

УДК 539.375

УСТОЙЧИВОСТЬ И РОСТ ТРЕЩИН ПРИ НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВНЕШНИХ НАГРУЗКАХ

БОЛОТИН В. В.

В механике тел с трещинами [1] предложен ряд подходов для установления условий устойчивости и роста трещин: соотношения глобального энергетического баланса, асимптотика поля напряжений у фронта трещин, анализ потока энергии через поверхность, окружающую фронт трещин, различные модели концевой зоны. При определенном комплексе условий (малость размеров концевых зон по сравнению с характерными размерами трещин, упругое деформирование материала всюду, за исключением концевых зон) эти подходы приводят к тождественным или эквивалентным результатам. Кроме того, обычно предполагают (хотя явно не формулируют) потенциальный характер внешних нагрузок. Это предположение присутствует, например, в виде «потенциальной энергии тела», которая включает помимо потенциальной энергии деформации потенциальную энергию внешних сил. Для тонких и гибких тел отсутствие потенциала внешних сил может существенно повлиять на общий характер равновесия и движения [2]. Цель статьи состоит в том, чтобы показать, какие изменения вносит в задачи механики разрушения учет непотенциального характера внешних сил. В основу положен обобщенный подход Гриффитса, трактуемый в терминах аналитической статки [3]. На модельных примерах продемонстрированы некоторые качественные отличия задач механики разрушения при наличии непотенциальных сил. Рассмотрены различные типы подрастания трещин и смены устойчивости, включающие как переход к неустойчивости по Гриффитсу, так и потерю устойчивости равновесия по Ляпунову.

1. Рассмотрим условия равновесия системы «тело с трещинами — нагрузка». Вычислим виртуальную работу δA всех внешних и внутренних сил при следующем комплексе условий: время, заданные силы и заданные перемещения не подлежат варьированию (хотя, например, «следящие» силы перемещаются и поворачиваются вместе с малыми перемещениями и вращениями при варьировании поля перемещений); как в невозмущенном, так и в смежных состояниях удовлетворены все уравнения равновесия и совместности деформаций (кроме, может быть, малой окрестности фронтов трещин); при фиксированных размерах трещин все сравниваемые состояния устойчивы по Ляпунову. Тогда единственными варьируемыми параметрами будут величины l_1, \dots, l_m , характеризующие размеры трещин. Эти параметры играют роль обобщенных координат системы при данном способе варьирования, который в [3] было предложено называть варьированием по Гриффитсу.

Пусть все трещины — необратимые. Всегда можно выбрать параметры l_1, \dots, l_m так, что условия необратимости примут вид $\delta l_j \geq 0, j=1, \dots, m$. Это означает, что система «тело с трещинами — нагрузка» трактуется как механическая система с конечным числом степеней свободы и с односторонними (неудерживающими) идеальными связями. Эти связи можно считать идеальными, если учитывать работу, идущую на повреждение и разрушение на фронтах трещин, при помощи дополнительных соотношений. Число степеней свободы может быть также бесконечным и счетным, а также континуальным (последнее — в самом общем случае задания формы и размеров трещин [4]). В дальнейшем для определенности полагаем число m конечным.

Состояние системы назовем субравновесным, если для любой совокупности отличных от нуля вариаций δl_j имеет место неравенство $\delta A < 0$. При этом в соответствии с принципом виртуальных перемещений для систем с односторонними связями система «тело с трещинами — нагрузка» будет

находиться в равновесии по отношению к обобщенным координатам l_1, \dots, l_m . Если при некоторых $\delta l_j > 0$, где $j=1, \dots, m$, $m_1 \leq m$, имеем $\delta A = 0$, а при остальных вариациях $\delta A < 0$, то состояние назовем равновесным по координатам l_1, \dots, l_{m_1} . Если существуют такие $\delta l_j > 0$, что $\delta A > 0$, то состояние системы назовем неравновесным.

Субравновесные состояния устойчивы, а неравновесные неустойчивы по отношению к малым приращениям размеров трещин. Устойчивость равновесных трещин зависит от знака вариации по Гриффитсу $\delta^2 A \equiv \delta(\delta A)$ виртуальной работы δA . Равновесное состояние устойчиво, если при любых сочетаниях отличных от нуля вариаций $\delta^2 A < 0$. Если существуют $\delta l_j > 0$, такие, что $\delta^2 A > 0$, то равновесное состояние неустойчиво. Случай $\delta^2 A = 0$ соответствует либо нейтральным, т. е. переходным от устойчивости к неустойчивости состояниям, либо сомнительному случаю, требующему изучения знаков высших вариаций. Отметим, что всюду, говоря об условиях равновесности и устойчивости, имеем в виду выполнение этих условий по отношению к обобщенным координатам l_1, \dots, l_m . Условия равновесия и устойчивости в обычном смысле выполнены по самому определению вариации по Гриффитсу.

