МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1987

УДК 539.3:551.243

ТЕОРИЯ ДИСЛОКАЦИЙ ВОЛЬТЕРРА В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛАХ

ЗУБОВ Л. М.

Нелинейная теория упругости применена к исследованию изолированных дефектов (дислокаций Вольтерра) в твердых телах. Сформулирована и доказана теорема о характере неоднозначности поля поворотов и перемещений в многосвязном теле при однозначном и непрерывном тензоре конечной деформации, удовлетворяющем нелинейным уравнением совместности. Теорема обобщает известную теорему Вейнгартена линейной теории упругости. Выведены формулы, выражающие векторы Бюргерса и Франка изолированного дефекта через поле тензора конечной деформации. Дана постановка задачи об определении напряженного состояния нелинейно-упругого тела при заданных характеристиках дефекта.

Задача определения напряжений в сплошном цилиндре, создаваемых изолированным дефектом, являющимся комбинацией винтовой дислокации и клиновой дисклинации, сведена к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. На примере винтовой дислокации показано, что строгий учет нелинейности качественно меняет характер поля напряжений вблизи оси дефекта. Для широкого класса определяющих соотношений изотропных материалов установлено, что касательное напряжение остается ограниченным на оси дислокации, а энергия дислокации конечна, в то время как в линейной теории упругости напряжение имеет особенность на оси дислокации, а энергия дислокации бесконечна.

1. Пусть $\mathbf{R}$ — вектор места точки сплошной среды в деформированном состоянии, $\mathbf{r}$ — вектор места точки в отсчетной конфигурации, X^s ($s=1, 2, 3$) — некоторые криволинейные координаты в деформированной конфигурации, $\mathbf{R}_s=\partial\mathbf{R}/\partial X^s$ и $\mathbf{r}_s=\partial\mathbf{r}/\partial X^s$ — векторные базисы соответственно деформированной и отсчетной конфигураций, $\mathbf{R}^k$ и $\mathbf{r}^k$ — векторные базисы, взаимные к $\mathbf{R}_s$ и $\mathbf{r}_s$. Градиент места $\mathbf{F}$, мера деформации Альманзи $\mathbf{g}$ и тензор деформации Альманзи $\boldsymbol{\varepsilon}$ определяются соотношениями [1] ($\mathbf{E}$ — единичный тензор):

$$\mathbf{F}=\nabla\mathbf{r}=\mathbf{R}^s\mathbf{r}_s,\quad \nabla=\mathbf{R}^k\partial/\partial X^k,\quad \mathbf{g}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T=g_{sk}\mathbf{R}^s\mathbf{R}^k$$
$$2\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{E}-\mathbf{g}=(G_{sk}-g_{sk})\mathbf{R}^s\mathbf{R}^k,\quad G_{sk}=\mathbf{R}_s\cdot\mathbf{R}_k,\quad g_{sk}=\mathbf{r}_s\cdot\mathbf{r}_k \tag{1.1}$$

Предположим, что материальное тело в деформированной конфигурации занимает заданный объем V, а $\mathbf{R}_s$ и G_{sk} — известные функции переменных X^s, определяемые способом введения координат в пространстве. Будем считать, что эти функции, а также величины $G^{sk}=\mathbf{R}^s\cdot\mathbf{R}^k$ непрерывны в области V вместе с первыми и вторыми производными.

Пусть в объеме V задано дважды непрерывно дифференцируемое поле тензора конечных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$. Это эквивалентно заданию функций $g_{sk}(X^n)$. Задача определения поля перемещений $\mathbf{u}=\mathbf{r}-\mathbf{R}$ сплошной среды по заданной метрике g_{sk} отсчетной конфигурации в [1, 2] сведена к определению градиента места из следующей системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$\partial\mathbf{F}/\partial X^k=\mathbf{\Pi}_k\cdot\mathbf{F},\quad \mathbf{\Pi}_k=\mathbf{R}_k\cdot\mathbf{\Pi},\quad \mathbf{\Pi}=(\gamma_{km}{}^n-\Gamma_{km}{}^n)\mathbf{R}^k\mathbf{R}^m\mathbf{R}_n \tag{1.2}$$

