

УДК 539.3

**НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК,
СВЯЗАННЫЕ С ОСОБЕННОСТЯМИ СОВРЕМЕННЫХ
КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

ВАСИЛЬЕВ В. В.

Рассматриваются вопросы, связанные с построением прикладной теории оболочек, учитывающей в рамках единого подхода основные структурные особенности современных тонкостенных конструкций и материалов. Обоснована операция осреднения трансверсальных касательных напряжений и деформаций сдвига по толщине, позволяющая получить двумерные уравнения, описывающие основное напряженное состояние гладких, трехслойных, многослойных и подкрепленных оболочек. Сформулирована геометрически нелинейная прикладная теория, предназначенная для расчета жестких оболочек, не допускающих больших перемещений, и учитывающая изменение радиусов кривизны в процессе деформации. Обсуждается нелинейная безмоментная теория, свободная от ограничений, свойственных классической безмоментной теории оболочек.

1. Классическая теория тонких оболочек, основанная на гипотезах Кирхгоффа — Лява, уже почти столетие служит основой для расчета тонкостенных конструкций самого разнообразного назначения, непрерывно совершенствуется, уточняется и дополняется новыми идеями, физическими и математическими моделями и методами. Развитие теории оболочек помимо естественного стремления получить непротиворечивую, возможно более общую и в то же время достаточно простую систему уравнений определяется непрерывным расширением класса конструкционных материалов, форм и структурных характеристик тонкостенных элементов сооружений, машин и аппаратов. В последние годы это расширение в основном связано с интенсивным внедрением многослойных оболочек, синтезированных из разнородных материалов, в совокупности обеспечивающих необходимое сочетание жесткости, прочности и устойчивости конструкции к внешним воздействиям. Для таких оболочек, включающих слои, обладающие анизотропией и жесткостными характеристиками, изменяющимися в широких пределах, гипотезы классической теории представляются существенно менее обоснованными, чем для традиционных однородных оболочек, что вызвало и продолжает вызывать появление большого числа уточненных вариантов теории, учитывающих различные неклассические эффекты. Анализ этих вариантов посвящены многочисленные исследования, анализ которых содержится в работах [1—12], однако проблема построения непротиворечивой теории, позволяющей наиболее просто учесть все основные особенности современных конструкционных материалов и концепций проектирования, продолжает оставаться актуальной и представляется заслуживающей обсуждения.

2. Рассмотрим неоднородную по толщине оболочку (фиг. 1) и введем систему ортогональных криволинейных координат, совместив оси α_1 и α_2 с главными направлениями некоторой начальной поверхности $\alpha_3=0$ и направив ось α_3 по нормали к этой поверхности. Как и любое упругое тело, оболочка описывается уравнениями теории упругости (предполагается, что материал является ортотропным):

$$H_1(H_2\sigma_1)_{,1} + (H_1^2\tau_{12})_{,2} - H_1H_{2,1}\sigma_2 + (H_1^2H_2\tau_{13})_{,3} + f_1H_1^2H_2 = 0 \quad (1, 2) \quad (2.1)$$

$$(H_1H_2\sigma_3)_{,3} + (H_2\tau_{13})_{,1} + (H_1\tau_{23})_{,2} - H_2H_{1,3}\sigma_1 - H_1H_{2,3}\sigma_2 - f_3H_1H_2 = 0$$

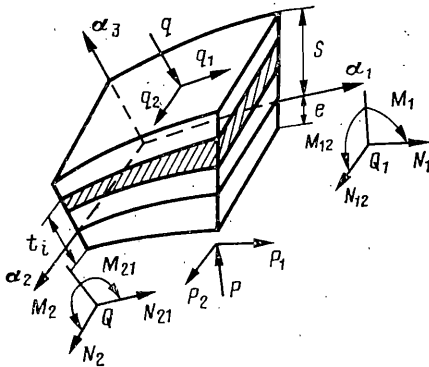
$$e_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \mu_{12} \frac{\sigma_2}{E_2} - \mu_{13} \frac{\sigma_3}{E_3} \quad (1, 2), \quad e_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \quad (2.2)$$

$$e_3 = \frac{\sigma_3}{E_3} - \mu_{13} \frac{\sigma_1}{E_1} - \mu_{23} \frac{\sigma_2}{E_2}, \quad e_{13} = \frac{\tau_{13}}{G_{13}} \quad (1, 2) \quad (2.3)$$

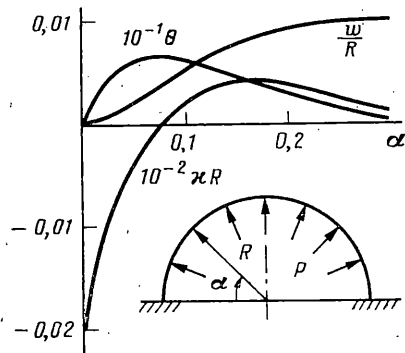
$$e_1 = \frac{1}{H_1} \left(U_{1,1} + \frac{H_{1,2}}{H_2} U_2 + H_{1,3} U_3 \right) \quad (1, 2), \quad e_{12} = \frac{H_1}{H_2} \left(\frac{U_1}{H_1} \right)_{,2} + \frac{H_2}{H_1} \left(\frac{U_2}{H_2} \right)_{,1} \quad (2.4)$$

$$e_3 = U_{3,3}, \quad e_{13} = H_1 \left(\frac{U_1}{H_1} \right)_{,3} + \frac{U_{3,1}}{H_1} \quad (1, 2) \quad (2.5)$$

Здесь $H_1 = A_1(1 + \alpha_3/R_1)$ (1, 2) — коэффициенты Ламе; A_1, A_2 и R_1, R_2 — метрические коэффициенты и главные радиусы кривизны начальной поверхности. Индекс после запятой обозначает операцию дифференцирования



