

УДК 539.3

МЕСТНАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ
СЛОИСТЫХ СТРУКТУР ПРИ СЖАТИИ

ЛОГТЕВА И. В., ФЕОДОСЬЕВ В. И.

Слоистые и волокнистые материалы имеют сопротивляемость на сжатие, как правило, меньшую, нежели на растяжение. Характер разрушения стандартного образца достаточно специфичен и свидетельствует о том, что разрушению при сжатии предшествует местная потеря устойчивости. Наглядным тому примером является разрушение деревянного образца (фиг. 1). Легко заметить, что слои древесины получают однотипный местный изгиб, а форма упругой линии, оставаясь одинаковой для всех слоев, смещена по фазе, в результате чего образуется наклонная волна «сброса» и образец теряет несущую способность. Такая картина в чистом виде проявляется, конечно, не всегда: сказывается влияние нерегулярности слоев и структурных несовершенств, но в основном указанную картину разрушения при сжатии можно принять как модель. Описанное явление уже нашло свое отражение в научно-популярной литературе [1], а его детальное изучение началось относительно недавно [2, 3] и было вызвано широким применением композиционных материалов.

Естественно, что потеря устойчивости одного слоя или одной нити в массиве связующего не может рассматриваться изолированно. Необходимо учитывать взаимодействие с соседними нитями или слоями и рассматривать переход к некоторой новой близкой форме равновесия структурного силового каркаса как единого целого. Тем самым может быть решена своеобразная задача: расчетным путем определен предел прочности при сжатии через упругие константы и геометрические соотношения компонентов, образующих композит.

В публикуемой работе рассматривается частная (и простейшая) задача такого рода для слоистого материала, подобного древесине.

Представим, что сжимаемый силой P вдоль слоев образец имеет в плане прямоугольную форму и состоит из достаточно большого числа n чередующихся слоев с заметно отличающимися модулями упругости E_1 и E_2 и с толщинами t_1 и t_2 , так что толщина образца $t = n(t_1 + t_2)$. Индекс 1 соответствует относительно тонкостенному и высокомодульному слою, а 2 — более толстому и более податливому. Пусть H — высота образца, b — его ширина. Оси координат x, y, z направлены по направлению ребер образца, ориентированных вдоль высоты, толщины и ширины образца соответственно. Задачу устойчивости будем решать энергетическим методом.

При сжатии образца основную нагрузку воспринимают жесткие слои, а промежуточные (податливые) — играют роль связующего и деформируются вследствие искривления расположенных слева и справа более жестких слоев.

Запишем выражение удельной потенциальной энергии промежуточного слоя, предполагая напряженное состояние двухосным

$$U_{02} = 1/2 E_2 [\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\mu_2 \epsilon_x \epsilon_y + 1/2 (1 - \mu_2) \gamma_{xy}^2] / (1 - \mu_2^2) \quad (1)$$

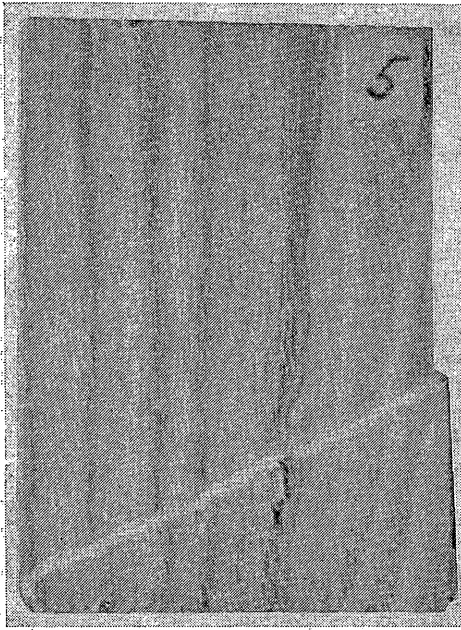
и выразим компоненты деформаций через перемещения v_L и v_R в направлении оси y . Функции v_L и v_R будут определены дальше.

