МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1987

УДК 539.3

О ВЫНУЖДЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ОБОЛОЧЕК

ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР А. Л.

Выполнен асимптотический анализ линейных установившихся вынужденных колебаний оболочек в предположении, что они вызваны внешними гармоническими воздействиями, приложенными к краю оболочки.

Предложена классификация внешних воздействий и выявлены приближенные методы расчета, соответствующие каждому из них. Исследованы качественные особенности вынужденных колебаний в зависимости от изменяемости внешних воздействий в пространстве и во времени. Резонансные явления считаются исключенными (например, введением комплексного модуля упругости).

1. Возьмем уравнения движения оболочки в следующем виде:
тангенциальные уравнения

$$\nabla_\beta T^{s\beta}+\lambda v^s=0 \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_{st}={}^1/_2(\nabla_s v_t+\nabla_t v_s)+\{b_{st}w\} \tag{1.2}$$

$$T^{st}=(a^{\alpha s}a^{\beta t}+\nu c^{\alpha s}c^{\beta t}]\varepsilon_{\alpha\beta}/(1-\nu^2) \tag{1.3}$$

нетангенциальные уравнения

$$\nabla_\alpha M^{s\alpha}-N^s=0 \tag{1.4}$$

$$\mu_{st}=\nabla_t(\nabla_s w-\{b_s{}^\alpha v_\alpha\})+\{{}^1/_2 c_{\alpha s}b_t{}^\alpha c^{\beta\gamma}\nabla_\beta v_\gamma\} \tag{1.5}$$

$$M^{st}={}^1/_3(a^{\alpha s}a^{\beta t}+\nu c^{\alpha s}c^{\beta t})\mu_{\alpha\beta}/(1-\nu^2) \tag{1.6}$$

смешанное уравнение

$$b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}+\eta^2\nabla_\alpha N^\alpha-\lambda w=0,\quad \eta=h/R \tag{1.7}$$

В дальнейшем будут использованы и некоторые упрощенные варианты смешанного уравнения, а именно

$$b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}-\lambda w=0 \tag{1.8}$$

$$\eta^2\nabla_\alpha N^\alpha-\lambda w=0 \tag{1.9}$$

Уравнения разбиты на группы, удобные для дальнейшего изложения. Применена такая же тензорная символика, как, например, в [1]. Считается, что переменные (x^1, x^2) имеют размерность длины, временная переменная t исключена в предположении, что закон движения выражается функцией $\exp(i\omega t)$. Приняты следующие обозначения: a_{st}, c_{st} — метрический и дискриминантный тензоры; $R^{-1}b_{\alpha\beta}$ — тензор кривизны; $2EhT^{st}$, $2Eh^2\eta M^{st}$, $2Eh\eta^2N^s$ — тензоры тангенциальных усилий, моментов и перерезывающих усилий; Rv^s, Rw — тензор тангенциальных перемещений и нормальный прогиб; ε_{st}, $R^{-1}\mu_{st}$ — тензоры тангенциальной и изгибной деформаций; $R^{-1}\nabla_s$ — символ ковариантного дифференцирования; $R^{-2}\lambda=\rho\omega^2/E$ — частотный параметр; $2h$ — толщина оболочки; E — модуль Юнга; R — характерный радиус кривизны срединной поверхности; ρ — плотность материала оболочки. Все упомянутые величины, кроме h, E, R и ρ, безразмерны (под T^{st}, например, подразумевается безразмерный тензор тангенциальных усилий, полученный из соответствующего размерного тензора делением на $2Eh$) и для них приняты обозначения, обычно употребляемые для соответствующих размерных величин (см., например, [1]).

В равенствах (1.1)—(1.7) все члены безразмерны (в традиционные соотношения введены соответственно подобранные множители).

Искомые величины теории оболочек разобьем на тангенциальные (v_s, T^{st}, ε_{st}) и нетангенциальные (w, M^{st}, N^s, μ_{st}) и заметим, что большинство слагаемых в тангенциальных уравнениях содержат тангенциальные величины, а в нетангенциальных — нетангенциальные. Исключение представляют слагаемые, взятые в фигурные скобки. Они будут называться перекрестными (для смешанного уравнения это понятие смысла не имеет).

Замечание. В уравнении равновесия (1.1) опущено слагаемое с тензором перерезывающих усилий N^s, уравнения состояния взяты в простейшем виде и не учитывается шестое скалярное уравнение равновесия. Возможные последствия таких упрощений известны (см., например, [2]) и не оказывают влияния на дальнейшие выводы.