Фиг. 1



Фиг. 2

ния по соответствующей координате, а символ (1, 2) показывает, что из записанного соотношения можно получить еще одно заменой 1 на 2 и 2 на 1. На поверхностях оболочки, толщина которой считается в общем случае переменной, зададим следующие граничные условия (фиг. 1):

при $\alpha_3 = -e$:

$$\tau_{13}^e + \sigma_1^e \xi_1 + \tau_{12}^e \xi_2 = -(p_1 + p \xi_1) \quad (1, 2) \quad (2.6)$$

$$\sigma_3^e + \tau_{13}^e \xi_1 + \tau_{23}^e \xi_2 = -p + p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2$$

при $\alpha_3 = s$:

$$\tau_{13}^s - \sigma_1^s \eta_1 - \tau_{12}^s \eta_2 = q_1 + q \eta_1 \quad (1, 2) \quad (2.7)$$

$$\sigma_3^s - \tau_{13}^s \eta_1 - \tau_{23}^s \eta_2 = -q + q_1 \eta_1 + q_2 \eta_2$$

Здесь функции $\xi_1 = e_1/B_1$, $\eta_1 = s_1/C_1$ (1, 2) определяют закон изменения толщины, а $B_1 = A_1(1 - e/R_1)$ и $C_1 = A_1(1 + s/R_1)$ (1, 2) являются коэффициентами метрической формы внутренней и наружной поверхности. Предполагается, что толщина изменяется достаточно медленно, т. е. $|\xi_1| \ll 1$, $|\eta_1| \ll 1$ (1, 2).

Как известно, характерной особенностью оболочки является малость ее толщины $h = e + s$ (фиг. 1) по сравнению с другими размерами и радиусами кривизны R_1, R_2 . Это свойство оболочки обуславливает возможность отделения нормальной координаты α_3 , т. е. сведения системы (2.1) — (2.5) к двумерным уравнениям, содержащим две независимые переменные α_1 и α_2 . Для однородной тонкой оболочки такое сведение может быть осуществлено, например, методом начальных функций [13] по следующей схеме. Обозначим U_1^0, U_2^0, U_3^0 и $\tau_{13}^0, \tau_{23}^0, \sigma_3^0$ начальные функции, определяющие значения соответствующих перемещений и напряжений в точках начальной поверхности $\alpha_3 = 0$, и представим искомые функции, входящие в систему (2.1) — (2.5), рядами Маклорена по переменной α_3 . С помощью уравнений (2.1) — (2.5) коэффициенты этих рядов, т. е. производные по α_3 , задаваемые на начальной поверхности, можно выразить через производные начальных функций по переменным α_1 и α_2 . Удовлетворяя да-

лее граничные условия (2.6), (2.7), можно получить шесть двумерных уравнений, включающих шесть начальных функций перемещений α_1 и α_2 и имеющих по этим переменным бесконечно высокий порядок. Естественно, что переход от трехмерных уравнений конечного порядка к двумерной системе бесконечно высокого порядка трудно признать упрощением задачи. Для получения двумерных уравнений с ограниченным порядком в рядах Маклорена можно удержать конечное число членов, однако при этом возникают существенные трудности, характерные для всех методов сведения трехмерной задачи к двумерной, которые основаны на разложении искомых функций в ряды по одной из координат. Помимо очевидного вопроса о степени соответствия между точностью получаемых уравнений и числом удержанных членов в теории оболочек возникает еще один вопрос, также остающийся без ответа — по сколько членов следует удерживать в каждом из разложений для того, чтобы все напряжения и деформации описывались с соизмеримой степенью точности.

Метод начальных функций оказывается значительно более полезным для качественного анализа рассматриваемой задачи. Получаемые этим методом двумерные уравнения представляют собой, как уже отмечалось, бесконечные разложения, в коэффициенты которых входят в соответствующих степенях безразмерные параметры вида $k_\sigma = h^4 E_1 / (a^4 E_3)$, $k_\tau = h^2 E_1 / (a^2 G_{13})$, где a — характерный размер или радиус кривизны оболочки. Если приравнять эти параметры нулю, получим систему восьмого порядка, соответствующую классическим гипотезам Кирхгоффа — Лява. Действительно, эти гипотезы требуют, чтобы нормаль к начальной поверхности оболочки не деформировалась и оставалась ортогональной к этой поверхности, что эквивалентно отсутствию трансверсальных деформаций, т. е. условиям $e_3 = 0$, $e_{13} = 0$ (1.2). Согласно соотношениям (2.3), эти условия выполняются, если $E_3 \rightarrow \infty$, $G_{13} \rightarrow \infty$ (1, 2), т. е. $k_\sigma = k_\tau = 0$. Таким образом, уточнение классической теории оболочек связано с сохранением в обсуждаемых разложениях членов, содержащих параметры k_σ и k_τ . Однако эти параметры являются множителями при производных начальных функций по переменным α_1 и α_2 , т. е. сохранения соответствующих членов связано с возрастанием порядка получаемых уравнений или с увеличением числа корней характеристического уравнения. В общем случае характеристическое уравнение имеет счетное множество корней, которые можно условно разделить на три группы. Рассмотрим для определенности направление α_1 . Тогда первая группа включает десять сравнительно малых корней и соответствует так называемому основному напряженному состоянию, сводящемуся к пяти усилиям и моментам, действующим по грани $\alpha_1 = \text{const}$ элемента, показанного на фиг. 1. Существенно, что эти корни не зависят от параметра k_σ , т. е. соответствуют материалу, недеформируемому в направлении α_3 . Корни двух других групп имеют порядок $k_\sigma^{-1/2}$ и $k_\tau^{-1/2}$, соответствуют так называемому погранслою и описывают быстро изменяющееся напряженное состояние, связанное с трансверсальными нормальной и сдвиговыми деформациями.