Здесь $\gamma_{km}{}^n$ и $\Gamma_{km}{}^n$ — символы Кристоффеля второго рода соответственно в метриках g_{sk} и G_{sk}, $\mathbf{\Pi}$ — тензор аффинной деформации. Компоненты тензора $\mathbf{\Pi}$ выражаются через заданные функции g_{sk} следующим образом:

$$\gamma_{km}{}^n-\Gamma_{km}{}^n={}^1/_2 g^{nr}(\nabla_k g_{mr}+\nabla_m g_{kr}-\nabla_r g_{km})$$

где ∇_k — символ ковариантной производной в метрике G_{ks}. Условия разрешимости системы (1.2):

$$\partial\Pi_h/\partial X^r - \partial\Pi_r/\partial X^k = \Pi_r\cdot\Pi_h - \Pi_h\cdot\Pi_r \qquad (1.3)$$

эквивалентны обращению в нуль тензора кривизны Римана — Кристоффеля, построенного по метрике g_{ks} (тензор кривизны для метрики G_{ks} обращается в нуль тождественно). В трехмерном пространстве соотношения (1.3) содержат шесть независимых уравнений — условий совместности деформаций [1].

К системе (1.2) следует присоединить начальное условие, т. е. задать значение тензора $\mathbf{F}$ в некоторой точке M_0 области V:

$$\mathbf{F}(M_0) = \mathbf{\Lambda} \qquad (1.4)$$

Так как тензорное поле $\mathbf{g}(\mathbf{R})$ известно, из полярного разложения градиента места $\mathbf{F}=\lambda\cdot\mathbf{A}$, где $\lambda=\mathbf{g}^{1/2}$, $\mathbf{A}$ — собственно ортогональный тензор, следует, что в точке M_0 необходимо и достаточно задать лишь значение тензора поворота $\mathbf{A}$.

После нахождения градиента места $\mathbf{F}(\mathbf{R})$ радиус-вектор $\mathbf{r}$ определяется квадратурами

$$\mathbf{r}(M) = \int_{M_0}^{M} d\mathbf{R}\cdot\mathbf{F} + \mathbf{r}_0, \qquad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(M_0) \qquad (1.5)$$

где $\mathbf{r}_0$ — заданный вектор. Условие независимости интеграла в (1.5) от пути интегрирования в односвязной области выполнено в силу (1.2).

Рассмотрим некоторую кривую $X^s = X^s(t)$, соединяющую текущую точку M с начальной точкой M_0, причем точке M_0 соответствует значение $t = t_0$. В силу (1.2) вдоль кривой выполняется соотношение

$$d\mathbf{F}/dt = \mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{F}, \qquad \mathbf{P}(t) = (dX^k/dt)\mathbf{R}_k\cdot\mathbf{\Pi} \qquad (1.6)$$

Решение задачи Коши (1.5), (1.6) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать при помощи мультипликативного интеграла [3] ($d\mathbf{R}=\mathbf{R}_k(dX^k/dt)\,dt$):

$$\mathbf{F}(M) = \widecheck{\int_{t_0}^{t}} (\mathbf{E}+\mathbf{P}\,dt)\cdot\mathbf{\Lambda} = \widecheck{\int_{M_0}^{M}} (\mathbf{E}+d\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Pi})\cdot\mathbf{\Lambda} \qquad (1.7)$$

Последнее выражение в (1.7) будем называть криволинейным мультипликативным интегралом. Согласно теореме Картана [4], в односвязной области V при заданном начальном значении $\mathbf{F}(M_0)$ и при выполнении условий (1.3) существует **непрерывно** дифференцируемое и однозначное решение системы (1.2). Однозначность понимается в том смысле, что определяемое решением задачи Коши (1.5), (1.6) значение $\mathbf{F}(M_0)$ не зависит от выбора пути интегрирования, т. е. кривой $X^k(t)$, соединяющей точки M_0 и M. Из теоремы Картана следует, что в односвязной области для любого замкнутого контура справедливо соотношение

$$\widecheck{\oint} (\mathbf{E}+d\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Pi}) = \mathbf{E}.$$

Пусть объем V представляет собой многосвязную область. Превратим эту область в односвязную проведением необходимого числа разрезов (перегородок). Каждая из перегородок является двусторонней ориентированной поверхностью. Рассмотрим одну из таких перегородок Σ. Предельные значения какой-либо функции координат при приближении к Σ с одной стороны будем отмечать знаком «минус», предельные значения с другой — знаком «плюс». Проинтегрируем систему (1.2) вдоль некоторой кривой на Σ, соединяющей точки M и N, сначала по одной стороне поверхности Σ, а затем — по другой. На основании теоремы Картана имеем

$$\mathbf{F}_{\mp}(N) = \widecheck{\int_{M}^{N}} (\mathbf{E}+d\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Pi})\cdot\mathbf{F}_{\mp}(M) \qquad (1.8)$$