Представим виртуальную работу при варьировании по Гриффитсу в виде

$$\delta A = \delta A_e + \delta A_i + \delta A_f \quad (1.1)$$

где δA_e и δA_i — работа внешних и внутренних сил соответственно, δA_f — работа сил сопротивления росту трещин. Последний член учитывает процессы в концевых зонах, т. е. в малых окрестностях фронтов, где происходит процесс интенсивного повреждения и разрушения. Для первых двух членов в (1.1) имеем выражения

$$\begin{aligned} \delta A_e &= \int_{S_0} p_\alpha \delta u_\alpha dS + \int_{V_0} X_\alpha \delta u_\alpha dV \\ \delta A_i &= -\delta \left(\int_{V_0} W dV \right), \quad W = \int \sigma_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь p_α — вектор напряжений на поверхности тела S_0 , X_α — вектор объемных сил в объеме V_0 (этот объем совпадает с объемом тела за вычетом концевых зон), u_α — вектор перемещений, $\sigma_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — тензоры напряжений и деформаций соответственно. Векторы p_α и X_α должны быть вычислены с учетом перемещений, полученных в рассматриваемом состоянии.

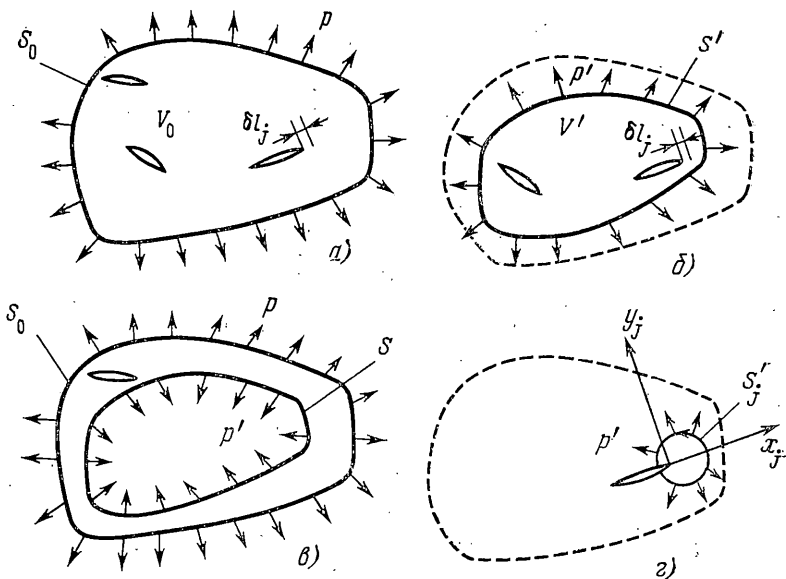
Величина W имеет смысл взятой с обратным знаком плотности работы внутренних сил от момента времени, когда состояние тела считается естественным, до рассматриваемого момента времени. Для упругих сред W есть плотность энергии деформации. Для наследственных сред вариацию δA_i можно трактовать как результат варьирования начальных размеров трещин. Последний член в (1.1) запишем в виде

$$\delta A_f = - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \int_{L_k} \gamma_{jk} |ds_k \times \delta l_j| \quad (1.3)$$

Здесь ds_k — векторы элементарных дуг, принадлежащих контурам трещин L_k , δl_j — векторы, соответствующие вариациям δl_j . В формулу (1.3) введены значения удельной работы разрушения γ_{jk} . Первый индекс указывает номер обобщенной координаты, второй — номер трещины ($k=1, \dots, n$).

2. Выразим условия, накладываемые на виртуальную работу, в терминах обобщенных сил. Все члены в правой части формулы (1.1) являются однородными линейными формами вариаций $\delta l_j, \dots, \delta l_m$. С учетом (1.2) и (1.3) представим эти члены в виде

$$\delta A_e + \delta A_i \equiv \sum_{j=1}^m G_j \delta l_j, \quad \delta A_f \equiv - \sum_{j=1}^m \Gamma_j \delta l_j \quad (2.1)$$



Фиг. 1

Здесь G_j — активные обобщенные силы, Γ_j — обобщенные силы сопротивления. Это деление условно; очевидно, обобщенные силы G_j учитывают процессы, происходящие на поверхности тела и во всем его объеме, за исключением окрестности фронтов трещин. Обобщенные силы Γ_j учитывают процессы в концевых зонах.