Для дальнейшего анализа рассмотрим один из краев оболочки, например край $\alpha_1 = \text{const}$. Решение, соответствующее основному напряженному состоянию, содержит на этом краю пять произвольных функций, которые позволяют учесть крайние усилия и моменты (фиг. 1) или закрепить край по отношению к соответствующим перемещениям. Решения, относящиеся к погранслою, содержат счетное множество произвольных функций и практически полностью затухают на расстоянии порядка толщины от края оболочки. Учет погранслоя в принципе расширяет класс граничных условий, которым можно подчинить решение, однако, как правило, появляющихся при этом произвольных функций оказывается все-таки недостаточно для описания реальной конструкции закрепления, включающей местные усилия, болты, заклепки, сварные или клеевые швы и т. п. Таким образом, учет погранслоя вносит в расчет реальных конструкций скорее формальные, чем фактические уточнения и при построении прикладной теории оболочек представляется целесообразным ограничиться основным напряженным состоянием. Заметим, что при этом не исключая

ется последующий более детальный анализ зоны закрепления или соединения оболочки с другими конструктивными элементами (см. п. 3).

3. Как уже отмечалось, при построении основного напряженного состояния можно не учитывать изменение толщины оболочки в процессе нагружения, полагая $e_3=0$. Это условие следует из первого равенства (2.3), если принять в нем $E_3 \rightarrow \infty$. При этом соотношения (2.2) упрощаются и в форме, разрешенной относительно напряжений, принимают вид

$$\sigma_1 = A_{11}e_1 + A_{12}e_2 \quad (1, 2), \quad \tau_{12} = A_{33}e_{12} \quad (3.1)$$

Здесь A_{mn} — коэффициенты жесткости, зависящие в общем случае от координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Из первого геометрического соотношения (2.5) при $e_3=0$ имеем $U_{3,3}=0$ или $U_3=w(\alpha_1, \alpha_2)$, где w — нормальный прогиб оболочки. Из условия $e_3=0$ следует и еще один важный вывод. Поскольку грани $\alpha_1=\text{const}$ и $\alpha_2=\text{const}$ элемента оболочки, показанного на фиг. 1, в направлении α_3 не деформируются, распределение касательных напряжений τ_{13} и τ_{23} по высоте этих граней также не должно оказывать влияние на деформации элемента. Существенными являются лишь равнодействующие этих напряжений, т. е. поперечные силы (фиг. 1):

$$Q_1 = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^s \tau_{13} H_2 d\alpha_3 \quad (1, 2) \quad (3.2)$$

Равенство (3.2) можно рассматривать как операцию осреднения трансверсальных касательных напряжений по толщине оболочки по закону

$$\tau_{13} = Q_1 A_2 / (h H_2) \quad (1, 2) \quad (3.3)$$

Действительно, равенство (3.2) после подстановки (3.3) удовлетворяется тождественно.

Итак, при построении расчетной модели оболочки трансверсальные касательные напряжения осредняются по формуле (3.3). Однако из второго соотношения (2.3) следует, что τ_{13} совпадает с e_{13} с точностью до конечного множителя, т. е. естественно осреднить и трансверсальную деформацию e_{13} . При этом следует учесть, что напряжения τ_{13} , действующие по грани $\alpha_1=\text{const}$, вызывают деформации сдвига в ортогональной плоскости $\alpha_2=\text{const}$ и использовать закон осреднения, взаимный по отношению к (3.3), т. е.

$$e_{13} = \psi_1 A_1 / H_1 \quad (1, 2) \quad (3.4)$$

Здесь $\psi_1(\alpha_1, \alpha_2)$ — некоторая осредненная по толщине оболочки деформация сдвига, соответствующая Q_1/h в формуле (3.3), которая определяется следующим равенством, аналогичным (3.2)

$$\psi_1 = \frac{1}{h A_1} \int_{-e}^s e_{13} H_1 d\alpha_3 \quad (1, 2) \quad (3.5)$$

Полученные зависимости позволяют установить связь между поперечными силами и осредненными деформациями сдвига. Заменим в формуле (3.5) e_{13} через τ_{13} с помощью второго соотношения (2.3) и подставим τ_{13} согласно равенству (3.3). В результате получим

$$Q_1 = K_1 \psi_1 \quad (1, 2) \quad (3.6)$$

$$K_1 = h^2 \left(\int_{-e}^s \frac{H_{21}}{G_{13}} d\alpha_3 \right)^{-1} \quad (1, 2), \quad H_{21} = \frac{A_2 H_1}{A_1 H_2} \quad (1, 2) \quad (3.7)$$

Для слоистой оболочки, вводя замену $t = \alpha_3 + e$ (фиг. 1), считая радиусы кривизны i -го слоя постоянными по его толщине и интегрируя по участкам, будем иметь

$$K_1 = h^2 \left[\sum_{i=1}^k \frac{T_{21}^{(i)}}{G_{13}^{(i)}} (t_i - t_{i-1}) \right]^{-1} \quad (1, 2) \quad (3.8)$$

$$T_{21}^{(i)} = \left(1 + \frac{t_i + t_{i-1}}{2R_1} \right) / \left(1 + \frac{t_i + t_{i-1}}{2R_2} \right) \quad (1, 2) \quad (3.9)$$

где t_i — расстояние от внутренней поверхности оболочки до наружной поверхности i -го слоя, $t_0=0$, $t_k=h$, k — число слоев.