Примем линейный закон распределения деформаций по толщине t_2 . Тогда после несложных геометрических построений получим (штрихами вверху обозначается вторая производная функции перемещения по x):

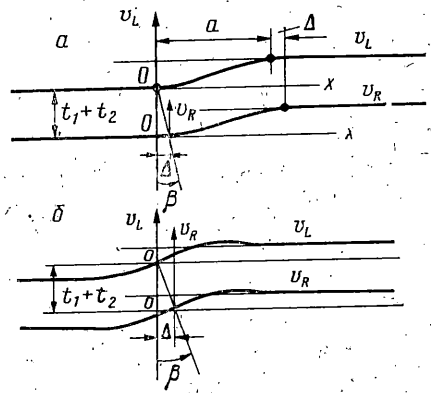
$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -\epsilon_0 + 1/4 (v_L'' - v_R'') t_1 + 1/2 (v_L' + v_R') t_1 y / t_2 \\ \epsilon_y &= (v_L - v_R) / t_2 + \mu_2 \epsilon_0 \\ \gamma_{xy} &= 1/2 (v_L' + v_R') (1 + t_1 / t_2) + y (v_L' - v_R') / t_2 \end{aligned} \quad (2)$$

где y отсчитывается от срединной поверхности податливого слоя. Под ϵ_0 понимается осевая деформация в докритическом состоянии.

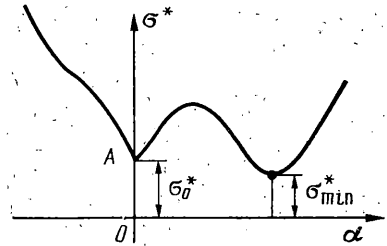
Выражение (1) умножим на элемент объема $b dy dx$ и произведем интегрирование по y от $-t_2/2$ до $+t_2/2$ и по x в пределах высоты образца H . Первое интегрирование выполняется элементарно, а второе — следует произвести после выбора функций v_L и v_R .



Фиг. 1.



Фиг. 2



Фиг. 3

Если из найденной таким образом энергии вычесть энергию докритического состояния ($\varepsilon_x = -\varepsilon_0$, $\varepsilon_y = \mu_2 \varepsilon_0$, $\gamma_{xy} = 0$), то получим изменение энергии промежуточного слоя при малом отклонении от исходного состояния равновесия

$$\Delta U_2 = \frac{E_2 b t_2}{2(1-\mu_2^2)} \int_H \left\{ \frac{t_1^2}{12} (v_L''^2 - v_L'' v_R'' + v_R''^2) + \frac{1}{t_2^2} (v_L - v_R)^2 + \left(\frac{1-\mu_2}{24} - \frac{\mu_2}{2} \frac{t_1}{t_2} \right) (v_L' - v_R')^2 + \frac{1-\mu_2}{8} \left(1 + \frac{t_1}{t_2} \right)^2 (v_L' + v_R')^2 \right\} dx$$

Изменение энергии тонкого несущего слоя определяется в основном его изгибом. Поэтому

$$\Delta U_1 = \frac{E_1}{2(1-\mu_1^2)} \frac{b t_1^3}{12} \int_H v''^2 dx$$

И наконец осадка образца, т. е. сближение его торцев, будет

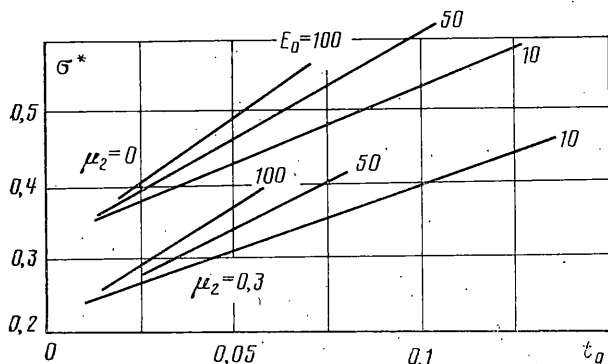
$$\lambda = 1/2 \int_H v'^2 dx$$

Здесь различать v_L и v_R нет необходимости. В итоге получим $P^* \lambda = n(\Delta U_1 + \Delta U_2)$, где n — число пар слоев. Вводя безразмерные параметры