Так как тензор $\mathbf{\Pi}$ сохраняет непрерывность при пересечении перегородки Σ, значения двух мультипликативных интегралов в (1.8) совпадают. Отсюда вытекает, что для любых двух точек M, N на Σ справедливо соотношение

$$\mathbf{F}_-^{-1}(M)\cdot\mathbf{F}_+(M)=\mathbf{F}_-^{-1}(N)\cdot\mathbf{F}_+(N)=\mathbf{Q} \tag{1.9}$$

где $\mathbf{Q}$ — постоянный тензор второго ранга. Из полярного разложения $\mathbf{F}=\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{A}$ и непрерывности $\boldsymbol{\lambda}$ при пересечении поверхности Σ следует, что тензор $\mathbf{Q}$ — собственно ортогональный: $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^T=\mathbf{E}$, $\det\mathbf{Q}=1$. На основании (1.9) имеем на Σ (∇' — набла-оператор на поверхности Σ [5]):

$$\nabla'\mathbf{r}_+=\nabla'\mathbf{r}_-\cdot\mathbf{Q} \tag{1.10}$$

Интегрируя (1.10) на Σ, получим

$$\mathbf{r}_+=\mathbf{r}_-\cdot\mathbf{Q}+\mathbf{b} \tag{1.11}$$

где $\mathbf{b}$ — постоянный вектор. Представив ортогональный тензор $\mathbf{Q}$ через вектор конечного поворота [5]: $\mathbf{Q}=(4+\mathbf{q}\cdot\mathbf{q})^{-1}[(4-\mathbf{q}\cdot\mathbf{q})\mathbf{E}+2\mathbf{q}\mathbf{q}-4\mathbf{E}\times\mathbf{q}]$, получим следующее выражение для скачка вектора перемещения:

$$\mathbf{u}_+-\mathbf{u}_-=(1+{}^1/_4\mathbf{q}\cdot\mathbf{q})^{-1}\mathbf{q}\times(\mathbf{r}_-+{}^1/_2\mathbf{q}\times\mathbf{r}_-)+\mathbf{b} \tag{1.12}$$

Соотношения (1.11), (1.12) означают, что если в деформированной конфигурации разрезать многосвязное материальное тело вдоль перегородок Σ_k, то в отсчетном (ненапряженном) состоянии относительное расположение берегов разреза будет таким, что их совмещение осуществляется перемещением абсолютно твердого тела. Фактическая реализация такой отсчетной конфигурации требует, вообще говоря, удаления или добавления материала.

Формула (1.12) выражает обобщение на нелинейный случай теоремы Вейнгартена [6] классической теории упругости.

Формулировка теоремы Вейнгартена в нелинейной теории упругости, предложенная в [6] без доказательства в качестве гипотезы, содержит неточность. В линейной теории упругости скачок перемещений описывается формулой $\mathbf{u}_+-\mathbf{u}_-=\mathbf{q}\times\mathbf{r}+\mathbf{b}$. Гипотеза [6] состоит в простой замене первого слагаемого этого выражения формулой конечного поворота и приводит к соотношению, отличающемуся от (1.12) тем, что вместо $\mathbf{r}_-$ разрывного вектора $\mathbf{r}$ фигурирует непрерывный вектор места точек тела. Тем самым в [6] предполагается, что скачок перемещений выражается при помощи непрерывного вектора места той конфигурации, в которой тело неодносвязно. Такая гипотеза противоречит правильной формулировке (1.12) нелинейной теоремы Вейнгартена, в которой участвует разрывный (и до решения системы (1.2) неизвестный) вектор места конфигурации, образующейся после разрезания тела и освобождения от внутренних напряжений.

Непрерывность меры деформации Альманзи $\mathbf{g}$ в неодносвязном объеме V не означает непрерывности меры деформации Коши — Грина $\mathbf{G}=(\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F})^{-1}$. В самом деле, в силу представления $\mathbf{G}=\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{g}^{-1}\cdot\mathbf{A}$ и вытекающего из (1.9) соотношения $\mathbf{A}_+=\mathbf{A}_-\cdot\mathbf{Q}$ имеем $\mathbf{G}_+=\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{G}_-\cdot\mathbf{Q}$.