Нетрудно записать условия равновесия и устойчивости по Гриффитсу через обобщенные силы. Например, система «тело с трещинами — нагрузка» будет равновесной по $m_1 \leq m$ обобщенным координатам, если выполнены условия

$$G_j = \Gamma_j \quad (j=1, \dots, m_1); \quad G_k < \Gamma_k \quad (k=m_1+1, \dots, m) \quad (2.2)$$

Введенные обобщенные силы имеют прототипы в линейной механике разрушения. В частности, если как внешние, так и внутренние силы потенциальны, то

$$G_j = -\partial \Pi / \partial l_j \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.3)$$

где Π — суммарная потенциальная энергия внешних и внутренних сил, вычисленная без учета концевых зон. Силы G_j приобретают смысл скорости высвобождения энергии по Ирвину, а силы Γ_j представляют собой соответствующие критические значения. В однопараметрическом случае, когда $m=1$, условие равновесности (2.2) принимает вид $G=G_c$, где G_c — критическое значение скорости высвобождения энергии по Ирвину.

Чтобы провести сопоставление с другими подходами механики разрушения, выясним условия, при которых области интегрирования из формулы (1.2) могут быть непрерывно деформированы и заменены областями, охватывающими фронты трещин. Вместо исходной задачи (фиг. 1, а) возьмем тело, ограниченное кусочно-гладкой поверхностью S' , лежащей внутри S_0 и выбранной таким образом, чтобы интересующие трещины находились в объеме V' , который ограничен поверхностью S' (фиг. 1, б). Обозначим вектор напряжений на поверхности S' через p' . Часть тела $V_0 \setminus V'$ находится в равновесии (фиг. 1, в). Поэтому

$$\int_{S_0} p_\alpha \delta_L u_\alpha dS + \int_{S'} p'_\alpha \delta_L u_\alpha dS + \int_{V_0 \setminus V'} X_\alpha \delta_L u_\alpha dV - \delta_L \left(\int_{V_0 \setminus V'} W dV \right) = 0 \quad (2.4)$$

где в отличие от (1.2) $\delta_L(\cdot)$ — вариации по Лагранжу, отвечающие кинематически допустимым вариациям перемещений и деформаций при фиксированных размерах трещин. Пусть вариации, входящие в выражение виртуальной работы по Гриффитсу для области V' , принадлежат классу

вариаций по Лагранжу для области $V_0 \setminus V'$. Тогда из (2.4) следует, что границы областей интегрирования из формул (1.2) могут быть снесены на новую поверхность S' и заключенный в нее объем V' . При этих условиях активные обобщенные силы становятся инвариантами относительно выбора областей интегрирования, охватывающих трещину с обобщенной координатой l_j . Явная формула для обобщенных сил имеет вид

$$G_j = \int_{S_j'} p_{\alpha'} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial l_j} dS + \int_{V_j'} X_{\alpha} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial l_j} dV - \frac{\partial}{\partial l_j} \int_{V_j'} W dV \quad (2.5)$$

причем область интегрирования V_j' с границей S_j' может быть стянута до непосредственной окрестности фронта с обобщенной координатой l_j (фиг. 1, з).

Итак, условием применимости переноса областей интегрирования внутрь тела служит принадлежность виртуальных перемещений по Гриффитсу (фиг. 1, в) множеству виртуальных перемещений по Лагранжу для внешней области. Если тело во внешней области деформируется упруго (необязательно линейно), то это условие будет выполнено. Потенциальный характер внешних сил при этом не требуется. Это вытекает из того, что все преобразования были проведены на основе принципа виртуальных перемещений. Характер поведения нагрузки неявно учтен в выражениях для полей напряжений, деформаций и перемещений, входящих в формулу (2.5). Для применения этой формулы предварительно надо решить полную задачу о равновесии тела с заданными на деформированной границе внешними силами. Если материал во внешней области деформируется неупруго, то без дополнительного анализа нельзя утверждать, что вариации поля перемещений, порожденные приращением размеров трещин, будут принадлежать множеству кинематически допустимых вариаций при фиксированных размерах трещин. Например, это условие не будет выполнено в случае идеального упругопластического материала, если разрывные решения, ассоциированные с рассматриваемой обобщенной координатой, выходят из области интегрирования.