Сделаем здесь одно замечание. Формально возможен и другой способ вывода формулы (3.6), основанный на использовании равенства (3.2) вместо (3.5). Выражая в (3.2) τ_{13} через e_{13} с помощью второй формулы (2.3) и учитывая соотношение (3.4), получим равенство (3.6), в котором

$$K_1 = \int_{-e}^e H_{12} G_{13} d\alpha_3 \quad (1, 2) \quad (3.10)$$

Сравнение результатов численного расчета тонких оболочек на основе формул типа (3.7) и (3.10) представлено в работе [14]. Принципиальное различие между этими формулами заключается в том, что при выводе первой из них было использовано соотношение $e_{13} = \tau_{13}/G_{13}$, а при выводе второй — соотношение $\tau_{13} = G_{13}e_{13}$. Для однородной тонкой оболочки, т. е. при $H_{12} = H_{21} = 1$ и $G_{13} = \text{const}$, равенства (3.7) и (3.10) дают одинаковый результат $K_1 = G_{13}h$, который соответствует сдвиговой модели С. П. Тимошенко, использованной для построения теории оболочек в работах [15, 16, 17]. Для неоднородных оболочек формула (3.7) оказывается несправедливой при наличии слоя, у которого $G_{13} = 0$, что вполне естественно, поскольку при этом понятие сплошной оболочки теряет смысл. Что касается формулы (3.10), то она при наличии слоя, у которого $G_{13} \rightarrow \infty$, дает $K_1 \rightarrow \infty$, что, очевидно, неверно. Действительно, трехслойная стенка с абсолютно жесткими при сдвиге несущими слоями и податливым на сдвиг заполнителем обладает конечной сдвиговой жесткостью. Например, пластина с металлическими несущими слоями и легким заполнителем при отношении модулей сдвига слоев и заполнителя, равном 485, исследованная экспериментально в работе [18], обладает согласно формулам (3.7) и (3.10) сдвиговой жесткостью, равной соответственно $38,3 \times 10^4$ Н/м и $37,2 \times 10^6$ Н/м. Сдвиговая жесткость, рассчитанная по результатам измерения прогиба, составляет $38,9 \times 10^4$ Н/м, что практически совпадает с расчетом по формуле (3.7) и отличается от результата, следующего из формулы (3.10), почти в 100 раз. Таким образом, жесткость оболочки при трансверсальном сдвиге определяется равенствами (3.7) или (3.8), основанными на геометрическом соотношении (3.5) и законе осреднения (3.3). Что касается статического соотношения (3.2) и закона осреднения (3.4), то они будут использованы ниже при выводе геометрических соотношений и уравнений равновесия рассматриваемой теории.

Получим геометрические и физические соотношения. Подставляя во второе равенство (2.5) деформацию e_{13} , осредненную по формуле (3.4), и интегрируя по α_3 , найдем

$$U_1 = u_1 + \alpha_3 \theta_1, \quad \theta_1 = u_1/R_1 + \psi_1 - w_{,1}/A_1 \quad (1, 2) \quad (3.11)$$

Здесь $u_1(\alpha_1, \alpha_2) = U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0)$ — смещение точки начальной поверхности, а $\theta_1(\alpha_1, \alpha_2)$ — угол поворота нормали к ней. Подставляя перемещения (3.11) в исходные геометрические соотношения (2.4) и используя далее равенства (3.1), получим следующие выражения для напряжений:

$$\sigma_1 = A_{11} \frac{A_1}{H_1} (\varepsilon_1 + \alpha_3 \kappa_1) + A_{12} \frac{A_2}{H_2} (\varepsilon_2 + \alpha_3 \kappa_2) \quad (1, 2) \quad (3.12)$$

$$\tau_{12} = A_{33} \left[\frac{A_1}{H_1} (\varepsilon_{12} + \alpha_3 \kappa_{12}) + \frac{A_2}{H_2} (\varepsilon_{21} + \alpha_3 \kappa_{21}) \right]$$

$$\varepsilon_1 = \frac{u_{1,1}}{A_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} A_{1,2} + \frac{w}{R_1}, \quad \kappa_1 = \frac{\theta_{1,1}}{A_1} + \frac{\theta_2}{A_1 A_2} A_{1,2} \quad (1, 2) \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{u_{2,1}}{A_1} - \frac{u_1}{A_1 A_2} A_{1,2}, \quad \kappa_{12} = \frac{\theta_{2,1}}{A_1} - \frac{\theta_1}{A_1 A_2} A_{1,2} \quad (1, 2)$$

Равенства (3.12) позволяют выразить напряжения через восемь обобщенных деформаций ε и κ . Однако для описания напряженного состояния оболочки представляется более удобным ввести соответствующие усилия и моменты относительно начальной поверхности (фиг. 1)

$$N_1 = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^s \sigma_1 H_2 d\alpha_3, \quad M_1 = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^s \sigma_1 H_2 \alpha_3 d\alpha_3 \quad (1, 2) \quad (3.14)$$

$$N_{12} = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^s \tau_{12} H_2 d\alpha_3, \quad M_{12} = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^s \tau_{12} H_2 \alpha_3 d\alpha_3 \quad (1, 2)$$

Подставляя сюда напряжения (3.12), запишем физические соотношения рассматриваемой теории

$$N_1 = B_{11} \varepsilon_1 + B_{12} \varepsilon_2 + C_{11} \kappa_1 + C_{12} \kappa_2 \quad (1, 2) \quad (3.15)$$

$$M_1 = C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 + D_{11} \kappa_1 + D_{12} \kappa_2 \quad (1, 2)$$

$$N_{12} = B_{33}{}^{11} \varepsilon_{12} + B_{33}{}^{12} \varepsilon_{21} + C_{33}{}^{11} \kappa_{12} + C_{33}{}^{12} \kappa_{21} \quad (1, 2)$$

$$M_{12} = C_{33}{}^{11} \varepsilon_{12} + C_{33}{}^{12} \varepsilon_{21} + D_{33}{}^{11} \kappa_{12} + D_{33}{}^{12} \kappa_{21} \quad (1, 2)$$

$$B_{11} = \int_{-e}^s H_{12} A_{11} d\alpha_3, \quad C_{11} = \int_{-e}^s H_{12} A_{11} \alpha_3 d\alpha_3, \quad D_{11} = \int_{-e}^s H_{12} A_{11} \alpha_3^2 d\alpha_3 \quad (1, 2) \quad (3.16)$$