Будем считать, что x^1, x^2 — параметры координатной системы, обобщающей полярные координаты, т. е. область интегрирования уравнений (1.1)—(1.7) определяется неравенствами $x_1^1 \leqslant x^1 \leqslant x_2^1$, $x_1^2 \leqslant x^2 \leqslant x_2^2$, причем уравнениями $x^2 = x_1^2$ и $x^2 = x_2^2$ задается одна и та же координатная кривая, на которой должны выполняться условия периодичности. Кроме того, на каждой из границ $x^1 = x_1^1$ и $x^1 = x_2^1$ должны выполняться по четыре граничных условия. Для определенности примем, что два из них тангенциальные и два — нетангенциальные (первые формулируются относительно тангенциальных, а вторые — относительно нетангенциальных величин). Пользуясь принципом суперпозиции, будем считать, что только одно из четырех условий неоднородно и выражает факт приложения к соответствующему краю внешнего воздействия — обобщенной силы или обобщенного перемещения (тангенциального или нетангенциального в зависимости от смысла неоднородного граничного условия). Однородными граничными условиями при этом определяется характер закрепления краев. В дальнейшем для определенности считается, что закрепления достаточно жестки, т. е. исключают изгибания срединной поверхности.

2. Исходные динамические уравнения теории оболочек при выполнении некоторых требований можно различным образом упрощать отбрасывая второстепенные слагаемые.

1. Если справедливо сильное неравенство

$$b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \gg \eta^2 \nabla_\alpha N^\alpha \tag{2.1}$$

(здесь и дальше в такого рода неравенствах сравнение производится по модулям, а если речь идет о тензорах, то по модулям их наибольших компонент), то смешанное уравнение (1.7) можно брать в виде (1.8). Тогда тангенциальные уравнения (1.1)—(1.3) вместе с (1.8) образуют замкнутую систему безмоментных уравнений относительно тангенциальных величин (v_s, ε_{st}, T^{st}) и прогиба w. Этой системой и тангенциальными граничными условиями, вообще говоря, величины v_s, ε_{st}, T^{st}, w определяются единственным образом (исключение могут представлять, например, оболочки с краями, проходящими вдоль асимптотических линий срединной поверхности). Оставшиеся величины μ_{st}, M^{st}, N^s можно затем построить прямыми действиями при помощи нетангенциальных уравнений (1.4)—(1.6), считая, что в них тангенциальные величины и прогиб w уже известны. В полученном таким образом напряженно-деформированном состоянии будут содержаться нетангенциальные невязки (нарушения нетангенциальных граничных условий).

2. Если справедливо сильное неравенство

$$\nabla_s v_t + \nabla_t v_s \gg b_{st} w \tag{2.2}$$

то в тангенциальных уравнениях (1.1)—(1.3) можно отбросить перекрестные члены. Тогда эти уравнения образуют замкнутую систему относительно тангенциальных величин, которую назовем уравнениями плоской теории оболочек. Они единственным образом определят v_s, ε_{st}, T^{st}, удовлетворяющие тангенциальным граничным условиям. При построении нетангенциальных величин возможны два случая.

Если выполняется неравенство (2.1), то w определяется алгебраически из уравнения (1.8), а μ_{st}, M^{st}, N^s строятся прямыми действиями при помощи нетангенциальных уравнений (1.4)—(1.6) в предположении, что w, v_s известны.

Если вместо (2.1) выполняется неравенство

$$\eta^2\nabla_s N^s \gg b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \tag{2.3}$$

то все нетангенциальные величины определяются из нетангенциальных уравнений (1.4)—(1.6), в которых перекрестные члены должны рассматриваться как известные, и из смешанного уравнения (1.9).

В первом случае нетангенциальные величины будут содержать нетангенциальные невязки, а во втором — можно выполнить и нетангенциальные граничные условия.

3. Если справедливо сильное неравенство (2.3) и, кроме того

$$\nabla_s\nabla_t w \gg \max\{\nabla_t b_s^{\alpha} v_\alpha;\ {}^1/_2 c_{\alpha s} b_t^{\alpha} c^{\beta\gamma}\nabla_\beta v_\gamma\} \tag{2.4}$$

то в нетангенциальных уравнениях (1.4)—(1.6) можно отбросить перекрестные слагаемые. Тогда эти уравнения вместе со смешанным уравнением в виде (1.9) образуют замкнутую систему относительно нетангенциальных величин, которую назовем уравнениями изгибной теории оболочек. Вместе с нетангенциальными граничными условиями они определяют нетангенциальные величины. Тангенциальные величины затем определяются из уравнений (1.1)—(1.3) и тангенциальных граничных условий в предположении, что в них известны перекрестные члены.

В статической теории оболочек существенную роль играет так называемый простой краевой эффект. Под ним подразумевается напряженно-деформированное состояние, локализованное вблизи некоторой неасимптотической линии искажения γ и имеющее во всех направлениях, кроме направления касательной к γ, постоянный показатель изменяемости, равный $^1/_2$. В теории свободных колебаний это понятие формально обобщено в [1] и для построения соответствующего напряженно-деформированного состояния предложена приближенная теория. В ней интегрирование полной системы уравнений теории оболочек сведено к уравнению

$$[{}^1/_3\eta^2/(1-\nu^2)]\partial^4 w+(R_2^{-2}-\lambda)w=0 \tag{2.5}$$

в котором R_2 — безразмерный (выраженный в долях R) нормальный радиус кривизны срединной поверхности в направлении γ; ∂ — символ дифференцирования по безразмерной длине дуги s-линии, ортогональной γ.

