

УДК 531.383

О РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЯХ  
ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА  
НА ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОМ ПОДВЕСЕ

ГУРЕЦКИЙ В. В., ДОБРИНСКАЯ Т. А.

В последние годы появился целый ряд работ, посвященных динамике тела на струнном подвесе. Особенно подробно рассмотрены перманентные вращения с различным расположением точки крепления струны к телу [1-5]. В меньшей степени изучены движения, названные в [6] регулярными прецессиями.

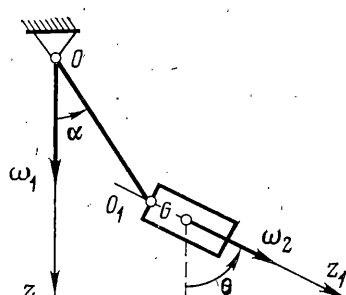
В публикуемой статье исследуется проблема существования стационарных конфигураций тела на безмассовом шарнирно-стержневом подвесе в режимах его регулярно прецессионного движения.

Показано, что заданному кинематическому состоянию такой системы может отвечать, вообще говоря, несколько стационарных конфигураций. Произведено разделение пространства кинематических параметров на области отсутствия или существования одной или нескольких стационарных конфигураций.

1. Кинетический потенциал регулярного прецессионного движения осесимметричного тела, подвешенного к неподвижной точке  $O$  с помощью невесомого, недеформируемого, шарнирного стержня, соединенного с телом в точке  $O_1$ , расположенной на оси его динамической симметрии, можно представить в виде

$$L = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \omega \cdot \Theta_G \cdot \omega + mg(l \cos \alpha + a \cos \theta) \quad (1.1)$$

где  $m$  — масса тела,  $v_G = \omega_1 \times OG$  — скорость его центра масс  $G$ ,  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ ;  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  — переносная и относительная угловые скорости тела ( $\omega_1$  — угловая скорость стержня во вращении вокруг неподвижной нисходящей вертикали  $z$ ,  $\omega_2$  — угловая скорость собственно вращения тела вокруг оси динамической симметрии тела  $z_1$ , направленной от  $O_1$  к  $G$ ),  $\Theta_G$  — тензор инерции тела в точке  $G$ ,  $a = |O_1G|$ ,  $l = |OO_1|$ ,  $\alpha$  и  $\theta$  — углы, составляемые осями  $OO_1$  и  $z$ ,  $O_1G$  и  $z$  (фиг. 1). Обозначая  $A = B$  экваториальные и  $C$  осевой моменты инерции тела, запишем выражение (1.1) в виде

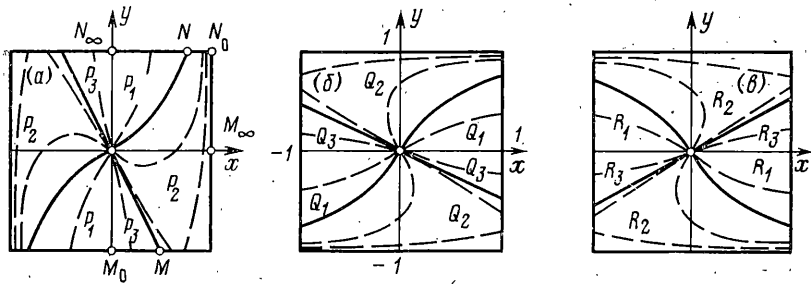


Фиг. 1

$$L = \frac{1}{2} m \omega_1^2 (l \sin \alpha + a \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} [A \omega_1^2 \sin^2 \theta + C (\omega_1 \cos \theta + \omega_2)^2] + mg(l \cos \alpha + a \cos \theta) \quad (1.2)$$

откуда видно, что  $\alpha$  и  $\theta$  играют роль позиционных координат, задающих конфигурацию прецессионного движения, а циклические скорости  $\omega_1$  и  $\omega_2$  определяют его кинематику. Уравнения движения, соответствующие позиционным координатам

$$\begin{aligned} \omega_1^2 (l \sin \alpha + a \sin \theta) \cos \alpha - g \sin \alpha &= 0 \\ \omega_1^2 [ma(l \sin \alpha + a \sin \theta) + A \sin \theta] \cos \theta - \\ - \omega_1 C (\omega_1 \cos \theta + \omega_2) \sin \theta - mga \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$



Фиг. 2

можно рассматривать как уравнения связи между позиционными и кинематическими переменными.

Вводя безразмерные переменные и параметры по формулам

$$x = \sin \alpha, \quad y = \sin \theta, \quad v_0 = g(\omega_1^2 l)^{-1} \quad (1.4)$$

$$\kappa_0 = \gamma [v_0 + C(mal)^{-1} \omega_2 \omega_1^{-1}], \quad v = v_0 \operatorname{sign}(\cos \alpha)$$

$$\kappa = \kappa_0 \operatorname{sign}(\cos \theta), \quad \mu = al^{-1}, \quad \gamma = [\mu + (A - C)(mal)^{-1}]^{-1}$$

представим уравнения (1.3) в симметричной форме

$$y = x\mu^{-1} [v(1-x^2)^{-1/2} - 1], \quad x = y\gamma^{-1} [\kappa(1-y^2)^{-1/2} - 1] \quad (1.5)$$

Отметим, что использование переменных  $v$  и  $\kappa$  позволяет рассматривать лишь арифметические значения радикалов, фигурирующих в (1.5) независимо от величин углов  $\alpha$  и  $\theta$ . С другой стороны, поскольку знаки  $\cos \alpha$  и  $\cos \theta$  отнесены согласно (1.4) к переменным  $v$  и  $\kappa$ , эти переменные, в отличие от  $v_0$  и  $\kappa_0$ , содержат информацию и о конфигурациях стационарных режимов.