Аналогия между формулой (2.5) для активных обобщенных сил и формулами для инвариантных интегралов механики разрушения очевидна. Пусть объемные силы отсутствуют, а в окрестности фронта приближенно реализуются условия плоской задачи. Обозначим C_j сечение поверхности S_j' плоскостью, нормальной к фронту трещины; Ω_j — площадь, ограниченную этим контуром. Введем локальную систему координат, направив ось x_j по внешней нормали к фронту (фиг. 1, з). Обобщенная сила (2.5), отнесенная к единице длины фронта, определяется как

$$G_j = \int_{C_j} p_{\alpha'} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial l_j} ds - \frac{\partial}{\partial l_j} \int_{\Omega_j} W d\Omega \quad (2.6)$$

Чтобы получить из (2.6) формулу для обычного J -интеграла, заменим варьирование по l_j «надвиганием» недеформируемого контура C_j на неварьируемую трещину. Внеся операцию дифференцирования под знак второго интеграла и произведя замену $\partial/\partial l_j = -\partial/\partial x_j$, применим ко второму интегралу формулу Грина. Тогда

$$J_j = \int_{C_j} \left(W dy_j - p_{\alpha'} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_j} ds \right) \quad (2.7)$$

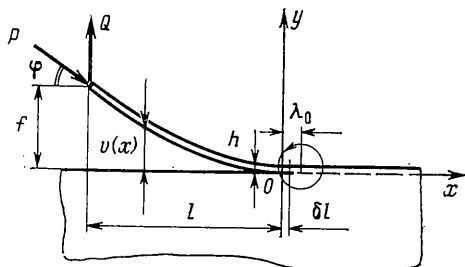
где ось y_j направлена по нормали к оси x_j и к фронту трещины, а направление обхода контура C_j согласовано с тройкой координатного базиса. Отметим, что переход от (2.6) к (2.7), вообще, не является тождественным преобразованием. Простейший пример дает модель Леонова — Панасюка — Дагдейла [5]. Без специальных оговорок нельзя отождествлять обобщенные силы (2.5) и (2.6) с инвариантными интегралами механики разрушения. В экспериментальной и вычислительной механике разрушения [6] под J -интегралом часто понимают величину, определяемую согласно (2.3). Последняя, очевидно, может рассматриваться как обобщенная сила.

Существенным элементом обобщенной концепции Гриффитса [3, 4, 7] является возможность ее распространения на трещины, подрастающие во времени: усталостные трещины, трещины, возникающие в условиях ползучести или под влиянием активной среды, и т. п. Пусть изменение нагрузок и условий окружающей среды задано векторным процессом $s(t) = \{s_1(t), \dots, s_n(t)\}$, где t — время. Рост трещин во времени описываем процессом $l(t) = \{l_1(t), \dots, l_m(t)\}$. Будем учитывать рассеянные микроповреждения, которые накапливаются у фронтов трещин, а также на их возможном продолжении. Не входя здесь в обсуждение природы рассеянных микроповреждений, введем вектор повреждений $\varphi(\lambda, t) = \{\varphi_1(\lambda, t), \dots, \varphi_v(\lambda, t)\}$, где λ — значения вектора $l(t)$ при $t \geq 0$. Пусть задано соотношение

$$\varphi(\lambda, t) = \Phi \left\{ s(\tau), l(\tau) \right\}_{\tau=0}^{\tau=t} \quad (2.8)$$

связывающее значения процесса $\varphi(\lambda, t)$ с историей нагружения $s(\tau)$ и роста трещин $l(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq t$. Значение вектора $\varphi(\lambda, t)$ на фронтах обозначим $\psi(t)$, т. е. $\psi(t) = \varphi[l(t), t]$. В общем случае силы G_j и Γ_j зависят от $s(t)$, $l(t)$ и $\psi(t)$.

В начальный момент $t=0$ система субравновесна по всем обобщенным координатам. Со временем из-за накопления микроповреждений соотношение между обобщенными силами изменяется. В результате субравновесность по отношению к какой-либо из обобщенных координат сменяется неравновесностью, так что трещина подрастает скачком по этой координате, переходя в следующее субравновесное состояние. Размеры скачка невелики, например, имеют порядок характерного радиуса кривизны на фронте трещины. Поэтому процесс подрастания трещин близок к не-



Фиг. 2

прерывному, так что уравнения роста трещин могут быть аппроксимированы дифференциальными или интегродифференциальными уравнениями относительно функций непрерывного аргумента (числа циклов N в случае циклической усталости или времени t в случае замедленного разрушения при постоянных или медленно меняющихся воздействиях). Подробности и примеры даны в [3, 4, 7].