Таким образом, компоненты меры деформации Коши — Грина претерпевают скачок при пересечении перегородки Σ. При этом собственные значения (а следовательно, и инварианты) тензора $\mathbf{G}$ сохраняют непрерывность, а скачком меняются направления его главных осей. Аналогичными свойствами обладает тензор деформации Коши — Грина $\mathbf{e}={}^1/_2(\mathbf{G}-\mathbf{E})$.

При непрерывном и однозначном поле тензора деформаций, удовлетворяющем уравнениям совместности, и при наличии на разрезе двусвязной области (т. е. области, гомеоморфной тору) скачка перемещений, соответствующего жесткому смещению, в линейной теории упругости говорят о дислокации, или дисторсии Вольтерра [2, 6, 7]. Аналогично этому будем говорить, что в двусвязном нелинейно-упругом теле содержится дислокация Вольтерра, или изолированный дефект, если введенные выше постоянные векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q}$ не равны одновременно нулю. Характеристики изолированного дефекта $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q}$, как и в линейной теории упругости [6], будем называть соответственно вектором Бюргерса и вектором Франка. Из (1.9), (1.11) следуют формулы, выражающие параметры $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{b}$ через заданное поле тензора деформаций в двусвязной области

$$\mathbf{Q}=\mathbf{\Lambda}^{-1}\cdot \overset{\smile}{\oint\limits_{M_0}} (\mathbf{E}+d\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Pi})\cdot\mathbf{\Lambda} \tag{1.13}$$

$$\mathbf{b}=\oint d\mathbf{R}'\cdot \overset{\smile}{\int\limits_{M_0}^{M'}} (\mathbf{E}+d\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Pi})\cdot\mathbf{\Lambda}+\mathbf{r}_0\cdot(\mathbf{E}-\mathbf{Q}) \tag{1.14}$$

Значение мультипликативного интеграла по замкнутому контуру в общем случае зависит от выбора начальной точки на контуре, что и отражено в обозначениях формулы (1.13). Если замкнутый, ориентированный и нестягиваемый в точку контур проходит через произвольную точку M, то формула (1.13) усложняется и принимает вид

$$\mathbf{Q}=\mathbf{\Lambda}^{-1}\cdot \overset{\smile}{\int\limits_{M_0}^{M}} (\mathbf{E}+d\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Pi})\cdot \overset{\smile}{\oint\limits_{M}} (\mathbf{E}+d\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Pi})\cdot \overset{\smile}{\int\limits_{M_0}^{M}} (\mathbf{E}+d\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Pi})\cdot\mathbf{\Lambda}$$

Замкнутый ориентированный и нестягиваемый в точку контур обычного интегрирования в (1.14) должен проходить через точку M_0, а путь мультипликативного интегрирования в (1.14) не должен пересекать перегородку Σ. Правая часть последней формулы не зависит от выбора точки M и замкнутого ориентированного контура, проходящего через эту точку при условии, что контур пересекает перегородку Σ.

Вектор Франка $\mathbf{q}$ определяется по тензору $\mathbf{Q}$ следующим образом [5]: $\mathbf{q}=2(1+\operatorname{tr}\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{E}\times\mathbf{E})\cdot\cdot\mathbf{Q}$.

Длина вектора конечного поворота $\mathbf{q}$ равна $2\operatorname{tg}(\chi/2)$ [8], где χ — величина угла поворота. Угол поворота для вектора Франка определяется так:

$$\cos\chi={}^1/_2(\operatorname{tr}\mathbf{Q}-1)={}^1/_2\left[\operatorname{tr}\overset{\smile}{\oint}(\mathbf{E}+d\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Pi})-1\right] \tag{1.15}$$

В качестве замкнутого пути в (1.15) можно взять любой нестягиваемый в точку ориентированный контур, а обход контура начинать с любой точки. Если хотя бы один из векторов $\mathbf{b}$, $\mathbf{q}$ отличен от нуля, то перемещения в двусвязной области неоднозначны. Когда вектор Франка равен нулю, а вектор Бюргерса отличен от нуля, изолированный дефект представляет собой трансляционную дислокацию. Если же $\mathbf{q}\neq0$, то по терминологии [6] дефект является комбинацией дислокации и дисклинации.