Будем определять стационарные конфигурации  $(\alpha, \theta)$  системы, отвечающие ее заданному кинематическому состоянию  $(v, \kappa)$ . Геометрически эта задача эквивалентна нахождению на плоскости  $(x, y)$  всех точек пересечения кривых  $y_1 = y_1(\mu, v, x)$  и  $y_2 = y_2(\gamma, \kappa, x)$ , заданных уравнениями (1.5), при всевозможных значениях параметров  $\mu, v, \gamma$  и  $\kappa$ .

Свойства кривых  $y_1 = y_1(\mu, v, x)$  при фиксированных значениях  $\mu > 0$  подробно описаны в [1] и здесь не приводятся. Следует лишь отметить, что каждая из кривых центрально симметрична относительно начала  $(0, 0)$ ; через каждую точку  $(x, y)$  проходит единственная кривая; в зависимости от принадлежности  $v$  одному из интервалов  $0 < v < 1$ ,  $v > 1$ ,  $v < 0$  эти кривые располагаются в областях  $P_1, P_2, P_3$  (фиг. 2, а); при возрастании  $\mu$  от нуля точки  $N(\mu)$  и  $M(\mu)$  граничных кривых, разделяющих области  $P_i$ , перемещаются по периметру квадрата  $|x| \leq 1, |y| \leq 1$  из положений  $N_0, M_0$  соответственно в  $N_\infty, M_\infty$ .

При  $\gamma > 0$  кривые  $y_2 = y_2(\gamma, \kappa, x)$  получаются из  $y_1 = y_1(\mu, v, x)$  преобразованием симметрии относительно прямой  $y = x$ ; при этом области  $P_i$  переходят в  $Q_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) (фиг. 2, б).

Если  $\gamma < 0$ , то кривые  $y_2 = y_2(\gamma, \kappa, x)$  располагаются в областях  $R_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), получающихся из  $Q_i$  преобразованием симметрии относительно оси  $x$  (фиг. 2, в). Совмещая фиг. 2, а и б (или фиг. 2, в) и рассматривая частные случаи взаимного расположения  $y_1 < P_1$  и  $y_2 < Q_i \cup R_i$ , видим, что кроме точки  $(0, 0)$ , существующей при любых значениях параметров  $\mu, v, \gamma, \kappa$  и отвечающей простейшей конфигурации  $\alpha = \theta = 0$ , могут существовать и другие точки пересечения, отвечающие нетривиальным конфигурациям. Вследствие очевидной симметрии областей  $P_i, Q_i, R_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) относительно начала  $(0, 0)$  для решения задачи достаточно изучить взаимное расположение  $y_1$  и  $y_2$  в прямоугольнике

$$0 < x < 1, \quad |y| < 1 \quad (1.6)$$

Возьмем, например, кривую  $y_2(\kappa) < Q_i$  ( $\gamma > 0, \kappa > 1$ ) и проследим за возникновением точек ее пересечения с кривыми  $y_1 < P_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) при моно-

|       | $n^+$   | $n^-$ | $n^+$   | $n^-$      | $n^+$ | $n^-$      |
|-------|---------|-------|---------|------------|-------|------------|
| $Q_1$ | 0; 1    | 0     | 1       | 0          | 0     | 0          |
| $Q_2$ | 1       | 0     | 1       | 0, 1, 2, 3 | 0     | 0, 1, 2, 3 |
| $Q_3$ | 0       | 0     | 0       | 0, 1, 2, 3 | 0     | 0, 1       |
| $R_1$ | 0       | 0     | 0       | 0, 1, 2    | 0     | 0, 1       |
| $R_2$ | 0, 1, 2 | 0     | 0, 1, 2 | 0, 1, 2    | 0     | 1          |
| $R_3$ | 0, 1    | 0     | 1       | 0          | 0     | 0          |

тонном изменении  $v$  от  $+\infty$  до  $-\infty$ . При достаточно больших  $v$ , как это видно из фиг. 2, *a, б*, точек пересечения  $y_2 \subset Q_1$  с  $y_1 \subset P_1$  нет (за исключением тривиального случая пересечения в нуле, который в дальнейшем опускается); следовательно, нет и нетривиальных стационарных конфигураций. Вместе с тем видно, что при некотором  $v = v^* > 1$  произойдет касание  $y_2(x)$  и  $y_1(v^*)$  в нуле, так что при  $v < v^*$  в области (1.6) будет существовать единственная точка пересечения  $y_1(x)$  как с кривыми  $y_1(v)|_{v < v^*} \subset P_1$ , так и с кривыми  $y_2(v) \subset P_2$ , и эта точка определит единственную стационарную конфигурацию. Наконец, при  $0 > v > -\infty$  ( $y_1 \subset P_3$ ) точек пересечения  $y_1$  с  $y_2$  снова не будет. Аналогичным образом изучаются все остальные случаи, т. е. когда  $y_2(x)$  принадлежит областям  $Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3$ . Результаты иллюстрируются таблицей, где через  $n^+$  и  $n^-$  обозначено число точек пересечения, расположенных в верхней ( $y > 0$ ) и нижней ( $y < 0$ ) частях области (1.6). Первые два столбца таблицы соответствуют точкам пересечения  $y_2(x)$  с  $y_1 \subset P_1$  вторые два столбца — с  $y_1 \subset P_2$  и последние два столбца — с  $y_1 \subset P_3$ .