В [1] приведены формулы, выражающие через w все остальные перемещения, усилия и моменты оболочки. Не повторяя их, назовем полученное таким образом напряженно-деформированное состояние динамическим краевым эффектом.

При выводе уравнения (2.5) принимается, что в каждой точке рассматриваемой области существуют два взаимно ортогональных направления γ_1, γ_2, таких, что в направлении γ_2 изменяемость искомого напряженно-деформированного состояния существенно меньше, чем в направлении γ_1, и считается, что параметр s меняется в направлении γ_1.

В статике (при $\lambda=0$) коэффициент при w в (2.5) положителен. Это значит, что краевой эффект экспоненциально затухает при удалении от γ. Поэтому можно принять, что кривая γ определяет направление γ_2 в той малой окрестности γ, где практически достаточно строить краевой эффект. В динамике, при достаточно большом λ знак коэффициента при w в (2.5) может измениться, а это значит, что некоторые экспоненциально затухающие решения заменятся осциллирующими. Тогда возникнет сложный вопрос о продолжении динамического краевого эффекта за пределы малой окрестности γ (здесь не рассматриваемый). Заметим только, что этот вопрос снимается для замкнутой оболочки вращения, если линия искажения γ совпадает с параллелью географической системы координат. В этом случае направление γ_2 будет и вдали от γ совпадать с направлением параллели.

3. Примем, что справедливы следующие предположения.

1. Имеют место асимптотические соотношения

$$\nabla_1 P\sim\eta^{-q}P,\ \nabla_2 P\sim\eta^{-p}P \qquad (3.1)$$

2. Асимптотики решений приближенных уравнений предыдущего параграфа, при соответствующих граничных условиях, в случае, когда $p=q$, выражаются такими соотношениями:

для безмоментной теории

$$w\sim\eta^{-p}v_s\sim\varepsilon_{st}\sim T^{st}\sim\eta^{2p}M_{st}\sim\eta^{2p}M^{st}\sim\eta^{3p}N^s \qquad (3.2)$$

для плоской теории оболочек

$$v_s\sim\eta^p T^{st}\sim\eta^p\varepsilon^{st} \qquad (3.3)$$

для изгибной теории оболочек

$$w\sim T^{st}\sim\eta^{2p}\mu_{st}\sim\eta^{2p}M^{st}\sim\eta^{3p}N^s\sim\eta^{4p}\nabla_s N^s \qquad (3.4)$$

(под $\sim$ всюду подразумевается знак асимптотической соизмеримости). В (3.1) P — символ любой искомой функции или ее производной произвольного порядка. Соотношения (3.1) выражают предположение, что в рассматриваемой области каждое дифференцирование искомых функций и их производных по x^1 и x^2 приводит к изменению асимптотического порядка дифференцируемой функции, эквивалентное появлению множителя $-\eta^{-q}$ или η^{-p} соответственно. Под p и q подразумеваются показатели изменяемости искомых величин по переменным x^1 и x^2.

Обстоятельства, при которых предположение 1 оправдано, обсуждаются в п. 7. Предположения 2 вводятся лишь для краткости изложения. Их можно подтвердить простыми, но громоздкими выкладками.

Определим асимптотический порядок частотного параметра λ формулой

$$\lambda=\eta^{-2a}\Lambda,\ \Lambda\sim\eta^0 \qquad (3.5)$$

и назовем a показателем динамичности рассматриваемой задачи. Тогда при помощи (3.1)—(3.5) можно оценить каждое отдельно взятое слагаемое в уравнениях теории оболочек и найти предельное равенство, соответствующее данному уравнению. Под этим подразумевается равенство, в котором оставлены только асимптотически главные члены (последние могут оказаться разными для разных асимптотик (3.2)—(3.3)).

В безмоментной теории, когда асимптотика соответствующего напряженно-деформированного состояния имеет вид (3.2), должны выполняться неравенства

$$p<{}^1/_2,\ a\leqslant a_{(1)}=0 \qquad (3.6)$$

Первое из них в силу (3.2) необходимо для выполнения допущения (2.1) (здесь и дальше в подобных утверждениях учитываются без специального упоминания и соотношения (3.1)). Второе соотношение (3.6) необходимо потому, что иначе предельное равенство, соответствующее в безмоментной системе уравнению (1.8), приобретает вид $\lambda w=0$, противоречащий асимптотике (3.2).

В плоской теории оболочек справедлива асимптотика (3.3) и должны выполняться неравенства

$$0<p<1,\ 0<a\leqslant a_{(2)}=p \qquad (3.7)$$

Если будет нарушено ограничение значений a сверху, то предельное равенство, соответствующее уравнению (1.1), приобретает вид $\lambda v^s=0$, противоречащий асимптотике (3.3). Ограничение значений a снизу необходимо только при $p<{}^1/_2$. Тогда из (3.3) будет следовать возможность брать смешанное уравнение в виде (1.8). Из него алгебраически определится прогиб w, асимптотика которого согласно (3.3), (3.5) выразится так: $b_{st}w\sim\eta^{-p+2a}v_s\sim\eta^{2a}\nabla_t v_s$. Отсюда вытекает, что неравенство $a>0$ необходимо для выполнения соотношения (2.2). При $p>{}^1/_2$ в нем нет необходимости, так как тогда смешанное уравнение надо брать в виде (1.9).