3. Для модельного примера возьмем балочную задачу — тонкий стержень (или тонкую пластину в условиях цилиндрического изгиба). Материал стержня — линейно-упругий. Пусть стержень скреплен с жестким полупространством, а его свободный конец нагружен продольной следящей силой P и «мертвой» поперечной силой Q . Эти силы, как и другие параметры задачи, относим к единице ширины. Выберем систему координат, как показано на фиг. 2. Начало поместим в сечении заделки, так что конец стержня длиной l имеет координату $x = -l$. Будем пренебрегать деформациями поперечного сдвига и продольными деформациями оси стержня по сравнению с деформациями от изгиба, что допустимо при достаточно малой относительной толщине h/l . Направлением возможного развития трещины является линия раздела $x > 0, y = 0$ стержня и полупространства. Деформациями вне отслоившейся части стержня будем пренебрегать.

Рассмотрим вспомогательную задачу о нахождении прогиба $v(x)$. Для функции прогиба в линейном приближении имеем уравнение

$$Dv'' = (Q - N\varphi)(l+x) + N(f - v) \quad (3.1)$$

где D — жесткость при изгибе, f — прогиб на конце стержня, φ — угол поворота концевой сечении. Граничные условия и тождественные соотношения, связывающие $v(x)$ с f и φ , имеют вид

$$v(0) = 0, v'(0) = 0, v(-l) = f, v'(-l) = -\varphi \quad (3.2)$$

Выпишем решение уравнения (3.1) с условиями (3.2) при $P > 0$, т. е. при сжимающей силе

$$v(x) = (Q/P\beta) [-\sin \beta(l+x) + \beta x \cos \beta l + \sin \beta l] \\ \beta^2 = P/D \quad (3.3)$$

Чтобы вычислить обобщенную силу G , подвигающую трещину, используем формулы (1.2) и (2.1). Для потенциальной энергии деформации получаем с учетом (3.3) выражение

$$U = \frac{1}{2} D \int_{-l}^0 (v'')^2 dx = \frac{1}{4} \frac{Q^2 l}{P} \left(1 - \frac{\sin 2\beta l}{2\beta l} \right). \quad (3.4)$$

Виртуальная работа внешних сил имеет вид

$$\delta A_e = Q(\partial f/\partial l) \delta l + P\varphi(\partial f/\partial l) \delta l - P\delta u(-l) \quad (3.5)$$

где происхождение первых двух членов в правой части очевидно. Последний член учитывает виртуальную работу силы P на продольном перемещении конца стержня $\delta u(-l)$. С точностью до величин второго порядка

$$u(-l) = \frac{1}{2} \int_{-l}^0 (v')^2 dx = \frac{Q^2 l}{4P^2} \left(1 + 2 \cos^2 \beta l - \frac{3 \sin \beta l}{2\beta l} \right) \quad (3.6)$$

Подставляя (3.4)–(3.6) в соотношение $\delta A_e - \delta U = G\delta l$, находим

$$G = (Q^2/2P) \sin^2 \beta l \quad (3.7)$$

В данном случае силу G можно вычислить также по формуле (2.7). Выберем контур интегрирования C , как показано на фиг. 2. В рассматриваемом приближении для плоской деформации $\sigma_x = Dv''(-0) [(h/2) - y]$, $0 \leq y \leq h$, $\varepsilon_x = \partial u/\partial x = \sigma_x(1 - \nu^2)/E$. В результате J -интеграл (2.7) принимает вид $J = [v''(-0)]^2/(2D)$. Подстановка сюда выражения (3.3) приводит к формуле (3.7). Совпадение результатов обеспечено тем, что замена $\partial/\partial l = -\partial/\partial x$ («надвигание» тела на неподвижную трещину) в данном случае эквивалентна жесткому смещению.

Обозначим γ удельную работу отдираания стержня от полупространства $y < 0$. Тогда обобщенная сила сопротивления Γ в соответствии с формулами (1.3) и (2.1) равна просто γ . Условие $G = \Gamma$ приводит к формуле для вычисления равновесных размеров

$$l/h = (1/\sqrt{p}) \arcsin(\pm \sqrt{p}/q) \quad (3.8)$$

Здесь введены обозначения для безразмерных усилий

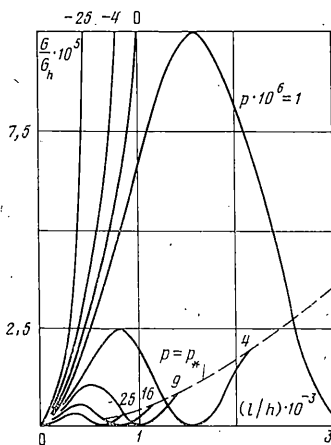
$$p = Ph^2/D, \quad q = Qh(2D\gamma)^{-1/2}, \quad p \leq q^2 \quad (3.9)$$