$$B_{12} = B_{21} = \int_{-e}^s A_{12} d\alpha_3, \quad C_{12} = C_{21} = \int_{-e}^s A_{12} \alpha_3 d\alpha_3, \quad D_{12} = D_{21} = \int_{-e}^s A_{12} \alpha_3^2 d\alpha_3$$

$$B_{33}{}^{11} = \int_{-e}^s H_{12} A_{33} d\alpha_3, \quad C_{33}{}^{11} = \int_{-e}^s H_{12} A_{33} \alpha_3 d\alpha_3, \quad D_{33}{}^{11} = \int_{-e}^s H_{12} A_{33} \alpha_3^2 d\alpha_3 \quad (1, 2)$$

$$B_{33}{}^{12} = B_{33}{}^{21} = \int_{-e}^s A_{33} d\alpha_3, \quad C_{33}{}^{12} = C_{33}{}^{21} = \int_{-e}^s A_{33} \alpha_3 d\alpha_3,$$

$$D_{33}{}^{12} = D_{33}{}^{21} = \int_{-e}^s A_{33} \alpha_3^2 d\alpha_3$$

Для слоистой оболочки введем замену $t=e+\alpha_3$ (фиг. 1). Тогда мембранные (B), смешанные (C) и изгибные (D) жесткости выражаются следующим образом:

$$B_{mm} = I_{mm}^{(0)}, \quad B_{12} = I_{12}^{(0)}, \quad B_{33}{}^{mm} = J_{mm}^{(0)}, \quad B_{33}{}^{12} = J_{12}^{(0)} \quad (3.17)$$

$$C_{mm} = I_{mm}^{(1)} - e I_{mm}^{(0)}, \quad D_{mm} = I_{mm}^{(2)} - 2e I_{mm}^{(1)} + e^2 I_{mm}^{(0)}$$

$$C_{12} = I_{12}^{(1)} - e I_{12}^{(0)}, \quad D_{12} = I_{12}^{(2)} - 2e I_{12}^{(1)} + e^2 I_{12}^{(0)}$$

$$C_{33}{}^{mm} = J_{mm}^{(1)} - e J_{mm}^{(0)}, \quad D_{33}{}^{mm} = J_{mm}^{(2)} - 2e J_{mm}^{(1)} + e^2 J_{mm}^{(0)}$$

$$C_{33}{}^{12} = J_{12}^{(1)} - e J_{12}^{(0)}, \quad D_{33}{}^{12} = J_{12}^{(2)} - 2e J_{12}^{(1)} + e^2 J_{12}^{(0)}$$

(3.18)

$$I_{mm}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^h A_{mm}^{(i)} H_{12}^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}), \quad I_{12}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^h A_{12}^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1})$$

$$J_{mm}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^h A_{33}^{(i)} H_{12}^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}), \quad J_{12}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^h A_{33}^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1})$$

где $m=1, 2$; $r=0, 1, 2$. При выводе формул (3.18) коэффициенты жесткости A_{mn} и радиусы кривизны считались постоянными в пределах i -го слоя. В общем случае наиболее простые выражения для жесткостей получаются, если принять в равенствах (3.17) $\epsilon=0$, т. е. совместить начальную поверхность с внутренней поверхностью оболочки (фиг. 1). Для тонких оболочек $H_{12} \approx H_{21} \approx 1$ и коэффициенты жесткости (3.16) принимают вид

$$\begin{aligned} B_{mn} &= I_{mn}^{(0)}, & B_{33}^{11} &= B_{33}^{22} = B_{33}^{12} = I_{33}^{(0)} \\ C_{mn} &= I_{mn}^{(1)} - eI_{mn}^{(0)}, & C_{33}^{11} &= C_{33}^{22} = C_{33}^{12} = I_{33}^{(1)} - eI_{33}^{(0)} \\ D_{mn} &= I_{mn}^{(2)} - 2eI_{mn}^{(1)} + e^2I_{mn}^{(0)} \\ D_{33}^{11} &= D_{33}^{22} = D_{33}^{12} = I_{33}^{(2)} - 2eI_{33}^{(1)} + e^2I_{33}^{(0)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$I_{mn}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{mn}^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1})$$

$mn=11, 22, 12, 33$; $r=0, 1, 2$. Как известно, в общем случае не удается расположить начальную поверхность так, чтобы все смешанные жесткости C обращались в нуль, поскольку уравнения $I_{mn}^{(1)} - eI_{mn}^{(0)} = 0$ ($mn=11, 22, 12, 33$), включающие одну неизвестную e , в общем случае несовместны. Они допускают единственное решение, если структура стенки симметрична относительно срединной поверхности $t=h/2$. В этом случае $e=h/2$ и в равенствах (3.19) $C_{mn} = C_{33}^{11} = C_{33}^{22} = C_{33}^{12} = 0$.

Соотношения (3.16) — (3.19) позволяют рассматривать широкий класс слоистых и подкрепленных оболочек, использующихся в современных тонкостенных конструкциях. Для жестких металлических слоев в них можно принять $G_{13}^{(i)} \rightarrow \infty$, $G_{23}^{(i)} \rightarrow \infty$; для податливых слоев заполнителя из сот, пенопластов или резины можно считать, что $A_{mn}^{(i)} = 0$ ($mn=11, 12, 22, 33$); для элементов ребер (полок, стенок и т. д.) можно ввести условные слои, обладающие некоторыми приведенными жесткостями.