В изгибной теории асимптотика напряженно-диформированного состояния имеет вид (3.4), а необходимые неравенства записываются в виде

$$p>{}^1/_2,\ a<a_{(3)}=2p-1 \qquad (3.8)$$

Первое из них обеспечивает применимость уравнения (1.9), а второе, в силу (3.4), должно выполняться для того, чтобы предельное равенство, соответствующее уравнению (1.9), не приняло вид $\lambda w=0$, противоречащий асимптотике (3.4).

4. В п. 3 рассуждения базировались на принятии равенства $q=p$, т. е. постулировалось, что в безмоментной, плоской и изгибной теориях решения соответствующих краевых задач являются равноизменяющимися. Здесь и дальше под этим подразумеваются решения, имеющие всюду в рассматриваемой области постоянные и одинаковые показатели изменяемости. Выявилось, однако, что равенство $p=q$ не приводит к противоречию лишь тогда, когда показатель динамичности a меньше некоторого критического значения a_*, различного для разных из перечисленных теорий. А именно, из формул (3.6)–(3.8) получаем следующие критические значения показателя динамичности a для безмоментной, плоской и изгибной теорий:

$$a_*=a_{(1)}=0,\ a_*=a_{(2)}=p,\ a_*=a_{(3)}=2p-1 \qquad (4.1)$$

Следуя терминологии [3], будем называть безмоментную, плоскую и изгибную теории вынужденных колебаний оболочек квазистатическими при $a<a_*$, среднединамическими при $a=a_*$ и сильнодинамическими при $a>a_*$ (в [3] среднединамические задачи назывались просто динамическими). Из рассуждений п. 3 можно заметить, что в квазистатических задачах в самом грубом приближении можно не учитывать инерционные члены. Для среднединамических задач учет соответствующих слагаемых становится обязательным при любой степени приближенности. Сильнодинамический случай требует особого рассмотрения, основанного на отказе от равенства $p=q$.

Определим для сильнодинамических задач показатель q для плоской и изгибной теорий следующим образом:

$$q=a,\ q={}^1/_2(1+a) \qquad (4.2)$$

Тогда согласно (3.7), (3.8) будет выполняться неравенство $q>p$. Поэтому в соотношениях (3.2)–(3.4) надо заменить p на q, так как такого рода асимптотики определяются наибольшим показателем изменяемости. Но тогда, повторив рассуждения п. 3, получим, что в предельных равенствах, соответствующих (1.1), (1.8), сохранятся все слагаемые этих уравнений, т. е. исчезнут противоречия, получавшиеся при $q=p$. Отсюда следует, что в плоской и изгибной теориях сильнодинамические задачи, в отличие от квазистатических, среднединамических, могут иметь только разноизменяющиеся решения (с преобладанием изменяемости в ортогональном к краю направлении). Непротиворечивой сильнодинамической безмоментной теории не существует. Дальше при обсуждении возможных приближенных методов исследования вынужденных колебаний выяснится, что не существует и ситуации, в которой надо было бы решать задачи сильнодинамической безмоментной теории.

Понятия о показателе динамичности a и показателях изменяемости q, p очевидным образом можно перенести на свободные колебания: a определится по частотному параметру λ при помощи формулы (3.5); под p и q надо понимать показатели изменяемости напряженно-деформированных состояний, возникающих при данных колебаниях. Сравнивая результаты [1] с формулами (4.2), можно дать следующую интерпретацию критическим значениям a_* показателя динамичности. В безмоментной теории a_* соответствует динамичности свободных квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью, в плоской теории – динамичности квазитангенциальных колебаний; в изгибной теории – динамичности квазипоперечных колебаний с большей изменяемостью. В двух последних случаях речь идет о колебаниях с равноизменяющимися напряженно-деформированными состояниями.

Если $a<a_*$, то с некоторой степенью приближенности краевые задачи для безмоментной, плоской и изгибной теории можно решать как квази-

статические, т. е. без учета инерционных членов, при этом качественные свойства решений останутся такими же, как в статике и, в частности, решения, вообще говоря, будут равноизменяющимися (подробнее об этом говорится в п. 7). При $a=a*$ (среднединамический случай) учет инерционных членов станет обязательным. При $a>a*$ имеет место сильнодинамический случай: безмоментная теория станет неприменимой, а асимптотические свойства решений краевых задач изменятся. В частности, они станут разноизменяющимися.

Динамический краевой эффект в зависимости от значений a также можно подразделить на квазистатический ($a<0$), среднединамический ($a=0$) и сильнодинамический ($a>0$). Такая классификация физически оправдана следующими соображениями.

