

УДК 539.3:534.1

О КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОВЯЗКИХ СИСТЕМ  
СО СЛЕДЯЩИМИ СИЛАМИ

ПАНОВКО Я. Г., СОРОКИН С. В.

В [1] для двухзвенной модели с упруговязкими шарнирами обнаружено несоответствие критических значений следящей силы, найденных в двух вариантах анализа:  $P_*^0$  — в отсутствие вязкого сопротивления и  $P_* < P_*^0$  — при исчезающе малых значениях коэффициента вязкости. Таким образом было установлено, что если  $P_* < P_*^0$ , то формальная устойчивость чисто упругой системы утрачивается при введении в нее сколь угодно малого вязкого сопротивления. Впоследствии этот необычный результат, относящийся к широкому классу упругих систем с неоптенциальными позиционными силами, был назван парадоксом Циглера, а состояния равновесия таких систем при  $P_* < P_*^0$  — квазиустойчивыми [2, 3].

Обычно в литературе эффект дестабилизации с большей или меньшей отчетливостью связывают с влиянием внутреннего трения, а внешнему трению приписывают стабилизирующую роль. Тем самым считается, что эти два вида трения влияют в принципе так же, как и на устойчивость вращающихся упругих валов в закритической области. В публикуемой статье показано, что это, вообще говоря, неверно. В некоторых случаях дестабилизация может быть вызвана внешним трением, а внутреннее трение способно оказывать стабилизирующее влияние. Обсуждается также другая сторона вопроса о квазиустойчивости и проводится численная оценка инкремента колебаний, возникающих после возмущения квазиустойчивых состояний равновесия. Выясняется, в каких пределах эти колебания уместно называть «тихим» флаттером, как это сделано в [3].

1. Рассмотрим систему Циглера (фиг. 1), считая, что единственной нагрузкой служит следящая сила  $P$  (веса грузов не учитываются). Массы грузов  $m$  и  $2m$  будем считать сосредоточенными в промежуточном шарнире и на конце нижнего стержня. Примем, что длина стержней одинакова, а оба шарнира обладают одинаковыми упругими свойствами ( $c$  — коэффициент жесткости шарнира). Далее учтем различие вязких свойств шарниров и обозначим  $b_1$  коэффициент вязкости в промежуточном шарнире, отражающий влияние внутреннего трения в системе, а  $b_2$  — коэффициент вязкости в верхнем шарнире, учитывающий действие внешнего трения.

Уравнения возмущенного движения системы имеют вид

$$3ml^2\varphi_1'' + ml^2\varphi_2'' + b_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + b_2\dot{\varphi}_1 + (2c - Pl)\varphi_1 + (Pl - c)\varphi_2 = 0 \quad (1.1)$$

$$ml^2\varphi_1'' + ml^2\varphi_2 + b_1(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

а соответствующее характеристическое уравнение записывается в форме

$$s^4 + B_3s^3 + B_2s^2 + B_1s + B_0 = 0$$

$$B_0 = c^2 / (2m^2l^4), \quad B_1 = (b_1 + b_2)c / (2m^2l^4) \quad (1.2)$$

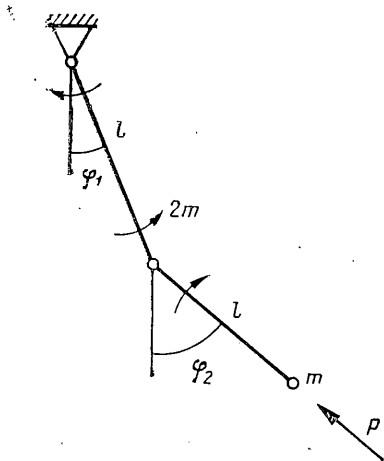
$$B_2 = (7c - 2Pl) / (2ml) + b_1b_2 / (2m^2l^4)$$

$$B_3 = (6b_1 + b_2) / (2ml^2)$$

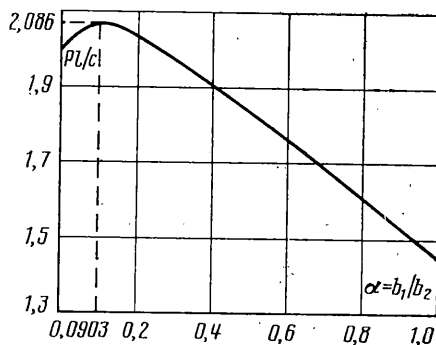
Согласно критерию Рауса — Гурвица, среди вещественных частей корней уравнения (1.2) нет положительных, когда

$$P < (4b_1^2 + 33b_1b_2 + 4b_2^2)(12b_1^2 + 14b_1b_2 + 2b_2^2)^{-1}c/l + b_1b_2(2ml^3)^{-1} \quad (1.3)$$