Вообще при варьировании какого-нибудь из параметров  $v, x$  появлению или исчезновению точек пересечения кривых  $y_1$  и  $y_2$  необходимо предшествует их касание, причем касание в нуле порождает в (1.6) ровно одну точку пересечения, а касание вне нуля — ровно две такие точки. В последнем случае варьруемый параметр проходит через бифуркационное значение. Особый случай — касание с пересечением — не приводит к возникновению или исчезновению новых точек пересечения.

Условие касания  $y_1$  и  $y_2$  в некоторой точке плоскости  $(x, y)$  требует совместного выполнения в этой точке равенств  $y_1 = y_2$  и  $(y_1)_x' = (y_2)_x'$ ; последнее, согласно (1.5), может быть записано в виде

$$[v(1-x^2)^{-3/2}-1][x(1-y^2)^{-3/2}-1] = \mu\gamma \quad (1.7)$$

При фиксированных  $\mu$  и  $\gamma$  равенства (1.5) и (1.7) задают на плоскости  $(x, v)$  бифуркационную кривую  $\Gamma$ , переходящую для частного случая касания в нуле в гиперболу  $\Gamma_0$  с уравнением  $(v-1)(x-1) = \mu\gamma$ , содержащим единственный параметр  $c = \mu\gamma$ . Оставляя неизменным значение  $c$  и варьруя  $\mu$ , получим однопараметрическое семейство бифуркационных кривых  $\Gamma = \Gamma(\mu)$ , с помощью которого можно проследить эволюцию областей существования стационарных режимов с тем или иным числом стационарных конфигураций относительно фиксированной кривой  $\Gamma_0$ .

2. Перейдем к исследованию бифуркационных кривых. Подставляя в (1.7) значения  $x$  и  $v$ , найденные из (1.5), и вводя новую переменную  $t = yx^{-1}$ , получим

$$x^2 = -(\mu t^4 + ct^3 + ct + c\mu^{-1})(1-c)^{-1}t^{-3} \quad (2.1)$$

$$y^2 = -(\mu t^4 + ct^3 + ct + c\mu^{-1})(1-c)^{-1}t^{-1}$$

Подставляя (2.1) в (1.5), найдем параметрические уравнения бифуркационных кривых

$$v = (1 + \mu t) \{ (c + \mu t^3) (1 + \mu t) / [(1 - c) \mu t^3] \}^{1/2} \quad (2.2)$$

$$\kappa = (1 + c/\mu t) \{ (c + \mu t) (1 + \mu t^3) / [(1 - c) \mu t] \}^{1/2}$$

Уравнения (2.2) имеют смысл при  $0 < x^2 < 1$ ,  $0 < y^2 < 1$ , что свидетельствует о наличии предельных точек бифуркационных кривых. В частности, предельные точки  $K_1$  и  $K_2$ , соответствующие условию  $x^2 \rightarrow 1$ , лежат на оси  $\kappa$ , отвечают значениям  $t_1 = -c^{1/3} \mu^{-1/3}$  и  $t_2 = -\mu^{-1}$  параметра  $t$  и имеют абсциссы  $\kappa_1 = [1 - c^{2/3} \mu^{-2/3}]^{1/2}$ ,  $|c\mu^{-1}| < 1$ ,  $\kappa_2 = (1 - c) (1 - \mu^{-2})^{1/2}$ ,  $\mu > 1$ .

Предельные точки  $H_1$  и  $H_2$ , соответствующие условию  $y^2 \rightarrow 1$ , лежат на оси  $v$ , отвечают значениям  $t'_1 = -c\mu^{-1}$ ,  $t'_2 = -\mu^{-1/3}$  параметра  $t$  и имеют ординаты

$$v_1 = (1 - c) [1 - c^{-2} \mu^2]^{1/2}, \quad |c\mu^{-1}| > 1$$

$$v_2 = (1 - \mu^{2/3})^{1/2}, \quad \mu < 1$$

Координаты предельных точек  $D$  соответствуют одновременному обращению в нуль  $x$  и  $y$  и удовлетворяют, согласно (2.2), равенствам

$$v = 1 + \mu t, \quad \kappa = 1 + c(\mu t)^{-1} \quad (2.3)$$

представляющим параметрические уравнения гиперболы  $\Gamma_0$ . Вместе с тем при  $x = y = 0$ , как это видно из (2.1), выполняется равенство  $\mu t^4 + ct^3 + ct + c\mu^{-1} = 0$ , которое можно представить в виде

$$\mu t^4 [1 + c(\mu t)^{-1}] + c\mu^{-1} (1 + \mu t) = 0 \quad (2.4)$$

Из (2.3) и (2.4) найдем значение  $t = [-vc(\kappa\mu)^{-1}]^{1/4}$ , отвечающее точке  $D$ , откуда следует, что  $D$  существует и принадлежит гиперболе  $\Gamma_0$ , если

$$vc\kappa^{-1} < 0 \quad (2.5)$$

Составим выражение для производной  $dv/d\kappa$  в точках бифуркационной кривой. Согласно (2.2), имеем