Формула (3.8) остается пригодной при растягивающей следящей силе, т. е. при $P < 0$. В этом случае ее можно также представить в виде

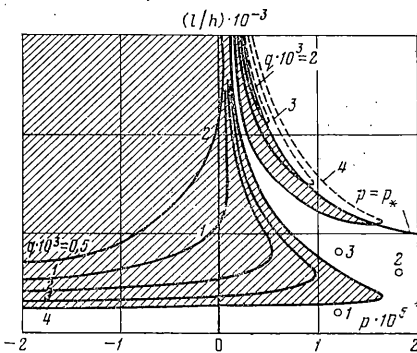
$$l/h = (1/\sqrt{|p|}) \operatorname{Arsh}(\sqrt{|p|}/q) \quad (3.10)$$

где безразмерные усилия p и q имеют тот же смысл, что и в формуле (3.9).

4. Обсудим некоторые численные результаты. График для обобщенной силы G , построенный по формуле (3.7), приведен на фиг. 3. Здесь обозначено $G_h = Q^2 h^2/(2D)$. При $P > 0$ зависимость G от P оказывается немонотонной. Кривые оборваны в точках, которые отвечают критическому значению следящей силы по условию динамической устойчивости. При исчезающе малом демпфировании, пропорциональном скорости $\partial v/\partial t$, параметр критической силы p удовлетворяет некоторому трансцендентному уравнению [1], первый положительный корень которого дает критическую силу $P_* \approx 20,05 D/l^2$. В обозначениях формулы (3.8) имеем $p_* \approx 20,05 (h/l)^2$. Ограничение $p < p_*$ приводит к тому, что из ветвей зависимости (3.8) реа-



Фиг. 3



Фиг. 4

лизуются лишь первые три. При этом линия $p=p_*(l/h)$ делит примерно пополам область, ограниченную третьей и четвертой ветвями. Это проиллюстрировано на фиг. 4, где представлена зависимость l/h от p для некоторых фиксированных значений q .

При достаточно малых l/h состояние системы — субравновесное. На кривых, соответствующих зависимостям (3.8) и (3.19), состояния являются равновесными. Нисходящие ветви кривых отвечают неустойчивым, восходящие — устойчивым равновесным состояниям. Области неравновесных состояний обозначены штриховкой, область динамической неустойчивости обозначена двойной штриховкой. Область субравновесных состояний оставлена незаштрихованной. Если сила P — сжимающая, то смена устойчивости при изменении параметров задачи может оказаться достаточно сложной. Интуиция, как это часто бывает в неконсервативных задачах устойчивости, не подсказывает ответа даже качественно [2]. При растяжении картина оказывается значительно проще: увеличение по модулю силы P приводит к снижению критических значений длины, т. е. к дестабилизации. Это следует и из механических соображений: растягивающая следящая сила будет способствовать «отдиранию» стержня от основания (фиг. 2). Сводная диаграмма зависимости l/h от безразмерных усилий (3.9) приведена на фиг. 5. Как и на фиг. 4, области неравновесности по Гриффитсу обозначены одиночной, область динамической неустойчивости — двойной штриховкой.

Представляет некоторый интерес провести сопоставление со случаем, когда все внешние силы потенциальны. Рассмотрим нагружение гибкого упругого стержня «мертвой» сжимающей силой P и поперечной силой Q (фиг. 2 при $\varphi=0$). Взамен (3.1) и (3.2) имеем

$$Dv'' = Q(l+x) + P(f-v) \quad (4.1)$$

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(-l) = f$$

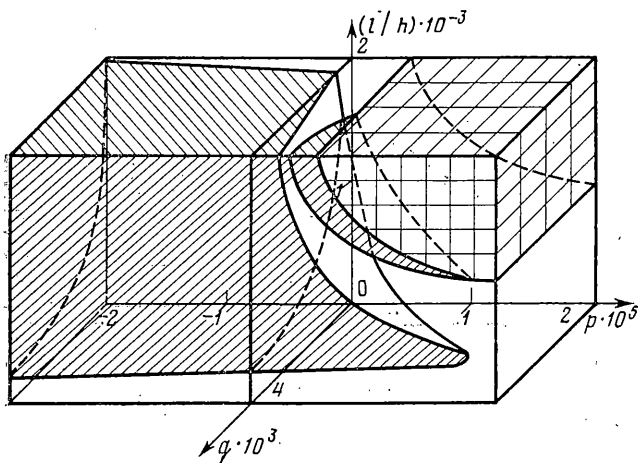
Решение краевой задачи (4.1) дает

$$v(x) = (P/Q\beta \cos \beta l) [-\sin \beta(l+x) + \beta x \cos \beta l + \sin \beta l] \quad (4.2)$$