В [1] с самого начала было положено, что  $b_1 = b_2 = b$ , так что условие устойчивости получилось в виде  $P < 41/28c/l + 1/2b^2/(ml^3)$  и при  $b \rightarrow 0$  найде-



Фиг. 1



Фиг. 2

но критическое значение  $P_* = 41/28c/l = 1,464c/l$ , которое Циглер сопоставил с критическим значением  $P_*^\circ = (1/2 - \sqrt{2})c/l = 2,086c/l$ , полученным из анализа вырожденной системы, соответствующей (1.1) при  $b_1 = b_2 = 0$ . Такое сопоставление отчетливо выражает парадокс Циглера, но не позволяет выявить по отдельности влияние внешнего и внутреннего трения.

Сделаем это, пользуясь условием (1.3). Так, если внешнее трение отсутствует  $b_2 = 0$ , из (1.3) получится существенно меньшее критическое значение (независимое от значения коэффициента  $b_1$ ):  $P_*' = 1/3c/l$ .

Сравнивая значения  $P_*'$  и  $P_*$ , можно заключить, что внешнее трение играет стабилизирующую роль. Хотя это заключение соответствует общепринятым представлениям, но можно убедиться, что в других случаях такие представления могут оказаться ошибочными. В самом деле, если коэффициент внутреннего трения  $b_1$  равен нулю, то независимо от значения коэффициента  $b_2$  из (1.3) получим  $P_*'' = 2c/l$ .

Сопоставляя  $P_*''$  с  $P_*^\circ$ , замечаем, что в отсутствие внутреннего трения любое линейно-вязкое внешнее трение играет дестабилизирующую роль — правда, не очень значительную, понижая значение критической силы всего на 4,3%.

Примечательно, что согласно выражениям для  $P_*'$  и  $P_*''$  дестабилизация вызывается действием каждого из обсуждаемых типов трения, т. е. в отсутствие силы трения другого типа. Однако отсюда не следует, что одновременное действие внешнего и внутреннего трения обязательно вызовет дестабилизацию. Анализируя (1.3), можно установить, что при  $b_1/b_2 = (5\sqrt{2}-4)/34$  первое слагаемое достигает своего максимума и становится равным  $P_*^\circ$ . При таком соотношении внешнего и внутреннего трения критическое значение силы определяется выражением

$$P_*''' = (1/2 - \sqrt{2})c/l + 1/68(5\sqrt{2}-4)b_2^2/(ml^3)$$

При исчезающе малых значениях  $b_2$  (и соответственно  $b_1$ ) отсюда следует выражение для  $P_*^\circ$ , т. е. результат анализа совпадает с тем, который получился, когда с самого начала было принято  $b_1 = b_2 = 0$ . В этом особом случае парадокс Циглера исчезает.

Любое нарушение сочетаний значений параметров, соответствующих особому случаю приводит к появлению зоны квазистойчивости. На фиг. 2 представлен график зависимости первого слагаемого правой части неравенства (1.3) от величины  $\alpha = b_1/b_2$ :  $P_1 = (4\alpha^2 + 33\alpha + 4)(12\alpha^2 + 14\alpha + 2)^{-1}$ . Видно, что при неизменном коэффициенте внешнего трения  $b_2$  уменьшение коэффициента внутреннего трения  $b_1$  от значения  $0,0903 b_2$  повлечет за собой появление зоны квазистойчивости — в этом случае уменьшение внутреннего трения способствует дестабилизации. С другой стороны, при неизменном достаточно малом коэффициенте внутреннего трения  $b_1$  увеличение коэффициента внешнего трения  $b_2$  сверх значения  $b_1/0,0903$  также оказывает дестабилизирующее влияние.

2. Обнаруженное в п. 1 существование зоны квазиустойчивости при наличии только внешнего трения противоречит мнению (сложившемуся, по-видимому, на основе анализа «роторных» задач) о стабилизирующей роли такого трения. Рассмотрим, следуя [3], общую постановку задачи об устойчивости равновесия упругой системы, при действии неконсервативных позиционных и диссипативных сил. Линеаризованные уравнения движения такой системы удовлетворяются, если вектор перемещений имеет вид  $u = \psi \exp(st)$ , где  $\psi$  — вектор, определяющий форму колебаний,  $t$  — время,  $s$  — характеристический показатель. Вектор  $\psi$  определяется из операторного уравнения  $[As^2 + C + \delta D(s) + \beta B]\psi = 0$ , в котором  $A$  и  $C$  — операторы, характеризующие градиенты кинетической и потенциальной энергии системы соответственно;  $D(s)$  — оператор, характеризующий демпфирующие силы;  $B$  — оператор, характеризующий неконсервативные позиционные силы;  $\delta$  — параметр демпфирования;  $\beta$  — параметр неконсервативных позиционных сил. В [3] устанавливается, что если

$$D(s) = As \quad (2.1)$$

то парадокс Циглера отсутствует. Поскольку (2.1) довольно естественно описывает силы внешнего трения, то получается, что парадокс Циглера порождается только внутренним трением. Однако существуют случаи, в которых описание линейно-вязкого внешнего трения не соответствует соотношению (2.1). В этих случаях также возникает парадокс Циглера. В сущности именно такой случай представлен в п. 1 (выражение для  $P_*$ ).