Учитывая (3.5), разрешающее уравнение динамического краевого эффекта (2.5) можно брать для квазистатического случая в виде

$$[{}^1/_3\eta^2/(1-\eta^2)]\partial^4 w+w/R_2^2=0 \tag{4.3}$$

для среднединамического случая в виде (2.5) и для сильнодинамического случая в виде

$$[{}^1/_3\eta^2/(1-\eta^2)]\partial^4 w-\lambda w=0 \tag{4.4}$$

Отсюда следует, что квазистатический краевой эффект (4.3) определяет напряженно-деформированное состояние, экспоненциально затухающее при удалении от линии искажения, сильнодинамический краевой эффект определяет напряженно-деформированное состояние, в котором наряду с экспоненциально затухающими составляющими содержится и проникающая сильно осциллирующая составляющая. Наиболее сложным является среднединамический краевой эффект (2.5).

Пусть, для определенности, речь идет о замкнутой оболочке вращения, ограниченной двумя краями γ_1, γ_2, совпадающими с параллелями географической системы координат. Обозначим через $R_{2,j}$ $(j=1, 2)$ радиус нормальной кривизны вдоль параллели на γ_j и примем, что для рассматриваемой оболочки R_2 меняется монотонно. Тогда возможны три ситуации: $\max R_2<\lambda^{-1/2}$. При этом всюду выполнится неравенство $-R_2^{-2}-\lambda>0$ и напряженно-деформированное состояние среднединамического краевого эффекта будет качественно вести себя, как в квазистатическом случае; $\max R_2>\lambda^{-1/2}$. При этом всюду $R_2^{-2}-\lambda<0$ и рассматриваемое напряженно-деформированное состояние будет содержать составляющую, сильноосциллирующую на всей оболочке; $R_{2,1}^{-2}>\lambda>R_{2,2}^{-2}$. При этом знак выражения $R_2^{-2}-\lambda$ будет меняться на параллели γ_0 (переходная линия в терминах [1]); левее γ_0 имеет место экспоненциальное затухание, а правее в рассматриваемое напряженно-деформированное состояние войдет сильноосциллирующая составляющая.

5. Будем считать возможными следующие шесть видов краевых воздействий. Тангенциальные воздействия (t_1), (t_2), (t_3), для которых показатели p и a подчиняются соответственно требованиям

$$p<{}^1/_2,\ a\leqslant a_{(1)}=0 \tag{5.1}$$

$$p<{}^1/_2,\ 0<a<a_{(2)}=p \tag{5.2}$$

$$1>p>{}^1/_2,\ a<a_{(3)}=2p-1 \tag{5.3}$$

и нетангенциальные воздействия (n_1), (n_2), (n_3), также удовлетворяющие требованиям (5.1) — (5.3) соответственно. Для каждого из этих воздействий существует свой формулируемый дальше приближенный метод решения задачи вынужденных колебаний.

Краевое воздействие (t_1). Для него выполняются неравенства (5.1), представляющие собой условия применимости безмоментой теории. Поэтому тангенциальные величины и прогиб w можно определить как решение безмоментных уравнений (п. 2), удовлетворяющее тангенциальным граничным условиям. Оставшиеся величины μ_{st}, M^{st}, N^s строятся как описано в п. 2 и дают, вообще говоря, нетангенциальные невязки. Их можно устранить распоряжаясь произволами приближенной теории динамического краевого эффекта, применимость которой обеспечивается первым неравенством (5.1).

Краевое воздействие (t_2). Для него выполняются неравенства (5.2). Входящее в них ограничение $a>0$ обеспечивает применимость уравнений плоской теории. Они позволяют определить тангенциальные величины и выполнить тангенциальные граничные условия. Прогиб w после этого находится алгебраически из смешанного уравнения, которое в силу первого неравенства (5.2) можно брать в виде (1.8). Оставшиеся нетангенциальные уравнения (1.4)—(1.6) позволяют выразить прямыми действиями величины μ_{st}, M^{st}, N^s через w, v_s. Нетангенциальные невязки, содержащиеся в полученном таким образом напряженно-деформированном состоянии, можно обычным образом устранить при помощи динамического краевого эффекта, так как $p<{}^1/_2$.

Краевое воздействие (t_3). Для него из (5.3) вытекает, в частности, что $a<2p-1<p$. Поэтому тангенциальные величины можно определить из уравнений плоской теории оболочек и тангенциальных граничных условий. Для определения нетангенциальных величин останутся нетангенциальные уравнения (1.4)—(1.6) и смешанное уравнение, которое в силу первого неравенства (5.3) можно брать в виде (1.9). В этих уравнениях величины v_s можно считать известными. Следовательно, они составляют неоднородную систему уравнений изгибной теории оболочек, позволяющую определить нетангенциальные величины с выполнением нетангенциальных граничных условий.

