < 0$) будет происходить при $u_2 \leqslant 1$, т. е. при $\beta > 1$, $\varkappa \leqslant (\beta - 1)^2/\beta$. В промежуточном диапазоне значений $(\beta-1)^2/\beta < \varkappa < (\beta+1)^2/\beta$ возникают реверсивные режимы движения первого звена, причем если в диапазон $-1 \leqslant u \leqslant 1$ попадает лишь один корень u_2, то за время одного полного оборота второго звена первое звено меняет знак своей угловой скорости дважды, если же оба корня — то четыре раза. Последнее возможно лишь при условиях $\beta < 1$, $\varkappa \leqslant (1-\beta)^2/\beta$.

Видно, что на плоскости β, $\varkappa$ (фиг. 3) условию прямого вращения отвечает область G_1, а обратному вращению — область G_3. Реверсивным режимам с двумя и четырьмя реверсами отвечают соответственно области G_2 и G_4.

Обращаясь теперь ко второму типу движения, где второе звено совершает обратное круговращение, т. е. $\psi' < 0$, запишем выражение для φ' в виде

$$\varphi' = \{\varkappa^{1/2} + (\beta + u)[(\alpha + \beta + 2u - \varkappa)/(\alpha\beta - u^2)]^{1/2}\}/(\alpha + \beta + 2u) \qquad (3.3)$$

Отсюда следует, что немонотонные режимы движения по углу φ могут возникать лишь при $\beta < 1$, когда $u_1 > -1$, что приводит к неравенствам $\beta < 1$, $\varkappa \leqslant (1-\beta)^2/\beta$. Соответствующая область, отвечающая двум реверсам скорости, есть область G_4.

Наконец, в третьем типе движения, когда $u_* \leqslant u \leqslant 1$, т. е. второе звено совершает колебательное движение, движение первого звена будет также колебательным при $u_* < u_2 < 1$ и монотонным прямовращательным ($\varphi' > 0$) при $u_2 > 1$, что возможно лишь в области G_1 (фиг. 5) $\varkappa > (\beta+1)^2/\beta$. Обратное монотонное вращение первого звена ($\varphi' < 0$) в этом случае невозможно, так как невозможно удовлетворить условию $u_2 < u_*$, означающему, согласно (2.6) и (3.2), $\varkappa > \alpha+\beta+2(\alpha\beta)^{1/2}$ и противоречащему (2.5) и (1.7).

4. Общие свойства свободного движения двухзвенника. На основании проведенного анализа можно расклассифицировать возможные типы движений звеньев для $\psi' > 0$, $\psi' < 0$, $\psi' \gtrless 0$:

$\varphi' > 0$	+	+	+
$\varphi' < 0$	+	–	–
$\varphi' \gtrless 0$	+	+	+

Здесь знаком «плюс» отмечены осуществимые режимы движений двухзвенника, а знаком «минус» — неосуществимые. Видно, что только два типа движений первого звена оказываются неосуществимыми. Это обусловлено принятым допущением $L \geqslant 0$. Следует иметь в виду, что под колебательным здесь понимается немонотонное движение, которое может иметь и монотонную составляющую. В любом из указанных типов движение рассматриваемого составного тела, как правило, условно периодично, представляя собой наложение двух периодических движений I или II рода. Геометрические свойства такого движения зависят от величины приращения $\Delta\varphi$ угла φ за время одного оборота (или одного колебания) второго звена. Это приращение может быть найдено интегрированием следующего соотношения, вытекающего из (2.1) и (2.2):

$$d\varphi/d\psi = \{[\varkappa(\alpha\beta-u^2)/(\alpha+\beta+2u-\varkappa)]^{1/2}-(\beta+u)\}/(\alpha+\beta+2u)$$

В результате приходим к интегралу

$$\Delta\varphi = \int \{(\beta+u)/[(\alpha+\beta+2u)(1-u^2)^{1/2}] - \\ -[\varkappa(\alpha\beta-u^2)/[(1-u^2)(\alpha+\beta+2u-\varkappa)]]^{1/2}\}\, du$$

пределы которого определяются, очевидно, ротационным или либрационным периодом движения второго звена. Ввиду громоздкости полученного интеграла рассмотрим подробнее частный случай $\varkappa = 0$ ($L = 0$). В этом случае получаем непосредственную связь между углами φ и ψ, а именно:

$$\varphi = \text{const} - \int [(\beta+\cos\psi)/(\alpha+\beta+2\cos\psi)]\, d\psi = \\ = \text{const} - \psi/2 + (\alpha-\beta)[(\alpha+\beta)^2-4]^{-1/2} \operatorname{arctg}\{[\alpha+\beta)^2-4]^{1/2} \operatorname{tg} {}^1/{}_2\psi/(\alpha+\beta+2)\} \tag{4.1}$$

Из (2.3) следует, что при $\varkappa = 0$ по углу ψ может быть только круговращение, которое вызывает, как следует из закона сохранения кинетического момента, обратное вращение первого звена, причем это вращение будет монотонным, если $\beta > 1$, и немонотонным, если $\beta < 1$.