Рассмотрим, также, следуя [3], еще один пример — консольный стержень с распределенными параметрами, нагруженный следящей силой (фиг. 3). Будем считать, что свойства материала стержня описываются соотношением  $\sigma = E\varepsilon + b_1\varepsilon'$ , где  $\sigma$  — напряжение,  $\varepsilon$  — деформация,  $E$  — модуль упругости,  $b_1$  — коэффициент вязкости материала стержня. (В [3] рассмотрен несколько более общий случай зависимости между напряжением и деформацией.)

Внешнее распределенное по длине трение будем считать отсутствующим, но учтем наличие на свободном конце стержня линейно-вязкого демпфера с коэффициентом трения  $b_2$ . Очевидно, что коэффициент  $b_1$  учитывает внутреннее, а  $b_2$  — внешнее трение в рассматриваемой системе.

В результате приходим к следующей краевой задаче относительно формы колебаний  $W(\xi)$ :

$$(1 + \eta s) d^4 W / d\xi^4 + \beta d^2 W / d\xi^2 + s^2 W = 0 \quad (2.2)$$

$$W = 0, \quad dW / d\xi = 0 \quad (\xi = 0), \quad d^2 W / d\xi^2 = 0 \quad (2.3)$$

$$(1 + \eta s) d^3 W / d\xi^3 = \delta s W \quad (\xi = 1), \quad \xi = x/l$$

$$\eta = b_1 l^{-2} (EJ/m)^{1/2}, \quad \delta = b_2 l^{-2} (mEJ)^{-1/2}, \quad \beta = Pl^2 / (EJ)$$

$m$  — масса единицы длины стержня,  $J$  — момент инерции его поперечного сечения,  $P$  — значение следящей силы.

Характеристическое уравнение записывается в форме

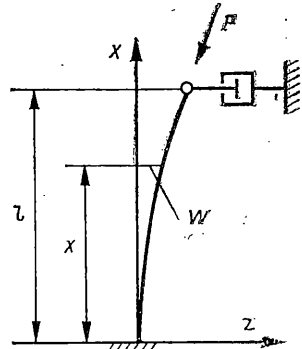
$$(1 + \eta s) \lambda^4 + \beta \lambda^2 + s^2 = 0$$

Его корни имеют вид

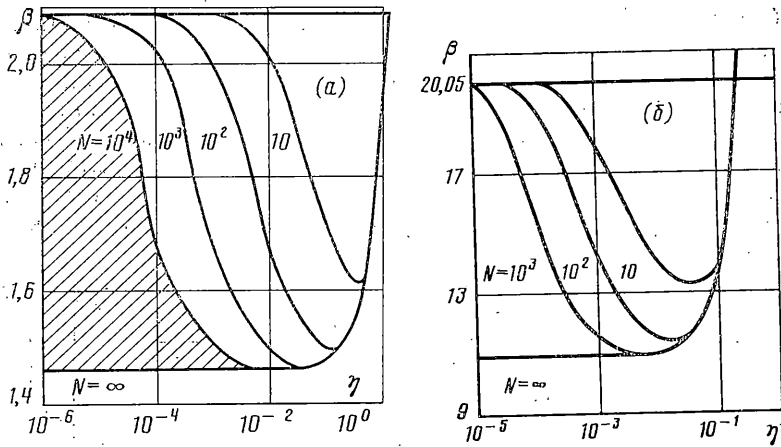
$$\lambda_1 = (1 + \eta s)^{-1/2} \left\{ -1/2 \beta + [1/4 \beta^2 - (1 + \eta s) s^2]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

$$\lambda_2 = i (1 + \eta s)^{-1/2} \left\{ 1/2 \beta + [1/4 \beta^2 - (1 + \eta s) s^2]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

$$\lambda_3 = -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_2$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Подчиняя общее решение дифференциального уравнения (2.2) граничным условиям (2.3), получаем следующее условие существования нетривиальных решений:

$$\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \operatorname{sh} \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_2 - 2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 \operatorname{ch} \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_2 - \delta (1 + \eta s)^{1/2} [\lambda_2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \operatorname{ch} \lambda_2 \operatorname{sh} \lambda_1 + \lambda_1 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \operatorname{ch} \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_2] = 0 \quad (2.4)$$

Комплексные корни трансцендентного уравнения (2.4) определялись численно методом Мюллера, причем в качестве начального приближения принималось  $s=0$ . Число корней, подлежащих вычислению, задавалось равным четырем. Когда сжимающая сила достигла критического значения, вещественная часть одного из корней уравнения (2.4) становилась положительной.