Рассмотрим кратко вывод уравнений равновесия, подробно изложенный в работе [19]. Интегрируя уравнения равновесия (2.1) по α_3 и учитывая статические граничные условия (2.6) на внутренней поверхности оболочки $\alpha_3 = -e$, можно получить выражения для трансверсальных напряжений τ_{13} , τ_{23} , σ_3 . Удовлетворяя статические граничные условия (2.7) на наружной поверхности $\alpha_3 = s$ и учитывая обозначения (3.2), (3.14), можно записать первые три уравнения равновесия в усилиях и моментах. Подставляя далее полученные выражения для τ_{13} , τ_{23} в статические соотношения (3.2) и используя формулу интегрирования по частям, можно записать еще два уравнения. Окончательная система уравнений равновесия рассматриваемой теории оболочек имеет вид

$$L_1(N) + \frac{1}{R_1} A_1 A_2 Q_1 + F_1 = 0 \quad (1, 2) \quad (3.20)$$

$$(A_2 Q_1)_{,1} + (A_1 Q_2)_{,2} - A_1 A_2 (N_1/R_1 + N_2/R_2) + F_3 = 0$$

$$L_1(M) - A_1 A_2 Q_1 + m_1 = 0 \quad (1, 2)$$

$$L_1(\Phi) = (A_2 \Phi_1)_{,1} - A_{2,1} \Phi_2 + (A_1 \Phi_{21})_{,2} + A_{1,2} \Phi_{12} \quad (1, 2)$$

$$F_1 = \int_{-e}^s f_1 H_1 H_2 d\alpha_3 + B_1 B_2 (p_1 + p \xi_1) + C_1 C_2 (q_1 + q \eta_1) \quad (1, 2)$$

$$F_3 = \int_{-e}^s f_3 H_1 H_2 d\alpha_3 + B_1 B_2 (p - p_1 \xi_1 - p_2 \xi_2) - C_1 C_2 (q - q_1 \eta_1 - q_2 \eta_2)$$

$$m_1 = \int_{-e}^s f_1 H_1 H_2 \alpha_3 d\alpha_3 + s C_1 C_2 (q_1 + q \eta_1) - e B_1 B_2 (p_1 + p \zeta_1) \quad (1, 2)$$

и $\Phi = (N, M)$. Уравнения (3.20) можно получить и непосредственно, рассматривая равновесие элемента, показанного на фиг. 1. Три первых соответствуют проекциям всех сил на оси $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, а два последних — моментам относительно осей α_2 и α_1 . Заметим, что для этого элемента можно записать еще одно шестое уравнение равновесия, соответствующее сумме моментов относительно оси α_3 , т. е. $N_{12} - N_{21} + (M_{12}/R_1) - (M_{21}/R_2) = 0$. Это уравнение удовлетворяется автоматически, если подставить в него усилия и моменты согласно (3.14).

Таким образом, рассматриваемая теория оболочек сводится к полной системе геометрических (3.11), (3.13), физических (3.6), (3.12), (3.15) и статических (3.20) двумерных уравнений, имеющих в совокупности 10-й порядок по переменным α_1 и α_2 . Минимизация соответствующего функционала Лагранжа

$$\iint [(N_1 \delta \varepsilon_1 + N_2 \delta \varepsilon_2 + N_{12} \delta \varepsilon_{12} + N_{21} \delta \varepsilon_{21} + M_1 \delta \kappa_1 + M_2 \delta \kappa_2 + M_{12} \delta \kappa_{12} + M_{21} \delta \kappa_{21} + Q_1 \delta \psi_1 + Q_2 \delta \psi_2) A_1 A_2 - (F_1 \delta u_1 + F_2 \delta u_2 + F_3 \delta w + m_1 \delta \theta_1 + m_2 \delta \theta_2)] d\alpha_1 d\alpha_2 = 0$$

по кинематическим переменным $u_1, u_2, w, \theta_1, \theta_2$ позволяет получить уравнения равновесия (3.20) и следующие естественные граничные условия: при $\alpha_i = \text{const}$ (1, 2)

$$N_1 \delta u_1 = 0, N_{12} \delta u_2 = 0, Q_1 \delta w = 0, M_1 \delta \theta_1 = 0, M_{12} \delta \theta_2 = 0 \quad (1, 2) \quad (3.21)$$

Для обеспечения полного закрепления края необходимо принять $u_1 = u_2 = w = \theta_1 = \theta_2 = 0$, что в силу равенств (3.11) и $U_3 = w$ обеспечивает тождественное обращение в нуль перемещений U_1, U_2, U_3 .

Вернемся теперь к анализу краевой зоны оболочки. Как следует из условий (3.21), решение, учитывающее только основное напряженное состояние, позволяет наложить ограничения на перемещения и углы поворота нормали к начальной поверхности в некотором сечении оболочки. Если для описания реального закрепления оболочки этих возможностей недостаточно, то представляется целесообразным отделить край оболочки $\alpha_1 = 0$ некоторым сечением $\alpha_1 = c$, причем в соответствии с оценкой корней характеристического уравнения, соответствующих погранслою, результатами предварительных расчетов или другими соображениями выбрать расстояние c достаточным для полного затухания решений типа погранслоя или других эффектов, для описания которых линейное распределение перемещений (3.11) оказывается недостаточным. Тогда область $\alpha_1 \geq c$ может быть описана с помощью приведенных выше уравнений теории оболочек, а в узкой краевой зоне расчет может быть осуществлен в трехмерной постановке одним из численных методов, например методом конечных элементов. При этом для решения задачи сопряжения участков достаточно найти коэффициенты жесткости краевой зоны, т. е. силы и моменты, соответствующие единичным перемещениям и поворотам нормали на краю $\alpha_1 = c$ при заданных условиях закрепления края $\alpha_1 = 0$. В результате задача расчета оболочки в области $\alpha_1 \geq 0$ сводится к расчету оболочки, занимающей область $\alpha_1 \geq c$, при упругом закреплении края $\alpha_1 = c$.