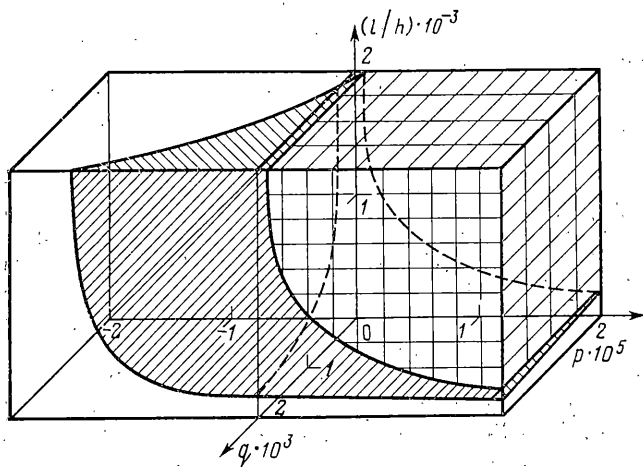
где $\beta^2 = P/D$, $\cos \beta l \neq 0$. Формула (4.2) отличается от аналогичной формулы (3.3) множителем перед квадратной скобкой. Не останавливаясь на подробностях, выпишем выражение для обобщенной силы, продвигающей трещину

$$G = (Q^2/2P) \operatorname{tg}^2 \beta l \quad (4.3)$$

Эту формулу можно получить как из рассмотрения виртуальной работы, так и по формуле (2.7). Как и в случае следящей силы, формула (2.7) принимает вид $J = [v''(-0)]^2 / (2D)$. Подставляя сюда $v(x)$ согласно (4.2), приходим к формуле (4.3).



Фиг. 5



Фиг. 6

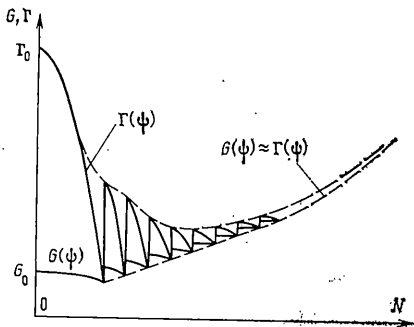
Условие равновесности $G=\Gamma$ приводит к формуле типа (3.8)

$$l/h = (1/\sqrt{p}) \operatorname{arctg}(\pm \sqrt{p}/q) \quad (4.4)$$

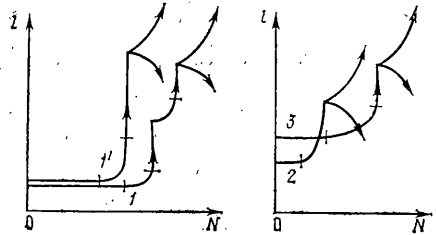
где сохранены обозначения (3.9). Для перехода к растяжению достаточно в формуле (4.3) заменить P на $-P$, β на $i\beta$, а в формуле (4.4) p на $i|p|$.

Сводная диаграмма зависимости l/h от p и q представлена на фиг. 6. Область неравновесных по Гриффитсу состояний обозначена одиночной штриховкой, область субравновесных состояний оставлена незаштрихованной. Двойной штриховкой обозначена область, в которой имеет место неустойчивость по Эйлеру. Граница этой области отвечает условию $\beta l = \pi/2$; при этом сила P принимает критическое (в смысле теории упругой устойчивости) значение $P_* = \pi^2 D / (2l)^2$, а параметр $p_* = \pi^2 (h/2l)^2$.

5. Для описания процесса роста усталостной трещины необходимо ввести в модель накопления микроповреждений на фронте трещины и на ее продолжении. Возьмем простейшую модель, согласно которой накопление микроповреждений происходит лишь в малой зоне на продолжении трещины. Пусть длина этой зоны постоянна и равна λ_0 , а уровень поврежденности описывается скалярной величиной ψ , принимающей постоянные значения на отрезке $l \leq x \leq l + \lambda_0$. Приращение ψ за цикл примем зависящим от размаха изгибающего момента при $x=0^-$, т. е. на фронте трещины. Поскольку обобщенная сила G в рассмотренных примерах пропорциональна квадрату этого момента, то сделанное допущение эквивалентно принятию зависимости приращения меры ψ от размаха ΔG обобщенной силы G .