Заметим, что тангенциальные краевые воздействия (t_1)—(t_3) задаются граничными соотношениями, в которых неоднородно лишь одно из тангенциальных граничных условий. Наоборот, для нетангенциальных воздействий (n_1)—(n_3) неоднородно только одно из нетангенциальных граничных условий. В этом случае сформулированные для (t_1)—(t_3) итерационные процессы не пригодны. Они приводят на исходном этапе к тривиальным (нулевым) решениям. Для воздействий (n_1)—(n_3) порядок выполнения операций должен быть изменен на обратный. Так, например, для краевого воздействия (n_1) надо сначала строить простой краевой эффект, а затем решать безмоментную задачу.

Каждый из предлагаемых здесь приближенных подходов приводит к последовательному решению двух краевых задач. Используя терминологию [1], назовем их главной и дополнительной. В первой учитываются граничные условия, задающие рассматриваемое краевое воздействие. Во второй — снимаются возникшие при этом невязки. Соответственно можно считать, что и напряженно-деформированное состояние состоит из главного и дополнительного. Первое из них, вообще говоря, определяет исходное приближение искомого напряженно-деформированного состояния, а второе — вносит первую поправку. Однако это правило допускает и исключение. А именно, для краевого воздействия (t_1) главное и дополнительное напряженно-деформированные состояния дают одинаковый вклад, а сходимость процесса выявляется лишь в следующих приближениях (это показано в [1] на примере свободных колебаний).

Каждому виду краевых воздействий соответствует свое главное напряженно-деформированное состояние. А именно, для (t_1) оно безмоментное, для (t_2), (t_3) — плоскостное; для (n_3) — изгибное; для (n_1), (n_2) главным является динамический краевой эффект.

Замечания. Термины плоскостное и изгибное состояния связаны с тем, что определяющие их уравнения формально совпадают с уравнениями плоской теории упругости и теории изгиба пластинки.

Для каждого из введенных выше шести видов краевых воздействий в соотношениях (5.1)—(5.3) указано некоторое ограничение сверху для числа a. Если оно нарушается для (t_1) или (n_1), то такие краевые воздействия надо отнести к видам (t_2) или (n_2) соответственно. Если a выходит за указанные рамки для краевых воздействий (t_2), (n_2), (t_3), (n_3), то это значит, что решения соответствующих главных задач изменят характер и, в частности, станут разноизменяющимися для плоскостных и изгибных напряженно-деформированных состояний.

6. Обсудим правомерность многократно использованных формул (3.1). Эти соотношения выражают предположение, что всюду в рассматриваемой области искомые функции P и любые их производные по координатным переменным x^1, x^2 при каждом новом дифференцировании по x^1, x^2 претерпевают изменение асимптотики, эквивалентное появлению соответственных множителей η^{-q}, η^{-p}, где q и p $(q \geqslant p)$ не зависят от x^1, x^2.

Примером функции, обладающей таким свойством, является

$$\Phi=\varphi \exp(kf), \quad k=\eta^{-q}$$
$$\varphi=\sum_{r=0}^{R}\eta^{-\chi r}\varphi_r, \qquad f=f_0+\eta^{q-p}f_1 \tag{6.1}$$

Здесь k – сколь угодно большой (при $\eta \to 0$) параметр; χ – фиксированное положительное число: φ_r, f_0, f_1 – функции, не зависящие от η.

Обозначим через $\partial/\partial\mu$ символ дифференцирования в направлении μ, тогда можно записать

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}=\eta^{-q}\left(\frac{\partial f_0}{\partial\mu}\varphi+\eta^{q-p}\frac{\partial f_1}{\partial\mu}\varphi+\eta^{q}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)\exp(kf) \tag{6.2}$$

Отсюда видно, что производная от Φ есть также функция вида (6.1) и, вообще говоря, изменение ее асиптотики в результате каждого дифференцирования эквивалентно появлению множителя η^{-q}. Исключение имеет место тогда и только тогда, когда $\partial f_0/\partial\mu\equiv 0$. В этом случае формула (6.2) примет вид $\partial\Phi/\partial\mu=\eta^{-p}(\varphi\partial f_1/\partial\mu+ +\eta^{p}\partial\varphi/\partial\mu)\exp(kf)$. Она показывает, что при дифференцировании в таком направлении изменение асимптотики эквивалентно появлению множителя η^{-p}. Направление μ, обладающее таким свойством, назовем квазистационарным, а линию, касательная к которой всюду имеет направление μ, квазистационарной.

Таким образом, для функции (6.1) соотношения (3.1) выполняются. При этом в них надо положить $q=p$, если x^1- и x^2-линии не квазистационарны, и считать, что $q>p$, если x^1-линии не квазистационарны, а x^2-линии квазистационарны.

В [2] рассмотрен вопрос о возможности составления из функции вида (6.1) решений различных краевых задач для дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. Ниже будем без объяснений формулировать некоторые утверждения, вытекающие из изложенных в [2] результатов.