4. Прежде чем перейти к дальнейшему анализу, рассмотрим пример — полусферическую оболочку, жестко защемленную по экватору и нагруженную равномерным внутренним давлением p (фиг. 2). На фиг. 2 показано изменение по образующей относительного прогиба w/R , угла поворота нормали θ и относительного изменения меридиональной кривизны κ/R , построенных в результате решения приведенных выше уравнений для оболочки из стеклопластика с параметрами $h/R = 0,02$; $A_{11} = A_{22} = 25$ ГПа, $p = 10$ МПа. Из графика, на котором значения θ и κ/R уменьшены соответственно в 10 и 100 раз, следует, что при малой относительной деформации ($w/R < 0,01$) и малых углах поворота ($\theta < 0,07$) кривизна меридиана

в окрестности экватора изменяется в 2 раза. Заметим, что изменение кривизны пропорционально производной от угла поворота.

Описанная ситуация является характерной для оболочек из современных композиционных материалов, которые значительно превосходят традиционные металлические сплавы по прочности. В результате проектирования по условиям прочности стенка таких оболочек оказывается настолько тонкой, что допускает значительный изгиб, изменяющий исходную кривизну поверхности. В связи с этим возникает естественное сомнение в справедливости для расчета таких оболочек линейных уравнений (3.13), (3.15), (3.20), при выводе которых изменение формы поверхности в процессе нагружения не учитывалось. В настоящем разделе рассматривается геометрически нелинейный вариант прикладной теории оболочек, отличающийся от известных тем, что он предназначен для расчета жестких несущих оболочек, не допускающих больших перемещений, деформаций и углов поворота. В теории упругости этого, как правило, оказывается достаточным для справедливости линейной теории, однако в уравнениях теории оболочек фигурируют производные от углов поворота, которые, как следует из рассмотренного выше примера, могут оказаться значительными. Отметим в связи с этим работу [20], в которой на основе анализа геометрии поверхности вращения доказывается, что линейная теория оболочек справедлива, если малы все градиенты деформаций.

Уравнения рассматриваемой нелинейной теории могут быть получены по схеме, изложенной в п. 3, если вместо линейных уравнений (2.1) — (2.5) воспользоваться соответствующими нелинейными соотношениями [21]. При этом в соответствии с изложенным выше из нелинейных членов удерживаются только те, которые содержат производные от углов поворота, причем при определении этих углов в нелинейных членах не учитываются трансверсальные сдвиговые деформации. Ввиду того что деформации и углы поворота считаются малыми, геометрические и физические соотношения остаются справедливыми и сохраняют форму (3.11), (3.13) и (3.6), (3.12), (3.15). В выводе уравнений равновесия также нет необходимости — они отличаются от уравнений (3.20) только тем, что учитывают изменение радиусов кривизны элемента оболочки (фиг. 1) в процессе деформации и имеют вид

$$L_1(N) + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_1 + A_2 Q_1 \omega_{1,1} + A_1 Q_2 \omega_{1,2} + F_1 = 0 \quad (1, 2)$$

$$\begin{aligned} & (A_2 Q_1)_{,1} + (A_1 Q_2)_{,2} - A_1 A_2 \left[N_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\omega_{1,1}}{A_1} \right) + \right. \\ & \left. + N_{12} \frac{\omega_{2,1}}{A_1} + N_{21} \frac{\omega_{1,2}}{A_2} + N_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\omega_{2,2}}{A_2} \right) \right] + F_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$L_1(M) - A_1 A_2 Q_1 + m_1 = 0 \quad (1, 2) \quad \omega_1 = u_1/R_1 - w_{,1}/A_1 \quad (1, 2)$$

Соответственно граничные условия (3.21) обобщаются следующим образом:

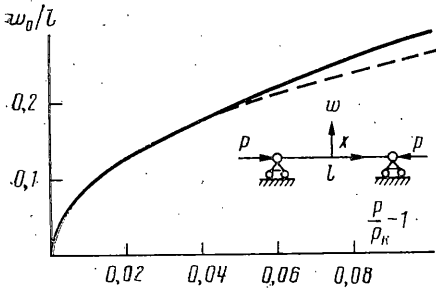
при $\alpha_1 = \text{const} \quad (1, 2)$:

$$(N_1 + Q_1 \omega_1) \delta u_1 = 0, \quad (N_{12} + Q_1 \omega_2) \delta u_2 = 0 \quad (4.2)$$

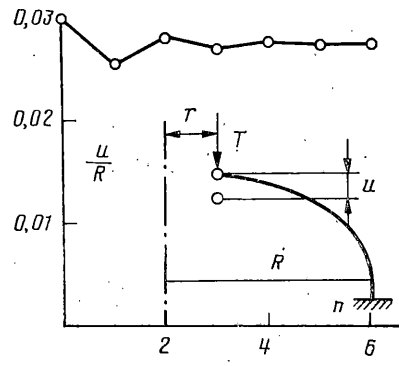
$$M_1 \delta \theta_1 = 0, \quad M_{12} \delta \theta_2 = 0, \quad (Q_1 - N_1 \omega_1 - N_{12} \omega_2) \delta w = 0 \quad (1, 2)$$

Для иллюстрации полученных уравнений рассмотрим простейшую задачу о сжатии шарнирно опертого стержня (фиг. 3). Запишем исходную систему уравнений, принимая для простоты $K_1 \rightarrow \infty$, т. е. не учитывая деформацию трансверсального сдвига и опуская нижние индексы у переменных

$$\begin{aligned} N' - Qw'' &= 0, & Q' + Nw'' &= 0, & M' - Q &= 0 \\ N &= Bu', & M &= -Dw'' \end{aligned} \quad (4.3)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Здесь штрих означает производную по x . Для сравнения приведем традиционную систему уравнений Кармана – Фешля

$$\begin{aligned} N' &= 0, & Q' + Nw'' &= 0, & M' - Q &= 0 \\ N &= B[u' + (w')^2/2], & M &= -Dw'' \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из первого уравнения (4.4) следует $N = -P$ и задача оказывается по существу линейной – нелинейный член в выражении для N позволяет лишь уточнить u , а при $|w'| \ll 1$ оказывается вообще несущественным. В результате система (4.4) позволяет найти критическое значение силы $P_k = \pi^2 D/l^2$ и форму потери устойчивости с точностью до постоянного множителя.