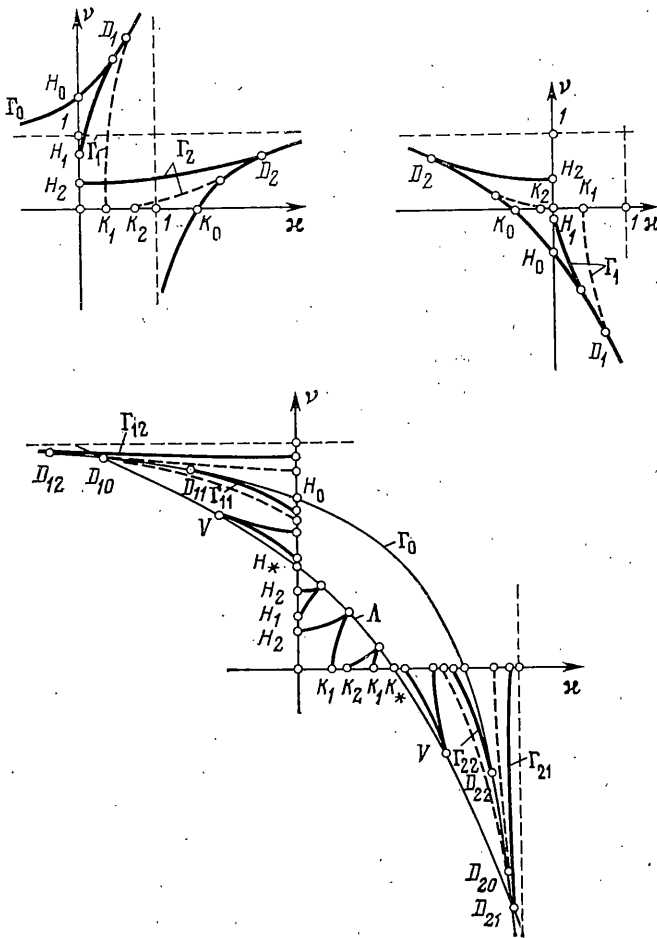
$$dv/d\kappa = \mu \{ (1 + \mu t) (1 + \mu t^3) / [(c + \mu t) (c + \mu t^3)] \}^{1/2} \text{sign} [ (1 + \mu t) (1 + c/\mu t) ] \quad (2.6)$$

С помощью (2.6) можно проверить, что в точках  $K_2$  и  $H_1$  бифуркационная кривая касается осей  $\kappa$  и  $v$ , в точках  $K_1$  и  $H_2$  ортогональна этим осям, а в точке  $D$  касательна к  $\Gamma_0$ . Из (2.6) видно также, что в промежутке между граничными точками бифуркационная кривая монотонна.

При построении семейства бифуркационных кривых рассмотрим отдельно три случая:  $c < 0$ ,  $c > 1$  и  $0 < c < 1$ .

В случае  $c < 0$  соотношение (2.5) выполняется лишь для тех отрезков гиперболы  $\Gamma_0$ , которые находятся в области  $v > 0$ ,  $\kappa > 0$ ; поэтому кривые  $\Gamma(\mu)$  имеют предельные точки  $D$  только на этих отрезках  $\Gamma_0$ . Каждому значению  $\mu$  отвечают две точки  $D_1$  и  $D_2$  и соответственно две ветви  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  бифуркационной кривой, причем  $\Gamma_1$  ограничена  $D_1$  и  $H_1$  (или  $D_1$  и  $K_1$ ), а  $\Gamma_2$  ограничена  $D_2$  и  $K_2$  (или  $D_2$  и  $H_2$ ) (фиг. 3, а). При  $\mu \rightarrow 0$  точки  $D_1$  и  $H_1$  неограниченно приближаются к точке  $H_0$  пересечения  $\Gamma_0$  с осью  $v$  и  $\Gamma_1$  вырождается в точку, в то время как  $\Gamma_2$  неограниченно приближается к полупрямой  $\kappa > 0$ ,  $v = 1$ . При  $\mu = 1$  ветвь  $\Gamma_1$ , а при  $\mu = c$  ветвь  $\Gamma_2$  проходят через точку  $0$ . При  $\mu \rightarrow \infty$  точки  $D_2$  и  $K_2$  неограниченно приближаются к точке  $K_0$  пересечения  $\Gamma_0$  с осью  $\kappa$ , так что  $\Gamma_2$  вырождается в точку, а  $\Gamma_1$  неограниченно приближается к полупрямой  $\kappa = 1$ ,  $v > 0$ . На фиг. 3, а сплошными линиями показаны ветви  $\Gamma_1$  при  $\mu < c$  и  $\Gamma_2$  при  $\mu < 1$ , штриховыми —  $\Gamma_1$  для  $\mu > c$  и  $\Gamma_2$  для  $\mu > 1$ . Аналогичным образом изучается случай  $c > 1$  (фиг. 3, б).

Наиболее интересным является случай  $0 < c < 1$ . Его характерная особенность состоит в том, что в области  $0 < \kappa < 1$ ,  $0 < v < 1$ , где условие (2.5) не выполняется, каждая бифуркационная кривая  $\Gamma(\mu)$  имеет угловую точку, соответствующую одновременному обращению в нуль производных  $dv/dt$  и  $d\kappa/dt$ . В силу (2.2) обе эти производные пропорциональны  $\mu t^4 - c\mu^{-1}$ .