Будем считать, что интегралы вида (6.1) строятся традиционным методом: функция (6.1) подставляется в рассматриваемое уравнение, отбрасывается экспоненциальный множитель и последовательно приравниваются нулю коэффициенты при различных степенях k в нисходящем порядке. Тогда будут справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Если линейное дифференциальное уравнение четного порядка m имеет вид

$$M(\Phi)\equiv\sum_{\rho=0}^{m}\sum_{s=0}^{\rho}m_{\rho,s}\frac{\partial^s\Phi}{(\partial x^1)^s(\partial x^2)^{\rho-s}}=0 \tag{6.3}$$

причем его коэффициенты $m_{\rho,s}$ (вообще, переменные) не зависят от малого параметра η, то для него можно построить такие и только такие решения вида (6.1), в которых все квазистационарные линии совпадают с одним из семейств характеристик уравнения (6.3). Такие решения называются интегралами, соответствующими данному семейству характеристик, при этом каждому r-кратному семейству действительных или комплексных характеристик соответствует некоторая совокупность (вообще, комплексных) интегралов вида (6.1), которую в некотором смысле также можно назвать r-кратной.

Утверждение 2. Если линейное уравнение зависит от η следующим образом:

$$\eta^{2b}N(\Phi)+L(\Phi)=0 \tag{6.4}$$

где b – заданное число; N и L – такие же, как и M, не зависящие от η операторы четных порядков n и l $(n>l)$, то для такого уравнения можно строить решения двух типов:

1. Так называемые интегралы с заданным нехарактеристическим опорным контуром γ, т. е. решения, в которых квазистационарной является зависящая от выбора линия γ, нигде не касающаяся характеристик операторов N и L. В этом решении всюду на γ показатель изменяемости во всех направлениях, кроме γ, определяется формулой

$$q=2b/(n-l) \tag{6.5}$$

а в направлении γ показатель изменяемости p можно задавать произвольно при условии

$$p<2b/(n-l) \tag{6.6}$$

2. Интегралы, соответствующие характеристикам оператора N. Показатель изменяемости q во всех неквазистационарных направлениях в таких интегралах может задаваться произвольно при условии $q>2b/(n-l)$.

7. В [2] показано, что интегралы типа (6.1) без дополнительных принципиальных трудностей можно строить и для систем дифференциальных уравнений. В этом случае останутся в силе оба сформулированных в п. 6 утверждения. Поэтому с точки зрения проводимых качественных рассуждений можно говорить об эквивалентности системы дифференциальных уравнений некоторому единому уравнению, а критериями эквивалентности должны служить единство семейств характеристик и характер зависимости от малого параметра.

Показано также, что решение краевых задач теории оболочек, как правило, можно представить в виде

$$\Phi=\sum_s \Phi^{(s)},\quad \Phi^{(s)}=\varphi^{(s)}\exp(k_s f^{(s)}),\quad k_s=\eta^{-q_s} \tag{7.1}$$

где $\Phi^{(s)}$ — функция вида (6.1), а число слагаемых равно порядку уравнения задачи.

Свойства суммы (7.1) формулируются сложнее, чем свойства отдельно взятых $\Phi^{(s)}$. Однако, если в (7.1) k_s не зависят от s и x^1- и x^2-линии не являются характеристиками рассматриваемой системы уравнений, то сумма (7.1) обладает теми же свойствами, что и каждая функция $\Phi^{(s)}$. Эти свойства в таком случае будут присущи и решению данной краевой задачи.

Доказательство законности представления (7.1) проводится в [2] лишь для решения статических задач теории оболочек. Оно существенно опирается на то, что в статике слагаемые в $\Phi^{(s)}$, обычно разделяются на экспоненциально затухающие и экспоненциально возрастающие при удалении от краев, а появление $\Phi^{(s)}$, осциллирующих без существенного возрастания или убывания, является в статике редким исключением (в этих случаях представление (7.1) может оказаться неоправданным). Для среднединамических и сильнодинамических задач теории вынужденных колебаний оболочек характерно появление в сумме (7.1) слагаемых, осциллирующих без затухания, и вопрос о правомерности представления (7.1) в общем случае становится весьма сложным.

Для оболочек вращения, когда их края совпадают с параллелями географической системы координат, вопрос о законности представления (7.1) в динамике также остается достаточно простым и, вообще говоря, положительно решается в тех же случаях, что и в статике. Исключение может возникнуть только тогда, когда в динамике имеет место резонанс. Дальше всегда, когда речь идет о средне- или сильнодинамических задачах, предполагается, что рассматриваются лишь описанные выше оболочки вращения и резонансы исключены, например, учетом демпфирующих слагаемых.

Системам уравнений для главных квазистатических задач безмоментной, плоской и изгибной теорий оболочек эквивалентно уравнение (6.3) при $m=4$: эти системы не зависят от малого параметра η и имеют во всех случаях по четыре семейства характеристик (с учетом кратности). Это значит, что решения главных задач по любой из перечисленных приближенных теорий имеют вид (7.1). В нем надо считать, что суммы состоят из четырех членов и каждому семейству характеристик (с учетом кратности) отвечает свое слагаемое.