Хотя наибольшее применение в физике прочности и пластичности получила теория трансляционных дефектов, поворотные дефекты — дисклинации также реально существуют в твердых телах, жидких кристаллах и других структурах [9, 10]. В последние годы дисклинационные представления широко используются в ряде областей физики [9, 10]. В физике дисклинаций сейчас используются [9, 10] исключительно соотношения линейной теории дислокаций Вольтерра. Это не всегда правомерно, поскольку величина вектора Франка во многих реальных случаях не является малой [9]. В таких случаях целесообразно применять полученные выше нелинейные соотношения теории изолированных дефектов.

Возможна ситуация, когда заданным является неодносвязный объем v, занимаемый материальным телом в отсчетной конфигурации, а требуется определить деформированную конфигурацию тела по заданному как функция лагранжевых координат полю тензора деформаций Коши — Грина. Этот случай рассматривается аналогично изложенному, с той разницей, что отсчетная и текущая конфигурации меняются ролями. Сначала составляется система уравнений, аналогичная (1.2), для определения градиента деформации $\mathbf{C}=\nabla^\circ\mathbf{R}=\mathbf{F}^{-1}$, где ∇° — набла-оператор в отсчетной конфигурации. После этого векторное поле $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ определяется квадратурами. Скачок вектора перемещения $\mathbf{U}=\mathbf{R}-\mathbf{r}$ в данном случае описывается выражением $\mathbf{U}_+-\mathbf{U}_-=(1+{}^1/_4\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_1)^{-1}\mathbf{q}_1\times(\mathbf{R}_-+{}^1/_2\mathbf{q}_1\times\mathbf{R}_-)+\mathbf{b}_1$.

2. Задачу определения напряженного состояния двусвязного нелинейно-упругого тела, содержащего изолированный дефект с заданными характеристиками $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q}$, можно рассматривать двумя способами. При первом способе за неизвестные принимаются компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}$, которые должны удовлетворять нелинейным уравнениям равновесия и силовым граничным условиям на поверхности, ограничивающей двусвязный объем V. Краевая задача для перемещений ставится в односвязной области, полученной из двусвязной проведением разреза. На поверхности разреза перемещения должны удовлетворять условиям скачка (1.12), а компоненты тензора деформаций Альманзи должны быть непрерывны. При втором способе в качестве неизвестных выступают компоненты меры дефор-

мации Альманзи g_{km}. Поскольку для изотропного упругого тела тензор напряжений Коши есть функция тензора деформаций Альманзи, уравнения равновесия в эйлеровых координатах будут уравнениями относительно g_{km}. Кроме того, функции g_{km} должны удовлетворять нелинейным уравнениям совместности (1.3) и интегральным соотношениям (1.13), (1.14). Краевая задача относительно g_{km} ставится в двусвязной области, на границе которой должны быть выполнены силовые граничные условия.

3. Пусть r, φ, z — цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации упругого тела, R, Φ, Z — цилиндрические координаты в пространстве. Единичные векторы, касательные к координатным линиям, в отсчетной конфигурации и в пространстве обозначим $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\Phi$, $\mathbf{e}_Z$. Рассмотрим следующую деформацию сплошной среды:

$$R=R(r), \quad \Phi=\varkappa\varphi+\psi z, \quad Z=(2\pi)^{-1}b\varphi+\alpha z \tag{3.1}$$

где $\varkappa$, ψ, b, α — постоянные. При $\varkappa>1$ соотношения (3.1) описывают деформацию, возникающую после удаления из кругового полого цилиндра сектора $2\pi\varkappa^{-1}\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, поворота сечения $\varphi=2\pi\varkappa^{-1}$ вокруг оси цилиндра до совмещения с плоскостью $\varphi=0$, поступательного смещения этого сечения в направлении оси цилиндра на величину $b\varkappa^{-1}$ и скрепления плоскостей $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi\varkappa^{-1}$. Кроме того, цилиндр испытывает кручение с углом закручивания ψ, осевое растяжение или сжатие и неоднородную радиальную деформацию, описываемую функцией $R(r)$. Случай $\varkappa<1$ соответствует добавлению клина из того же материала в разрезанный полуплоскостью $\varphi=0$ цилиндр.