Фиг. 7



Фиг. 8

В непрерывном приближении получаем уравнение накопления микроповреждений

$$d\psi/dN=f(\Delta G) \quad (5.1)$$

которое можно рассматривать как реализацию функционального соотношения (2.6), записанного при $\lambda=l$. Здесь N — число циклов, трактуемое как непрерывный аргумент. Функция $f(\Delta G)$ в правой части уравнения (5.1) удовлетворяет условиям $f(\Delta G)=0$ при $\Delta G \leq \Delta G_{th}$, где ΔG_{th} — пороговое значение размаха обобщенной силы; $f(\Delta G) > 0$ при $\Delta G > \Delta G_{th}$. Правая часть в (5.1) может также зависеть от максимальных за цикл значений G , что позволяет учесть влияние асимметрии цикла.

Качественная картина первых подрастаний трещины показана на фиг. 7. При $N=0$ система субравновесна, т. е. $G_0 < \Gamma_0$. По мере накопления микроповреждений силы G и Γ сближаются, а при некотором значении N достигается впервые равновесное неустойчивое состояние, для которого $G(\psi)=\Gamma(\psi)$. Фронт трещины скачком продвигается на расстояние порядка λ_0 , после чего достигается субравновесное состояние. Этот процесс повторяется многократно. Если нагрузка меняется медленно, то ступенчатый процесс роста трещины можно заменить непрерывным процессом $l(N)$. Пусть $dl/dN > 0$. Для функции $\psi(N)$ уравнение (5.1) дает оценку [3]:

$$\psi(N) \approx \psi_0[l(N)] + \lambda_0 (dl/dN)^{-1} f(\Delta G) \quad (5.2)$$

где ψ_0 — начальное значение меры повреждений (или мера повреждений, накапливаемых в дальнем поле). Подстановка (5.2) в приближенно отслеживаемое условие равновесности $G(\psi)=\Gamma(\psi)$ приводит к дифференциальному уравнению относительно функции $l(N)$. Для широкого класса функций $G(\psi)$ и $\Gamma(\psi)$ это уравнение нетрудно разрешить явно относительно производной dl/dN и прийти, таким образом, к уравнениям типа известных полуэмпирических уравнений роста усталостных трещин [6].

Ограничимся обсуждением качественного характера роста трещины при совместном действии поперечной и продольной силы (фиг. 2). Картина зависит от начального положения точки в пространстве переменных l/h , p и q . Три характерных положения обозначены на фиг. 3 цифрами 1, 2 и 3. Они соответствуют параметру поперечной нагрузки $q=4 \cdot 10^{-3}$. Во всех этих случаях начальное состояние — субравновесное. Каждый раз росту трещины предшествует некоторая инкубационная стадия, в течение которой накопление микроповреждений происходит при неподвижном фронте. Затем начинается постепенно ускоряющийся медленный рост. В случае 1 при достижении границы области неустойчивости по Гриффитсу трещина подрастает скачком. После скачка изображающая точка либо снова попадает в область субравновесных состояний; либо, проскочив эту область, оказывается в области динамической неустойчивости. В первом случае будет наблюдаться повторная инкубационная стадия и стадия медленного роста, переходящая в неустойчивость. Во втором случае после скачка длина стержня сразу увеличивается настолько, что начинаются колебания стержня при силе P , превышающей критическое значение P_* . Эти случаи схематически проиллюстрированы на фиг. 8 кривыми 1 и 1' соответственно.

В случаях 2 и 3 в результате роста трещины изображающая точка сразу попадает в область неустойчивости. В случае 2 стадия медленного роста трещины сменяется динамической потерей устойчивости. В случае 3 динамической неустойчивости предшествует потеря устойчивости по Гриффитсу со скачкообразным подрастанием трещины.

Автор выражает благодарность М. В. Купцову и Ю. Н. Мокроусову за помощь в вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение. 1981. 295 с.
2. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз. 1961. 339 с.
3. Болотин В. В. Уравнения роста усталостных трещин. // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 153-160.
4. Болотин В. В. Уравнения роста отслоений в оболочках из композиционных материалов // Надежность и ресурс машин и конструкций. М.: МЭИ. 1984. С. 5-10.
5. Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Ковчик С. Е. Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов. Киев: Наук. думка. 1977. 277 с.
6. Сирагори М., Миеси Т., Мацусига Х. Вычислительная механика разрушения. М.: Мир, 1986. 334 с.
7. Болотин В. В. Объединенные модели в механике разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 127-137.

Москва

Поступила в редакцию
13.X.1986