Семействам мнимых характеристик обсуждаемых систем соответствуют равноизменяющиеся ($q=p$) функции $\Phi^{(s)}$, а семействам действительных характеристик — разноизменяющиеся ($q>p$) с квазистационарными линиями, проходящими вдоль характеристик. Но системы уравнений главных задач являются эллиптическими для безмоментной теории оболочек положительной кривизны, а также (при любом знаке кривизны) для плоской и изгибной теорий. Поэтому можно утверждать, что, вообще говоря, для рассматриваемых задач все члены суммы (7.1) будут равноизменяющимися функциями ($p=q=\mathrm{const}$). Исключение может представить лишь главная задача безмоментной теории для оболочки неположительной кривизны. Вместе с тем на краю, испытывающем внешнее воздействие, показатель изменяемости известен (он равен p — показателю изменяемости граничного условия). Это значит, что в сумме (7.1) параметр k_s не зависит от $s(k_s=\eta^{-q}=\eta^{-p})$. Следовательно, решения обсуждаемых задач являются равноизменяющимися и предположение (3.1) для них подтверждается.

Замечание. Оболочки неположительной кривизны (и только они) с рассматриваемой точки зрения могут оказаться особыми, но на этом вопросе останавливаться не будем.

Система уравнений главной сильнодинамической задачи изгибной теории оболочек эквивалентна уравнению

$$\eta^2 N(\Phi)+\eta^{-2a}L(\Phi)=0 \qquad (7.2)$$

в котором надо считать, что $n=4$, оператор N — всегда эллиптический, $l=0$ (L — не оператор, а функция).

Уравнение (7.2) переходит в (6.4) при $b=1+a$. Отсюда следует, что для (7.2) можно построить некоторую совокупность интегралов с нехарактеристическим опорным контуром γ, в которых показатель изменяемости по x^1 в соответствии с (6.5) определяется формулой

$$q={}^1/_2(1+a) \qquad (7.3)$$

а показатель изменяемости по x^2 зависит от выбора, но должен согласно (6.6) подчиняться условию

$$p<{}^1/_2(1+a) \qquad (7.4)$$

Совместим во всех членах суммы (7.1) опорный контур γ с краем оболочки (он будет заведомо нехарактеристическим поскольку N — эллиптический оператор, а L — функция) и выберем число p равным показателю изменяемости граничных условий. Тогда сумма (7.1) образует некоторое решение задачи сильнодинамической изгибной теории, достаточно общее, чтобы его можно было подчинить нетангенциальным граничным условиям [2]. В построенном таким образом решении все слагаемые суммы (7.1) являются разноизменяющимися функциями. При любом s их показатель изменяемости q_s определится формулой (7.3), а под p_s надо подразумевать p — показатель изменяемости граничных условий. Таким образом, предположение (3.1) оправдывается. Отметим, что в этом решении должно выполняться неравенство (7.4), из которого вытекает, что $q>p$.

Если в (7.4) знак неравенства заменится на обратный, то в сумме (7.1) все слагаемые надо заменить интегралами, соответствующими характеристикам оператора N. Тогда придем к равноизменяющемуся решению, для которого будет справедливо предположение (3.1) при $q=p$.

Система уравнений главной сильнодинамической плоской задачи эквивалентна уравнению $(N+\eta^{-2a}L_1)(N+\eta^{-2a}L_2)(\Phi)=0$, где N — эллиптический оператор ($n=2$), L_1 L_2 — операторы нулевого порядка ($l_1=l_2=0$).

В этом случае сумму (7.1) можно составить из должным образом подобранных решений двух уравнений $\eta^{2a}N(\Phi)+L_1\Phi=0$, $\eta^{2a}N(\Phi)+L_2\Phi=0$. Каждое из этих равенств тождественно уравнению (6.4) при $n=2$, $l=0$, $b=a$. Поэтому остается в силе утверждение 2 (п. 6), из которого следует, что существуют две возможности:

составить сумму (7.1) из интегралов с опорным контуром γ (заведомо нехарактеристическим), совпадающим с краем оболочки, положив в них согласно (6.5) $q=a$ и считая, что p — показатель изменяемости тангенциальных граничных условий; условием применимости этой возможности является $p<a$, вытекающее из (6.6);

составить сумму (7.1) из интегралов, соответствующих характеристикам дважды повторенного оператора N. Это приведет к равноизменяющемуся решению.

Случай, когда главной является задача построения динамического краевого эффекта, не представляет трудности. Он рассмотрен в [2] для квазистатического случая и в [1] для среднединамического и сильнодинамического случаев. Решение является разноизменяющимся, а предположение (3.1) оправдывается при любой степени динамичности. Показатель q определяется следующими формулами: $q={}^1/_2$ при $p<{}^1/_2$; $q={}^1/_2(1+a)$ при ${}^1/_2<p<{}^1/_2(1+a)$.

Если p — показатель изменяемости граничных условий — удовлетворяет неравенству $p>{}^1/_2+a/2$, то сумму (7.1) надо составить из интегралов, соответствующих характеристикам оператора, эквивалентного оператору изгибной теории оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука. 1979. 383 с.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Классификация интегралов динамических уравнений линейной двумерной теории оболочек. // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 591—603.

Москва Поступила в редакцию 11.IX.1986