Если в качестве начала отсчета радиуса-вектора взять какую-либо точку на оси цилиндра, то значения векторов Бюргерса и Франка для данного дефекта при $\varkappa\geqslant 1$ будут следующими:

$$\mathbf{b}=b\varkappa^{-1}\mathbf{e}_Z, \quad \mathbf{q}=-2\operatorname{tg}\pi(1-\varkappa^{-1})\mathbf{e}_Z \tag{3.2}$$

При помощи формул, приведенных в [11], вычислим градиент места, соответствующий преобразованию (3.2)

$$\mathbf{F}^{-1}=R'\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R+\varkappa Rr^{-1}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi+{}^1/_2\pi^{-1}br^{-1}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_Z+$$
$$+\psi R\mathbf{e}_z\mathbf{e}_\Phi+\alpha\mathbf{e}_z\mathbf{e}_Z, \quad R'=dR/dr \tag{3.3}$$

Определяемые по (3.3) меры деформации имеют вид

$$\mathbf{G}=(R')^2\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r+(\varkappa^2R^2r^{-2}+{}^1/_4\pi^{-2}b^2r^{-2})\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi+$$
$$+({}^1/_2\pi^{-1}\alpha br^{-1}+\varkappa\psi R^2r^{-1})(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_z+\mathbf{e}_z\mathbf{e}_\varphi)+(\psi^2R^2+\alpha^2)\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$$
$$\mathbf{g}=(R')^{-2}\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R+4\pi^2r^2(2\pi\alpha\varkappa-b\psi)^{-2}R^{-2}[(\alpha^2+{}^1/_4\pi^{-2}b^2r^{-2})\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi-$$
$$-(\alpha\psi R+{}^1/_2\pi^{-1}b\varkappa Rr^{-2})(\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_Z+\mathbf{e}_Z\mathbf{e}_\Phi)+(\psi^2R^2+\varkappa^2R^2r^{-2})\mathbf{e}_Z\mathbf{e}_Z$$

Из определяющих соотношений изотропного материала следует, что для деформации вида (3.1) тензоры напряжений Коши и Пиолы будут иметь представления

$$\mathbf{T}=\sigma_R(r)\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R+\sigma_\Phi(r)\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi+\tau_{\Phi Z}(\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_Z+\mathbf{e}_Z\mathbf{e}_\Phi)+\sigma_Z(r)\mathbf{e}_Z\mathbf{e}_Z \tag{3.5}$$
$$\mathbf{D}=D_{rR}(r)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R+D_{\varphi\Phi}(r)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi+D_{\varphi Z}(r)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_Z+D_{z\Phi}(r)\mathbf{e}_z\mathbf{e}_\Phi+D_{zZ}(r)\mathbf{e}_z\mathbf{e}_Z$$

Два из уравнений равновесия в форме [11] удовлетворяются тождественно, а третье является нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением относительно функции $R(r)$ и имеет вид

$$dD_{rR}/dr+(D_{rR}-\varkappa D_{\varphi\Phi})r^{-1}-\psi D_{z\Phi}=0 \tag{3.6}$$

В физических составляющих тензора напряжений Коши уравнение (3.6) записывается так:

$$d\sigma_R/dR+(\sigma_R-\sigma_\Phi)R^{-1}=0 \tag{3.7}$$

Граничными условиями для уравнения (3.6) служат условия незагруженности боковых поверхностей цилиндра: $D_{rR}=0$. В случае сплошного цилиндра условие на внутренней поверхности заменяется требованием $R(0)=0$.

Можно показать, что напряжения, действующие в любом поперечном сечении цилиндра $Z=\mathrm{const}$, статически эквивалентны продольной силе, приложенной в центре сечения, и крутящему моменту. Подбором параметров α и ψ эти силовые факторы можно обратить в нуль.

Задача определения напряжений, создаваемых изолированным дефектом в виде комбинации винтовой дислокации и клиновой дисклинации, сведена к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. Ее частный случай — задача о клиновой дисклинации ($b=\psi=0$, $\alpha=1$) исследован в [12].

4. Рассмотрим задачу о винтовой дислокации в сплошном цилиндре радиуса R_0 из несжимаемого упругого изотропного материала. В несжимаемом материале шаровая составляющая тензора напряжений Коши не выражается через деформацию. В этом случае функция $R(r)$ находится в явном виде из условия несжимаемости $\det \mathbf{F}=1$, а указанная шаровая составляющая определяется в квадратурах из уравнения равновесия (3.7). Положив в соотношениях (3.1) $\varkappa=\alpha=1$, $\psi=0$, из условия несжимаемости имеем $R'R=r$, откуда для сплошного цилиндра получаем $R=r$. Мера деформации Фингера $\mathbf{g}^{-1}$ и правый тензор искажения $\mathbf{V}=\mathbf{g}^{-1/2}$ [1] согласно (3.4) примут вид