Приращение $\Delta\varphi$, обусловленное полным положительным оборотом второго звена ($\Delta\psi = 2\pi$), выразится, согласно (4.1), формулой

$$\Delta\varphi = \pi\{(\alpha-\beta)[(\alpha+\beta)^2-4)^{-1/2}-1\} < 0$$

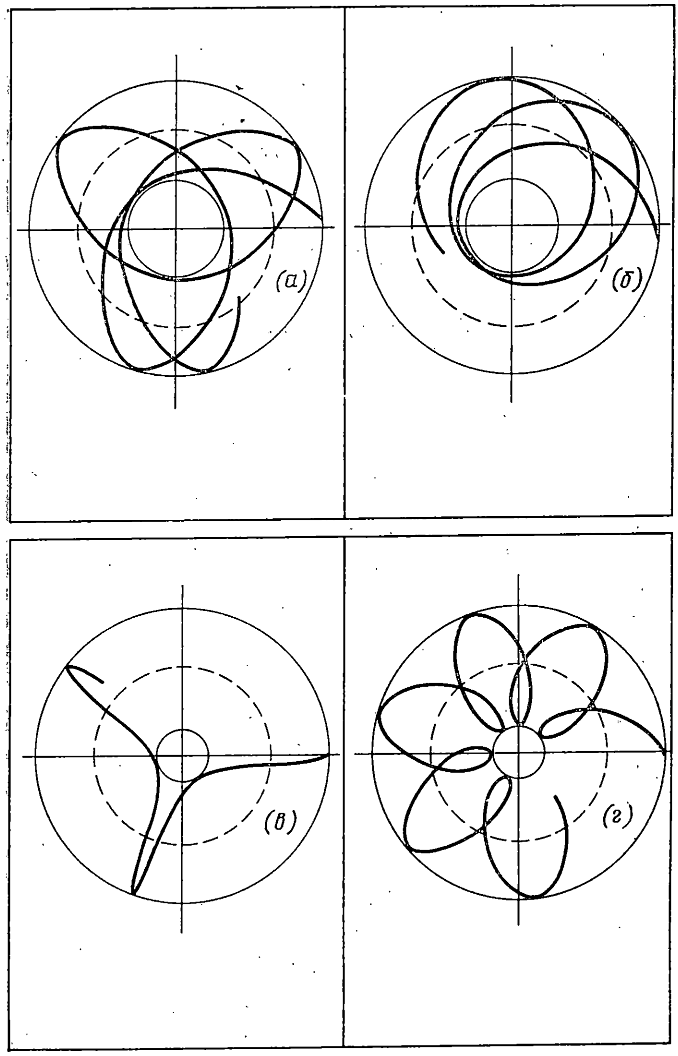
В общем случае, когда $\varkappa \neq 0$, угол φ будет содержать вековую составляющую, линейно растущую со временем, как это можно видеть из оценки, полученной путем непосредственного интегрирования второго соотношения (1.6):

$$\int_0^\varphi (\alpha+\beta+2\cos\psi)\, d\varphi + \beta\psi + \sin\psi = \tau\varkappa^{1/2} + \text{const}$$

Заменяя подынтегральное выражение его верхним значением, найдем

$$(\alpha+\beta+2)\varphi \geqslant \tau\varkappa^{1/2} - \beta\psi - \sin\psi + \text{const}$$

Общий характер траекторий, описываемых концевой точкой второго звена (например, центром или полюсом схвата), можно определить из геометрических соотношений, связывающих прямоугольные ξ, η или полярные θ, ρ координаты с шарнирными углами φ, ψ. Так, для схвата, рас-



Фиг. 4

положенного на расстоянии l от шарнира, имеем (фиг. 2):

$$\xi=l_1\cos\varphi+l\cos(\varphi+\psi),\qquad \eta=l_1\sin\varphi+l\sin(\varphi+\psi)$$

$$\rho^2=l_1^2+l^2+2l_1l\cos\psi,\qquad \rho^{\cdot}=l_1l\psi^{\cdot}\sin\psi/\rho$$

$$\theta^{\cdot}=(\xi\eta^{\cdot}-\eta\xi^{\cdot})/\rho^2=\varphi^{\cdot}+\psi^{\cdot}\varepsilon(\varepsilon+\cos\psi)/(1+2\varepsilon\cos\psi+\varepsilon^2)$$

$$\varepsilon=l/l_1$$

Переходя к дифференцированию по τ и подставляя сюда значения φ' и ψ' из (3.3) и (2.1), получим

$$\rho'=-\varepsilon\sin\psi(\alpha+\beta+2\cos\psi-\varkappa)^{1/2}[(\alpha\beta-\cos^2\psi)(1+2\varepsilon\cos\psi+\varepsilon^2)]^{-1/2}$$

$$\theta'=\varkappa^{1/2}/(\alpha+\beta+2\cos\psi)+[\varepsilon(\varepsilon+\cos\psi)/(1+2\varepsilon\cos\psi+\varepsilon^2)+$$
$$+(\beta+\cos\psi)/(\alpha+\beta+2\cos\psi)][(\alpha+\beta+2\cos\psi-\varkappa)/(\alpha\beta-\cos^2\psi)]^{1/2}$$

Пользуясь этими выражениями, можно произвести численный расчет траекторий переноса, а также выявить их качественную структуру в зависимости от параметров задачи. Некоторые результаты такого расчета представлены на фиг. 4, где показаны траектории движения концевой точки двухзвенника для следующих значений его параметров: $\alpha=2$, $\beta=4$, $\varkappa=2$, $\varepsilon=2$; $\alpha=2{,}4$, $\beta=0{,}5$, $\varkappa=0{,}4$, $\varepsilon=2$; $\alpha=2$, $\beta=4$, $\varkappa=2$, $\varepsilon=0{,}7$; $\alpha=2{,}4$, $\beta=0{,}5$, $\varkappa=0{,}4$, $\varepsilon=0{,}7$.

Видно, что характер траекторий существенно зависит от соотношения длин звеньев $\varepsilon=l/l_1$, а также от инерционности второго звена.