Что касается системы (4.3), то она сводится к уравнениям $N' + Dw'''w'' = 0$, $Dw^{IV} - Nw'' = 0$, решение которых показано на фиг. 3 сплошной линией. Для сравнения приведено точное решение задачи об эластике Эйлера. Из графика следует, что полученная нелинейная система позволяет удовлетворительно описать закритическую деформацию стержня при силе, близкой к критической.

Для решения уравнений (4.1) может быть предложена простая итерационная процедура, согласно которой усилия, входящие в нелинейные члены, в начальном приближении определяются из решения линейной задачи и затем последовательно уточняются. При этом на каждом этапе решаются линейные уравнения, в которых усилия в линеаризованных членах являются известными и соответствуют предыдущей итерации. На фиг. 4 представлены результаты такого расчета для днища равнонапряженного композитного баллона давления, изготовленного методом намотки [22]. По оси ординат отложено осевое перемещение нагруженного края, а по оси абсцисс – номер итерации.

В заключение рассмотрим безмоментный вариант построенной нелинейной теории. Считая, что оболочка является тонкой и ее стенка не сопротивляется изгибу, примем в соотношениях (3.15) $C_{mn} = D_{mn} = 0$ и при вычислении мембранных жесткостей B_{mn} будем считать, что радиусы кривизны не изменяются по толщине. Тогда уравнения (4.1) и (3.15) примут вид

$$\begin{aligned} L_1(N) + F_1 &= 0 \quad (1, 2) \\ \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} [A_2 N_1 \omega_{1,1} + N_{12} (A_1 \omega_{1,2} + A_2 \omega_{2,1}) + A_1 N_2 \omega_{2,2} - F_3] &= 0 \\ N_1 = B_{11} \varepsilon_1 + B_{12} \varepsilon_2 \quad (1, 2), \quad N_{12} = N_{21} = B_{33} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

где в соответствии с (3.19):

$$B_{mn} = \sum_{i=1}^k A_{mn}^{(i)} (t_i - t_{i-1})$$

$mn = 11, 12, 22, 33$. Система (4.5) в совокупности с геометрическими соотношениями (3.13) имеет шестой порядок, т. е. в отличие от классиче-

ской линейной системы позволяет наложить на краю оболочки условия на все компоненты перемещения. Действительно, граничные условия (4.2) записываются в рассматриваемом случае следующим образом:

при $\alpha_1 = \text{const}$ (1, 2):

$$N_1 \delta u_1 = 0, N_{12} \delta u_2 = 0, (N_1 \omega_1 + N_{12} \omega_2) \delta w = 0. \quad (1, 2)$$

т. е. включают условие для прогиба, отсутствующее в линейной теории.

Решение системы (4.5) может быть получено описанным выше итерационным методом. При этом, если пренебречь в начальном приближении нелинейными членами в системе (4.5), то она позволяет найти статически определяемые усилия N_1^0 , N_{12}^0 , N_2^0 . Подстановка этих усилий в нелинейные члены исходных уравнений приводит к линейной системе уравнений безмоментной теории, имеющей в совокупности шестой порядок, т. е. позволяющей закрепить край оболочки по отношению к перемещениям u_1 , u_2 , w .

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Некоторые вопросы развития теории анизотропных слоистых оболочек // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1964. 17. № 3. С. 29–53.
2. Ворovich И. И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. Вып. 3. Механика твердого тела. М.: Наука. 1965. С. 116–136.
3. Ворovich И. И., Шленев М. А. Пластины и оболочки // Итоги науки и техники. Механика. М.: ВИНТИ. 1965. 124 с.
4. Амбарцумян С. А. Специфические особенности теории оболочек из современных материалов // Изв. АН АрмССР. Механика. 1968. 21. № 4. С. 3–19.
5. Гольденвейзер А. Л. Методы обоснования и уточнений теории оболочек // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 684–695.
6. Александров А. Я., Куршин Л. М. Многослойные пластинки и оболочки // Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука. 1970. С. 714–721.
7. Галинъш А. К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям // Исследования по теории оболочек и пластин. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1967. Вып. 5. С. 66–92; 1970. Вып. 6–7. С. 23–64.
8. Новожиллов В. В. Краткий очерк развития теории оболочек в СССР // Исследования по теории оболочек и пластин. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1970. Вып. 6–7. С. 5–22.
9. Алузян Н. А. Теория упругих оболочек и пластинок // Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 227–266.
10. Григорюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. механика. 1972. 8. № 6. С. 3–18.
11. Тетерс Г. А. Пластины и оболочки из современных и композиционных материалов. Обзор // Механика полимеров. 1977. № 4. С. 486–492.
12. Дудченко А. А., Лурье С. А., Образцов И. Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ 1983. Т. 15. С. 3–68.
13. Власов В. З. Избранные труды. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР. 1962. 528 с.
14. Буяков И. А., Малиновский С. С. Экстремальные свойства некоторых вариантов уточненной теории неоднородных оболочек // Механика композит. материалов. 1986. № 3. С. 550–552.
15. Naghdi P. M. On the theory of thin elastic shells // Quart. Appl. Math. 1957. V. 14. P. 369–380.
16. Королев В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М.: Машиностроение. 1965. 272 с.
17. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка. 1973. 248 с.
18. Александров А. Я., Брюккер Л. Э., Куршин Л. М., Пруссаков А. П. Расчет трехслойных панелей. М.: Оборонгиз. 1960. 272 с.
19. Васильев В. В. Прикладная теория композитных оболочек // Механика композит. материалов. 1985. № 5. С. 843–852.
20. Naghdi P. M., Vongsarnpiogoon L. Some general results in the kinematics of axisymmetrical deformation of shells of revolution // Quart. Appl. Math. 1985. № 4. P. 23–36.
21. Новожиллов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз. 1958. 370 с.
22. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Буяков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение. 1977. 144 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.V.1987