Фиг. 3

откуда определяется значение параметра  $t$ , отвечающее угловой точке  $V$ :

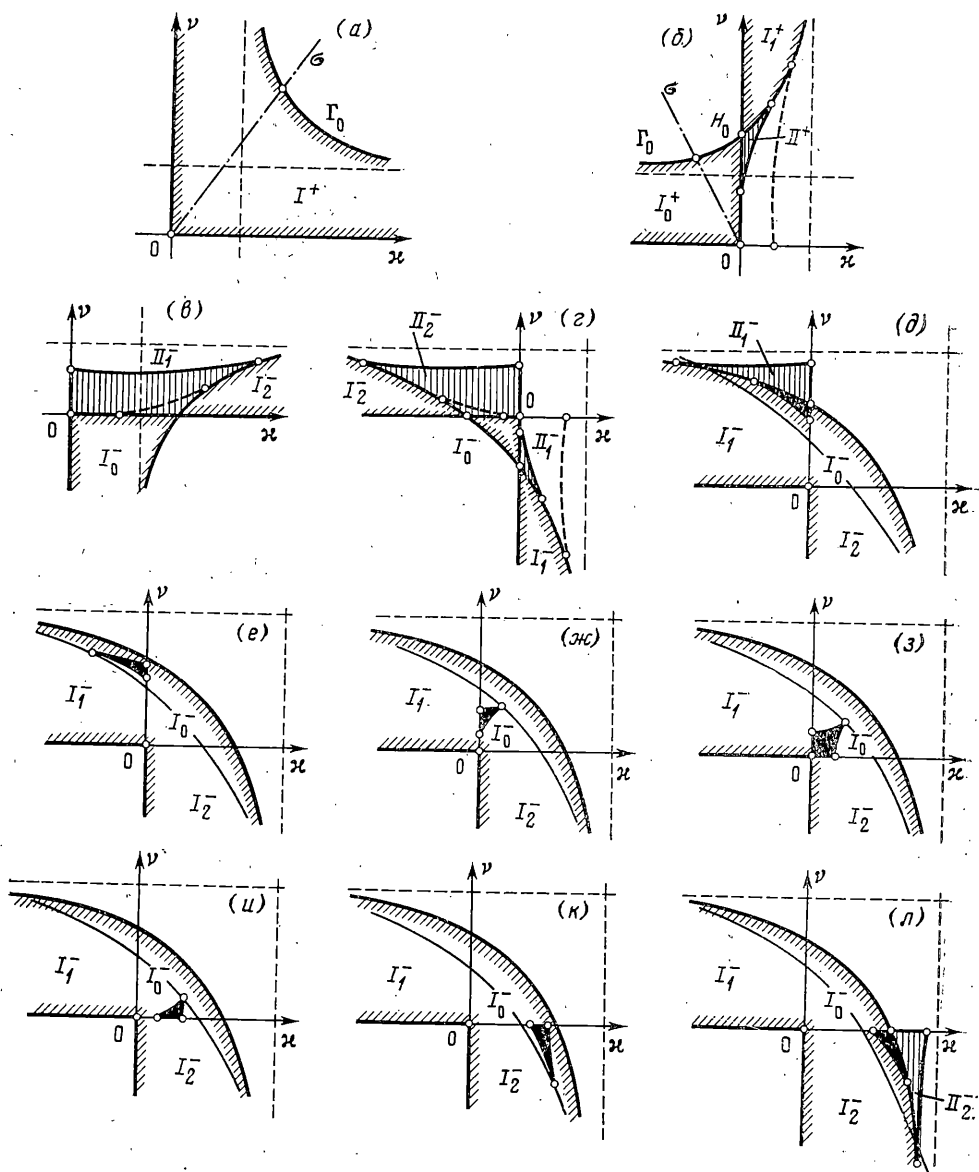
$$t = (c\mu^{-2})^{1/4} \quad (2.7)$$

Можно показать, что  $V$  соответствует касанию  $y_1$  и  $y_2$  с пересечением. Подстановка (2.7) в (2.2) и последующее исключение из формул для координат точки  $V$  параметра  $\mu$  дает уравнение кривой  $\Lambda$  — огибающей угловых точек бифуркационной кривой

$$[1 - |\nu|^{1/2}(1-c)^{1/4} \operatorname{sign} \nu][1 - |\kappa|^{1/2}(1-c)^{1/4} \operatorname{sign} \kappa] = c \quad (2.8)$$

Огибающая  $\Lambda$  обращена выпуклостью в ту же сторону, что и  $\Gamma_0$ , однако имеет по сравнению с ней меньшую кривизну. Кривая  $\Lambda$  пересекает оси  $x$  и  $y$  в точках  $K_*$  и  $H_*$  с координатами  $(\kappa_*, 0)$  и  $(0, \nu_*)$ , где  $\kappa_* = \nu_* = (1-c)^{3/2}$ , и нижнюю ветвь  $\Gamma_0$  в точках  $D_{10}$  и  $D_{20}$  с координатами  $[-(1-c)^{1/2}, (1-c)^{1/2}]$  и  $[(1-c)^{1/2}, -(1-c)^{1/2}]$ .