$$\begin{gathered}
\mathbf{g}^{-1}=\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R+\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi+{}^1/_2 b\pi^{-1}R^{-1}(\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_Z+\mathbf{e}_Z\mathbf{e}_\Phi)+\\
+(1+{}^1/_4 b^2\pi^{-2}R^{-2})\mathbf{e}_Z\mathbf{e}_Z\\
\mathbf{V}=\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R+[4\pi R\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi+b(\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_Z+\mathbf{e}_Z\mathbf{e}_\Phi)+\\
+{}^1/_2(8\pi^2R^2+b^2)\pi^{-1}R^{-1}\mathbf{e}_Z\mathbf{e}_Z]B^{-1},\qquad B=(16\pi^2R^2+b^2)^{1/2}
\end{gathered}\tag{4.1}$$

В случае материала Бартенева — Хазановича удельная потенциальная энергия деформации W и тензор напряжений Коши задаются выражениями [1, 13] (μ — модуль сдвига):

$$W=2\mu(\operatorname{tr}\mathbf{V}-3),\qquad \mathbf{T}=2\mu\mathbf{V}-p\mathbf{E}\tag{4.2}$$

Из (3.7), (4.1), (4.2) находим напряжения

$$\begin{gathered}
\tau_{Z\Phi}=2\mu bB^{-1},\qquad \sigma_R=2\mu\ln\frac{(4\pi R+B)R_0}{(4\pi R_0+B_0)R}\\
B_0=(16\pi^2R_0^2+b^2)^{1/2},\qquad \sigma_\Phi=2\mu(4\pi RB^{-1}-1)+\sigma_R\\
\sigma_Z=\mu[(8\pi^2R^2+b^2)\pi^{-1}B^{-1}R^{-1}-2]+\sigma_R
\end{gathered}\tag{4.3}$$

В силу (4.3) касательное напряжение $\tau_{Z\Phi}$ остается ограниченным на оси дислокации при $R=0$, в то время как в линейной теории упругости [14] напряжение $\tau_{Z\Phi}$ имеет при $R\to0$ особенность вида R^{-1}. Нормальные напряжения σ_R и σ_Φ имеют при $R\to0$ сингулярность вида $\ln R$, а напряжение σ_Z ведет себя при приближении к оси дислокации, как R^{-1}.

Если в решении (4.3) удержать только члены первого порядка относительно длины вектора Бюргерса b, то придем к решению линейной теории упругости [14]: $\tau_{Z\Phi}={}^1/_2\mu b\pi^{-1}R^{-1}$, $\sigma_R=\sigma_\Phi=\sigma_Z=0$.

При малых значениях вектора Бюргерса решение нелинейной задачи о винтовой дислокации можно представить рядом по степеням b

$$\tau_{Z\Phi}={}^1/_2\mu b\pi^{-1}R^{-1}(1-{}^1/_{32}b^2\pi^{-2}R^{-2})+O(b^4)\tag{4.4}$$

Из (4.4) следует, что область применимости линейной теории упругости ограничена неравенством $|b/R|\ll1$. В частности, линейная теория упругости непригодна вблизи оси дислокации. Неправильным является и характер сингулярности напряжений на оси дислокации, предсказываемый линейной теорией упругости, поскольку разложение точного нелинейного решения (4.3) в ряд по степеням b несправедливо при $R=0$.

При помощи (4.1), (4.2) найдем энергию винтовой дислокации, приходящуюся на единицу длины цилиндра радиуса R_0

$$\Pi=2\pi\int_0^{R_0} WR\,dR=\mu[R_0B_0-4\pi R_0^2+{}^1/_4 b^2\pi^{-1}\ln(R_0+{}^1/_4\pi^{-1}B_0)-$$

$$-{}^1/_4\pi^{-1}b^2\ln({}^1/_4 b/\pi)={}^1/_8\mu b^2\pi^{-1}(1+2\ln 8\pi)+{}^1/_4\mu b^2\pi^{-1}\ln(R_0/b)+O(b^4) \tag{4.5}$$

Отметим, что линейная теория упругости не дает возможности вычислить энергию винтовой дислокации в сплошном цилиндре из-за расходимости интеграла на нижнем пределе $R=0$ [14].