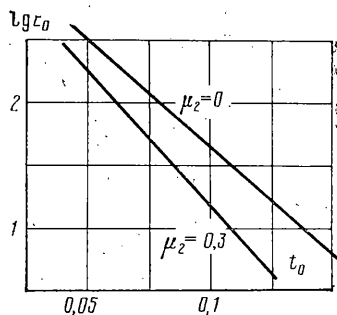
$$\sigma^* = \frac{P^*}{b n (t_1 + t_2)} \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}, \quad t_0 = \frac{t_1}{t_2}, \quad E_0 = \frac{E_1}{E_2} \frac{1 - \mu_2^2}{1 - \mu_1^2}$$

получим

$$\sigma^* = \frac{1}{2\lambda} \frac{t_0}{1+t_0} \left\{ \frac{E_0 t_1^2}{12} \int_H v''^2 dx + \frac{t_1 t_2}{12} \int_H (v_L''^2 - v_L'' v_R'' + v_R''^2) dx + \frac{1}{t_1 t_2} \int_H (v_L - v_R)^2 dx + \left(\frac{1-\mu_2}{24 t_0} - \frac{\mu_2}{2} \right) \int_H (v_L' - v_R')^2 dx + \frac{1-\mu_2}{8} \frac{1}{t_0} (1+t_0)^2 \int_H (v_L' + v_R')^2 dx \right\} \quad (3)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Теперь надо подобрать функцию v , которая наиболее полно отражала бы описанный ранее характер потери устойчивости слоистой структуры. Рассматривались функции двух типов (фиг. 2, а, б): алгебраическая и показательная

$$v_L = C \left[x - \frac{a}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{a} \right], \quad v_R = C \left[(x-\Delta) - \frac{a}{2\pi} \sin \frac{2\pi(x-\Delta)}{a} \right]$$

$$v_L = C [1 - \exp(-kx) \cos kx]$$

$$v_R = C [1 - \exp(-k(x-\Delta)) \cos k(x-\Delta)] \quad (4)$$

Представления второго типа, как выяснилось в дальнейшем, приводят к более низким (на 2–3%) значениям критического напряжения. Последующие операции приводим только для них.

Полагая, что функция относится к быстрозатухающим, проводим интегрирование по x от $-\infty$ до $+\infty$, предварительно отображая функцию v на отрицательную полуось нечетным образом. В итоге получаем

$$\lambda = \sqrt[3]{4} C^2 k, \quad \int_{\mathbb{H}} v''^2 dx = C^2 k^3$$

$$\int_{\mathbb{H}} (v_L'' - v_L'' v_R'' + v_R''^2) dx = C^2 k^3 I_1, \quad \int_{\mathbb{H}} (v_L - v_R)^2 dx = \frac{1}{2} C^2 I_2 k^{-1}$$

$$\int_{\mathbb{H}} (v_L' \mp v_R')^2 dx = C^2 k I_{3,4}, \quad \alpha = k\Delta$$

$$I_1 = 2 + e^{-\alpha} (\sin \alpha - \cos \alpha - 2\alpha \cos \alpha)$$

$$I_2 = 8\alpha - 5 + e^{-\alpha} (5 \cos \alpha - 5 \sin \alpha + 2\alpha \cos \alpha) \quad (5)$$

$$I_{3,4} = 3 \mp e^{-\alpha} (3 \cos \alpha + 3 \sin \alpha + 2\alpha \sin \alpha)$$

Выражение для безразмерного критического напряжения принимает вид

$$\sigma^* = \frac{2}{3} \frac{t_0}{1+t_0} \left\{ k^2 t_0^2 \frac{t_0}{12} (E_0 t_0 + I_1) + \frac{1}{k^2 t_0^2} \frac{I_2}{2t_0} + \left(\frac{1-\mu_2}{24t_0} - \frac{\mu_2}{2} \right) I_3 + \frac{1-\mu_2}{8t_0} (1+t_0)^2 I_4 \right\}$$

минимум имеет при

$$k^2 t_0^2 = [6I_2 / (E_0 t_0 + I_1)]^{1/2} / t_0 \quad (6)$$

Этот минимум определяется формулой

$$\sigma^* = \frac{2}{3} \frac{t_0}{1+t_0} \left\{ \left[\frac{I_2}{6} (E_0 t_0 + I_1) \right]^{1/2} + \left(\frac{1-\mu_2}{24t_0} - \frac{\mu_2}{2} \right) I_3 + \frac{1-\mu_2}{8t_0} (1+t_0)^2 I_4 \right\} \quad (7)$$

Определим параметр Δ (фиг. 2), характеризующий смещение волн по фазе. Для этого воспользуемся выражениями (5), численно подбрав $\alpha = k\Delta$ так, чтобы σ^* из (7) получило наименьшее значение.