В интервале  $0 < \mu < \mu_1$ , где  $\mu_1 = c^{-1/2}[1 - (1-c)^{1/2}]^2$ , бифуркационная кривая состоит из двух ветвей  $\Gamma_{11}$  и  $\Gamma_{12}$  (фиг. 3, в). При  $\mu \rightarrow 0$  ветвь  $\Gamma_{11}$  вырождается в точку  $H_0$ , а  $\Gamma_{12}$  неограниченно приближается к полупрямой  $x < 0, y = 1$ . При  $\mu \rightarrow \mu_1$  граничные точки этих ветвей, расположенные на  $\Gamma_0$ , стремятся к  $D_{10}$  и при  $\mu = \mu_1$  совпадают с ней, образуя угловую точку  $D_{10}$ ; соответствующая кривая  $\Gamma(\mu_1)$  показана на фиг. 3, в штрихами. При дальнейшем возрастании  $\mu$  точка  $V$  приближается к оси  $y$  и совпадает с  $H_*$  при  $\mu = c^{3/2}$ ; при этом бифуркационная кривая вырождается в точку  $H_*$ , так как  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_* = (1-c)^{3/2}$  при  $\mu = c^{3/2}$ . Далее  $\Gamma(\mu)$  последовательно принимает форму  $H_2 V H_1$ , затем  $H_2 V K_1$  и  $K_2 V K_1$ . При  $\mu = c^{-1/2}$ , когда  $\kappa_1 = \kappa_2 = -\kappa_* = -(1-c)^{3/2}$ , она вырождается в точку  $K_*$ . При возрастании  $\mu$  от  $\mu = c^{-1/2}$



Фиг. 4

до  $\mu = \mu_2 = c\mu_1^{-1}$  кривая  $\Gamma(\mu)$  принимает вид  $K_2VK_1$  с точкой  $V$ , расположенной на отрезке  $K_*D_{20}$ ; кривая  $\Gamma(\mu_2)$  показана на фиг. 3,  $\sigma$  штрихами. Наконец, при  $\mu > \mu_2$  происходит раздвоение точки  $D_{20}$  на  $D_{22}$  и  $D_{21}$ , так что  $\Gamma(\mu)$  оказывается состоящей из двух ветвей  $\Gamma_{22}$  и  $\Gamma_{21}$ . При  $\mu \rightarrow \infty$  первая из них вырождается в точку  $K_0$ , а вторая — в полупрямую  $x=1, v < 0$ .

3. Результаты исследования вида бифуркационных кривых и данные таблицы позволяют разбить плоскость  $(x, v)$  на области с тем или иным числом стационарных конфигураций.

Начнем с построения областей, где реализуются конфигурации типа  $n^+$  при  $\gamma > 0$ . Как видно из таблицы, в ситуации  $P_1Q_1$  (т.е. при  $y_1 < P_1, y_2 < Q_1$ ) может существовать, а в ситуациях  $P_2Q_1, P_1Q_2, P_2Q_2$ , наверное, существует ровно одна точка пересечения  $y_1$  с  $y_2$  рассматриваемого типа. Область  $I^+$  существования соответствующей стационарной конфигурации заключена между верхней частью гиперболы  $\Gamma_0$  и полуосями  $v > 0, x > 0$  и показана на фиг. 4,  $a$  косой штриховкой границ  $I^+$ , направленной внутрь этой области.

Существование конфигураций типа  $n^+$  возможно и при условии  $\gamma < 0$ , т.е.  $c < 0$  в ситуациях  $P_1R_1, P_2R_2, P_1R_3$  и  $P_2R_3$ . В частности, при  $P_1R_3$  воз-

можно (при достаточно малых  $\nu > 0$ ), а при  $P_2R_3$  необходимо существование единственной точки пересечения кривых  $y_1$  и  $y_2$ . Соответствующая область  $I_0^+$  ограничена верхней ветвью  $\Gamma_0$ , отрезком  $OH_0$  и полуосью  $\kappa < 0$  и также показана на фиг. 4, б кривой штриховкой границ. В случае  $P_1R_2$  при достаточно больших  $\nu > 0$  существует ровно одна точка пересечения  $y_1$  с  $y_2$  и ей соответствует область  $I_1^+$ , ограниченная верхней ветвью  $\Gamma_0$  и полуосью  $\nu > 1 - c$  (фиг. 4, б). При  $P_2R_2$  и достаточно малых  $\kappa > 0$  точек пересечения  $y_1$  с  $y_2$  ровно две; соответствующая им область  $\Pi^+$  существования двух стационарных конфигураций имеет при  $0 < \mu < 1$  вид криволинейного треугольника  $H_1H_0D_1$ , отмеченного на фиг. 4, б вертикальной штриховкой. При  $\mu > 1$  криволинейная часть границы  $\Pi^+$  имеет предельной точкой  $K_1$ , так что  $\Pi^+$  принимает форму криволинейного четырехугольника. Вне областей  $I^+$ ,  $\Pi^+$  режимы типа  $n^+$  невозможны.

Аналогичным образом производится построение областей  $I^-$ ,  $\Pi^-$ ,  $\Pi^+$  существования одной, двух и трех стационарных конфигураций типа  $n^-$ . Результаты построения представлены на фиг. 4, в-л. Кривой штриховкой границ отмечены области  $I^-$ , вертикальной штриховкой — области  $\Pi^-$ , зачернены области  $\Pi^+$ . Вне отмеченных областей стационарные режимы рассматриваемого типа невозможны.