Полученное точное решение задачи о винтовой дислокации в нелинейной постановке свидетельствует о том, что учет нелинейности качественно меняет характер решения вблизи оси дислокации и позволяет устранить некоторые недостатки и противоречия, присущие линейной теории упругости. Вместе с тем надо отметить, что в рамках допущения о несжимаемости тела поведение напряжений на оси дислокации существенно зависит от выбора модели материала. Например, решение задачи о винтовой дислокации для материалов Муни и неогуковского показывает, что касательное напряжение $\tau_{Z\Phi}$ имеет на оси дислокации особенность вида R^{-1}, а энергия дислокации, содержащаяся в единице длины, бесконечна, как и в линейной теории упругости.

Наряду с материалом Бартенева — Хазановича существуют и другие модели несжимаемых тел, для которых энергия винтовой дислокации в сплошном цилиндре имеет конечное значение. Так, можно доказать, что энергия винтовой дислокации конечна для класса материалов с трехконстантным упругим потенциалом

$$W={}^1/_2\mu[(1+\beta)\operatorname{tr}\mathbf{g}^{-m}+(1-\beta)\operatorname{tr}\mathbf{g}^{m}-6],\qquad 0<m<1$$

Для описания металлов в нелинейной области деформирования применяется [15, 16] следующая модель несжимаемого упругого тела:

$$W={}^1/_2 A(\alpha+2)^{-1}\Gamma^{\alpha+2},\qquad 1+\alpha>0 \tag{4.6}$$

$$\mathbf{T}=A\Gamma^\alpha\mathbf{h}-pE,\qquad \mathbf{h}={}^1/_2\ln\mathbf{g}^{-1},\qquad \Gamma=\sqrt{2\operatorname{tr}\mathbf{h}^2}$$

где $\mathbf{h}$ — логарифмическая мера деформации. Эту модель можно рассматривать как один из вариантов деформационной теории пластичности упрочняющегося тела при конечных деформациях.

Для материала (4.6) энергия винтовой дислокации в сплошном цилиндре единичной длины имеет конечное значение, касательное напряжение ограничено при $R\to0$, а нормальные напряжения при $R\to0$ ведут себя, как $(\ln R)^{\alpha+2}$.

В [17] задача о винтовой дислокации в нелинейной постановке решается методом последовательных приближений (методом Синьорини), основанным на предположении об аналитической зависимости решения от малого параметра, в качестве которого принимается длина вектора Бюргерса. Такой способ не может привести к правильному решению вблизи оси дислокации, так как согласно (4.4) при $R\to0$ точное решение нелинейной задачи не является аналитической функцией от b. Так как в методе [17] в качестве первого приближения принимается решение линейной теории упругости, получаемое этим методом выражение для напряжений сохраняет вблизи оси дефекта все отмеченные выше недостатки, присущие линейной теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. 512 с.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука. 1967. 575 с.
4. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Изд-во МГУ. 1960. 307 с.
5. *Зубов Л. М.* Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та. 1982. 143 с.

6. *Вит Р. Де.* Континуальная теория дисклинаций. М.: Мир. 1977. 208 с.
7. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1979. 744 с.
8. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз. 1961. 824 с.
9. Дисклинации. Экспериментальное исследование и теоретическое описание. Л.: Изд-е Ленингр. ин-та ядерн. физики. 1982. 149 с.
10. Экспериментальное исследование и теоретическое описание дисклинаций (Тематич. сб.). Л.: Изд-е Ленингр. ин-та ядерн. физики. 1984. 221 с.
11. *Зубов Л. М.* Полуобратный метод в квазистатических задачах нелинейной термовязкоупругости // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1981. Т. 256. № 3. С. 556–559.
12. *Зубов Л. М.* Изолированная дисклинация в нелинейно-упругом сжимаемом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 69–73.
13. *Черных К. Ф., Шубина И. М.* Законы упругости для изотропных несжимаемых материалов // Механика эластомеров. Т. 1. Краснодар: Изд-е Кубан. ун-та. 1977. С. 54–64.
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. И.* Теоретическая физика // Теория упругости. Т. 7. М.: Наука. 1965. 203 с.
15. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Изд-во иностр. лит. 1954. 648 с.
16. *Куркин С. А.* Прочность сварных тонкостенных сосудов, работающих под давлением. М.: Машиностроение. 1976. 184 с.
17. *Теодосиу К.* Упругие модели дефектов в кристаллах. М.: Мир. 1985. 352 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
17.IV.1986