Для проверки точности выбранного численного метода сначала были рассмотрены ранее изученные случаи. При полном отсутствии трения вычисленное критическое значение сжимающей силы составило  $P_*^0 = 20,05 EJ/l^2$ , что в точности совпадает с классическим решением этой задачи. Критические значения, вычисленные при отсутствии внешнего трения  $\delta=0$  и отличных от нуля значениях коэффициента внутреннего трения  $\eta$ , полностью совпали с представленными в [3]. Так же, как и в упомянутой статье, при стремлении коэффициента внутреннего трения  $\eta$  к нулю получено  $P_* = 10,94 EJ/l^2$ .

Затем был рассмотрен случай отсутствия внутреннего трения ( $\eta=0$ ). При стремлении коэффициента внешнего трения  $\delta$  к нулю получено значение  $P_*^1 = 16,1 EJ/l^2$ . Таким образом, как и в п. 1, чисто внешнее трение приводит к появлению парадокса Циглера. Приведенные примеры показывают, что для возникновения этого парадокса во всяком случае необходимо нарушение условия (2.1).

**3. Обратимся к более подробному анализу квазиустойчивых состояний равновесия при малом вязком трении, когда  $P_* < P < P_*^0$ .**

Объективная опасность таких состояний с эксплуатационной точки зрения может быть оценена темпом разрастания амплитуд возмущенного движения, т. е. инкрементом колебаний, который зависит от значений положительных вещественных частей корней характеристического уравнения. С уменьшением коэффициента вязкости инкремент колебаний непрерывно уменьшается и при достаточно малых значениях этого коэффициента он столь мал, а разрастание амплитуд настолько медленное, что возмущенное движение квазиустойчивой системы практически не отличается от гармонических колебаний (прямое указание на это можно найти в [3], где этот вариант возмущенного движения назван тихим флаттером). В таком случае квазиустойчивые состояния естественно трактовать как практически устойчивые (устойчивые на конечном интервале времени).

Вернемся к рассмотренной в п. 1 системе Циглера и ограничимся случаем  $b_1 = b_2 = b$ . Введем в рассмотрение безразмерные величины  $\beta = Pl/c$  и  $\eta = b(mcl^2)^{-1/2}$  и рассмотрим показанную на фиг. 4, а область, которая ограничена осью ординат, прямой  $\beta_* = 7/2 - \sqrt{2}$  и параболой  $\beta_*^0 = 41/28 + 1/2 \eta^2$ . Для точек этой области численно определялись все корни характеристического уравнения (1.2). Поскольку сами по себе значения положительных вещественных частей корней уравнения (1.2) не являются достаточно

наглядной характеристикой темпа разрастания колебаний, ниже темп разрастания колебаний характеризуется числом циклов  $N$ , за которое начальное возмущение увеличивается в  $e$  раз. На фиг. 4, а в полулогарифмических координатах представлено семейство кривых, соответствующих различным числам  $N$ .

Если считать практически устойчивыми квазиустойчивые состояния, при которых за заданное число циклов начальное возмущение увеличивается менее чем в  $e$  раз, то каждая из кривых выделяет из зоны квазиустойчивости соответствующую зону практической устойчивости (на фиг. 4, а заштрихована зона практической устойчивости, соответствующая  $N=10^4$ ). Очевидно, что размеры этих зон тем меньше, чем жестче ограничение, наложенное на темпы роста амплитуды колебаний, т. е. чем больше принимаемое значение  $N$ .

Для квазиустойчивых состояний консольного стержня, рассмотренного в п. 2, также определялось число циклов колебаний, за которое начальное возмущение увеличивается в  $e$  раз. По результатам вычислений в случае отсутствия внешнего трения ( $\delta=0$ ) построены кривые, представленные на фиг. 4, б.

Таким образом, не всегда квазиустойчивые состояния следует трактовать как практически неустойчивые.

Для некоторых конструкций кратковременного срока использования квазиустойчивые состояния могут быть признаны устойчивыми на конечном промежутке времени. В этих случаях вполне уместен выразительный термин «тихий флаттер».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пиглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир. 1971. 192 с.
2. Бологин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Bolotin V. V., Zhinzher N. I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces // Int. J. Solids Structures. 1969. V. 5. P. 965-989.

Ленинград

Поступила в редакцию  
2.III.1987