Характер зависимости σ^* от α показан на фиг. 3. Малым значениям α соответствуют малые I_2 в (5) и соответственно — малые значения k в (6). При этом функция v из (4) теряет предполагаемые свойства быстрого затухания; ее уже нельзя интегри-

ровать в пределах $\mp\infty$, а форму потери устойчивости нельзя рассматривать как местную, слабо связанную с условиями закрепления слоев на торцах. Значит, при малых α картина местной потери устойчивости со сдвигом по фазе от слоя к слою не реализуется. Таким образом, область малых α , в частности величину σ_0^* при $\alpha=0$ (фиг. 3), нельзя рассматривать при условиях первоначального предположения о быстром затухании функции ν , а следовательно, без учета влияния условий закрепления слоев на торцах. Значит, сравнение σ_0^* и σ_{\min}^* в рамках данного исследования, очевидно, является неправомерным. Поэтому угловая точка А (фиг. 3) и соответствующее ей значение σ_0^* из рассмотрения исключаются. Остается найти только σ_{\min}^* . Численный алгоритм очень прост и позволяет определить критическое напряжение в зависимости от параметров t_0 и E_0 . Существенную роль, как выяснилось, имеет также и коэффициент Пуассона μ_2 податливого слоя.

Зависимость σ^* от отношения толщин t_0 представлена на фиг. 4. Она почти линейная. Отношение модулей E_0 на критическое напряжение влияет мало. Важна не столько величина E_0 , сколько ее порядок. Увеличение коэффициента Пуассона μ_2 приводит к снижению критического напряжения.

Угол наклона полосы β , в пределах которой развивается потеря устойчивости и последующее разрушение образца, определяется из соотношения $\operatorname{tg} \beta = \Delta / (t_1 + t_2)$, или с учетом выражения (6):

$$\operatorname{tg} \beta = \alpha t_0^{1/2} [1/6(E_0 t_0 + I_1) / I_2]^{1/4} (1 + t_0)$$

Проведенные расчеты показали, что угол β в пределах $t_0 = 0,01 - 0,15$ меняется от 10 до 20°.

Интересно установить, в какой области изменения t_0 и E_0 вообще возможно возникновение местной потери устойчивости рассматриваемого типа. Это определяется условиями существования минимума функции $\sigma^*(\alpha)$, но в рамках достаточно большой величины kt_2 из (6).

На фиг. 5 показана эта область в полулогарифмических координатах. Она расположена ниже показанных прямых. Это есть зона возможной местной потери устойчивости, но отнюдь не ее обязательной реализации. Для коротких образцов возможны и другие формы изгиба слоев, рассматривавшиеся, в частности, в [3].

В заключение следует отметить, что предел прочности на сжатие, который обычно считается характеристикой механических свойств материала, не обладает объективностью. Для композиционных материалов, по крайней мере, предел прочности на сжатие меняется в зависимости от того, в каких условиях и с какими образцами проводится испытание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гордон Дж. Конструкции, или почему не ломаются вещи. М.: Мир. 1980. 390 с.
2. Милейко С. Т., Хвостунов А. А. Одноосное сжатие волокнистого композита // Кововé mater. 1974. V. 12. № 2. P. 205-214.
3. Greszczuk L. B. Microbuckling of Lamina - Reinforced Composites // Composite Materials: Testing and Design (Third Conf.), STP 546. Philadelphia, Pa: ASTM, 1974. P. 5-29.

Москва

Поступила в редакцию
12.VI.1986

Технический редактор Т. В. Скворцова

Сдано в набор 05.08.87 Подписано к печати 14.10.87 Т-20215 Формат бумаги 70×108^{1/16}
Высокая печать Усл. печ. л. 16,8 Усл. кр.-отг. 24,6 тыс. Уч.-изд. л. 18,9 Бум. л. 6,0
Тираж 1448 экз. Зак. 717

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»,
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6