4. Перейдем к идентификации областей существования стационарных конфигураций относительно реализующихся в них режимов регулярно прецессионного движения. Поскольку вид этих областей существенно зависит от значений параметра  $c$ , рассмотрим отдельно случаи  $c < 0$ ,  $0 < c < 1$  и  $c > 1$ . Согласно (1.4), имеем  $c = \mu\gamma = [1 + (A - C)(ma^2)^{-1}]^{-1}$ . Условию  $c < 0$  соответствует неравенство  $C > A + ma^2$ , выполняющееся для тела сплюснутой вдоль оси  $z_1$  формы, например тонкого диска. При  $0 < c < 1$ , когда  $C < A$ , тело, наоборот, вытянуто вдоль оси  $z_1$ , как в случае длинного цилиндра. При  $c > 1$ , когда  $A < C < A + ma^2$ , имеет место промежуточный случай «толстого» диска.

Рассмотрим произвольную стационарную конфигурацию, задаваемую значениями углов  $\alpha$  и  $\theta$  из промежутка  $(0, \pi)$ ,  $(-\pi, \pi)$ . Вычисляя  $\sin \alpha = x$ ,  $\sin \theta = y$ , определим положение точки  $(x, y)$  в области (1.6), т. е. тип ( $n^+$  или  $n^-$ ) рассматриваемой конфигурации. Затем по знакам  $\cos \alpha$  и  $\cos \theta$  установим соответствие между  $\nu$  и  $\nu_0$ ,  $\kappa$  и  $\kappa_0$ . В случае  $\nu = \nu_0$ ,  $\kappa = \kappa_0$  картина областей существования постоянного числа стационарных конфигураций имеет вид, представленный на фиг. 4, а-л. Для получения такой же картины в случае  $\nu = \nu_0$ ,  $\kappa = -\kappa_0$  достаточно изменить на фиг. 4, а-л направление оси  $\kappa$  на противоположное; при  $\nu = -\nu_0$ ,  $\kappa = \kappa_0$  изменяется направление оси  $\nu$ , а при  $\nu = -\nu_0$ ,  $\kappa = -\kappa_0$  — направление обеих осей.

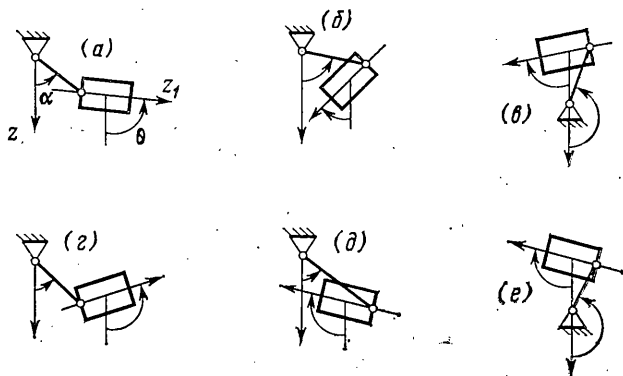
Описанная процедура позволяет установить, независимо от формы тела, соответствие между всеми возможными конфигурациями, характеризующимися принадлежностью углов  $\alpha$  и  $\theta$  интервалам  $(0, \pi)$ ,  $(-\pi, \pi)$  (фиг. 5) и областями их существования на плоскости параметров  $(\kappa, \nu)$ .

Связь между формой тела и типом режима его регулярной прецессии определяется знаком произведения  $c\kappa_0$ . Действительно, условию  $c\kappa_0 < 0$  отвечает, согласно (1.4), неравенство  $\omega_1\omega_2 < -mgaC^{-1}$ , соответствующее режиму «быстрой» обратной прецессии. При  $c\kappa_0 > 0$  последнее неравенство меняет смысл на противоположный, определяя режим «медленной» обратной прецессии  $-mgaC^{-1} < \omega_1\omega_2 < 0$  или режим прямой прецессии  $\omega_1\omega_2 > 0$ .

Рассмотрим последовательно все конфигурации, изображенные на фиг. 5.

Конфигурация, представленная на фиг. 5, а ( $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $0 < \theta < \pi/2$ ), относится к типу  $n^+$ , причем  $\nu = \nu_0$ ,  $\kappa = \kappa_0$ . При  $c > 0$  она реализуется в области  $I^+$  (фиг. 4, а) в режиме медленной обратной или прямой прецессии; при  $c < 0$  — в областях  $\Pi^+$ ,  $I_1^+$  в режиме быстрой обратной прецессии и в области  $I_0^+$  в режимах медленной обратной или прямой прецессии (фиг. 4, б).

Конфигурация, представленная на фиг. 5, б ( $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $-\pi/2 < \theta < 0$ ), относится к типу  $n^-$  и  $\nu = \nu_0$ ,  $\kappa = \kappa_0$ . Здесь возможны режимы прямой или



Фиг. 5

медленной обратной прецессии при  $0 < c < 1$  в областях  $I_0^-$  (фиг. 4,  $\delta-l$ ) или  $III^-$  (фиг. 4,  $\kappa-u$ ) и режимы быстрой обратной прецессии при  $c > 1$  в областях  $I_2^-$ ,  $II_2^-$  (фиг. 4,  $z$ ), при  $0 < c < 1$  в областях  $I_1^-$  (фиг. 4,  $\delta-l$ ),  $II_1^-$  (фиг. 4,  $\delta$ ),  $III^-$  (фиг. 4,  $\delta, e$ ) и при  $c < 0$  в областях  $II_1^-$ ,  $I_2^-$  (фиг. 4,  $e$ ).

Конфигурация, представленная на фиг. 5,  $e$  ( $\pi/2 < \alpha < \pi$ ,  $-\pi/2 < \theta < 0$ ), относится к типу  $n^-$  и  $v = -v_0$ ,  $\kappa = \kappa_0$ . Эта конфигурация реализуется в режиме быстрой обратной прецессии при  $c > 1$  в области  $I_0$  (фиг. 4,  $z$ ) и при  $c < 0$  в области  $I_0^-$  (фиг. 4,  $e$ ). Режим медленной обратной или прямой прецессии имеет место при  $c > 1$  в областях  $I_1^-$ ,  $II_1^-$  (фиг. 4,  $z$ ) и при  $0 < c < 1$  в областях  $I_2^-$  (фиг. 4,  $\delta-l$ ),  $II_2^-$  (фиг. 4,  $l$ ),  $III^-$  (фиг. 4,  $\kappa, l$ ).

Конфигурации, представленные на фиг. 5,  $z$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $\pi/2 < \theta < \pi$ ), фиг. 5,  $\delta$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $-\pi < \theta < -\pi/2$ ) и фиг. 5,  $e$  ( $\pi/2 < \alpha < \pi$ ,  $-\pi < \theta < -\pi/2$ ), реализуются в тех же областях, что и конфигурации, представленные на фиг. 5,  $a, б, в$  соответственно. Различие состоит в том, что там, где для конфигураций на фиг. 5,  $a, б, в$  выполняются режимы быстрой обратной прецессии, для конфигураций на фиг. 5,  $z, \delta, e$  реализуются режимы медленной обратной или прямой прецессии и наоборот.

Отметим, что режимы с конфигурациями типа  $\pi/2 < \alpha < \pi$ ,  $\pi/2 < \theta < \pi$  и  $\pi/2 < \alpha < \pi$ ,  $0 < \theta < \pi/2$  не реализуются, так как они относятся к типу  $n^+$  и для них должно быть  $v = -v_0$ ; в то время как областей существования стационарных режимов, расположенных в полуплоскости  $v < 0$ , в этом случае (фиг. 4,  $a, б$ ) не существует.

5. Кратко рассмотрим вопрос о стационарных конфигурациях, соответствующих перманентным вращениям, т. е. случаю  $\omega_2 = 0$ . Учитывая, что при этом, согласно (1.4),  $\kappa_0 = c\mu^{-1}v_0$ , рассмотрим на плоскости  $(\kappa, v)$  прямую

$$v = \mu c^{-1} \kappa \quad (5.1)$$

проходящую через начало координат и пересекающую те или иные из областей  $I^+$ ,  $I^-$ ,  $II^+$ ,  $II^-$ ,  $III^-$ . Искомые конфигурации отвечают, очевидно, точки тех только отрезков прямой (5.1), которые находятся в областях существования стационарных конфигураций для режимов медленной обратной или прямой прецессии.

В качестве примера исследуем перманентные вращения с конфигурацией, представленной на фиг. 5,  $a$ . Для этого случая  $\kappa = \kappa_0$ ,  $v = v_0$ , и так как искомый режим относится к типу  $n^+$ , то будут рассматриваться пересечения прямой (5.1) только с областями  $I^+$  и  $II^+$  и только для случаев  $c\kappa_0 > 0$  (поскольку  $v_0 > 0$ ).

Если тело относится к типу цилиндра или толстого диска ( $c > 0$ ), прямая (5.1) превращается в луч  $\sigma$ , проходящий через первый квадрант плоскости  $(\kappa, v)$  и пересекающий область  $I^+$  (фиг. 4,  $a$ ).

Если же тело имеет форму тонкого диска ( $c < 0$ ), то соотношение (5.1) описывает луч, расположенный во втором квадранте и пересекающий область  $I_0^+$  (фиг. 4,  $b$ ). Граничные значения параметра  $v$ , определяющего угловую скорость перманентных вращений, соответствуют точкам пересечения прямой (5.1) с гиперболой  $G_0$  и совпадают с соответствующими значениями, полученными в [4].

Аналогичным образом исследуются конфигурации других типов. Отметим в заключение, что существование прецессионного движения заданной конфигурации не влечет за собой необходимость существования перманентных вращений аналогичного типа; так, например, не существует перманентных вращений тонкого диска для конфигурации, представленной на фиг. 5,  $b$ , в то время как прецессионные движения происходят в этом случае в режиме быстрой обратной прецессии.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е. О движении осесимметричного твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 6. С. 3-16.
2. Ишлинский А. Ю., Малашенко С. В., Стороженко В. А. и др. Метод балансировки вращающихся тел на струнном приводе // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 5. С.3-18.
3. Румянцев В. В. К динамике твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 5-15.
4. Нозадзе Г. Т. Об устойчивости и бифуркации положений относительного равновесия тяжелого твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 22-29.
5. Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е. О некоторых плоскопараллельных движениях твердого тела // Проблемы аналитической механики и управления движением. М.: ВЦ АН СССР. 1985. С. 67-75.
6. Рубановский В. Н., Румянцев В. В. О стационарных движениях тяжелого симметричного твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 3-7.

Ленинград

Поступила в редакцию  
5.V.1986