

УДК 539.214

## ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ ПЛАСТИЧНОСТИ РАБОТНОВА НА ПЯТИМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО ДЕВИАТОРОВ

ПОПОВ Л. Г.

В рамках двумерных соотношений пластичности, основанных на известной модели Работнова [1], могут быть описаны многие свойства реальных упругопластических материалов [2].

В публикуемой работе идея механизма пластичности Работнова перенесена на пятимерное пространство девиаторов. Результаты расчетов по полученным при этом определяющим соотношениям сравниваются с данными известных экспериментов по сложному нагружению на различных двумерных и трехмерных траекториях деформирования.

1. Все дальнейшие рассуждения проводятся в пятимерном евклидовом пространстве  $R^5$  с ортогональным базисным репером  $e_k$  ( $k=1, 5$ ). Вектор деформаций  $\xi = \xi_k e_k$  и вектор напряжений  $S = S_k e_k$  определяются компонентами  $\xi_1 = e_{11}$ ,  $\xi_2 = (e_{22} - e_{33})/\sqrt{3}$ ,  $\xi_3 = 2e_{12}/\sqrt{3}$ ,  $\xi_4 = 2e_{23}/\sqrt{3}$ ,  $\xi_5 = 2e_{31}/\sqrt{3}$ ,  $S_1 = 3S_{11}/2$ ,  $S_2 = \sqrt{3}(S_{22} - S_{33})/2$ ,  $S_3 = \sqrt{3}S_{12}$ ,  $S_4 = \sqrt{3}S_{23}$ ,  $S_5 = \sqrt{3}S_{31}$ , где  $e_{ij}$ ,  $S_{ij}$  — девиаторы деформаций и напряжений.

Модули этих векторов равны соответствующим интенсивностям деформаций и напряжений

$$|\xi| = (\xi_k \xi_k)^{1/2} = ({}^2/3 e_{ij} e_{ij})^{1/2}, \quad |S| = (S_k S_k)^{1/2} = ({}^3/2 S_{ij} S_{ij})^{1/2}$$

Процесс изменения девиатора деформаций изображается в  $R^5$  траекторией деформирования. Радиус-вектор точки траектории деформирования есть вектор деформации  $\xi$ . Определяющие соотношения пластичности должны указывать правило, по которому можно поставить каждой точке траектории деформирования соответствующий вектор напряжений  $S$ .

Далее проводится построение определяющих соотношений пластичности на основе модели Работнова — круглой тонкостенной трубки при сложном изгибе [4].

Как отмечено в [3], соотношения модели Работнова имеют ряд качественных аналогий с другими известными соотношениями пластичности. Из них следует особо выделить предложение, высказанное в [4]: рассматривать в качестве регулярных предельных поверхностей пластичности плоскости. Существенно, что модель Работнова подсказывает конкретный закон парности плоскостей пластичности (перенесенных, однако, в пространство деформаций) и возможность построения определяющих соотношений не в приращениях, а в конечных величинах с выполнением интегрирования по каждой из плоскостей.

Материал предполагается первоначально изотропным, пластически несжимаемым, с постоянными упругими свойствами. Применительно к введенному пятимерному пространству девиаторов обобщение представлений этой модели приводит к следующему.

В естественном (недеформированном) состоянии поверхность деформирования, ограничивающая область чисто упругих деформаций, есть сфера радиуса  $\xi_0$ :  $x_k x_k = \xi_0^2$ , где  $\xi_0$  — предел упругой деформации при чистом сдвиге. Она представляется как огибающая предельных плоскостей пластичности, уравнения которых в исходном состоянии есть  $x_k n_k = \xi_0$ , где  $n = n_k e_k$  — единичный вектор нормали данной плоскости.

Каждая из этих плоскостей может при деформировании перемещаться лишь параллельно, причем в процессе деформирования расстояние между плоскостями пластичности, имеющими противоположное направление нормалей (парные плоскости), постоянно и равно  $2\xi_0$ .

Текущее значение вектора деформаций  $\xi$  отодвигает в направлении от начала координат плоскости пластичности, имеющие с ним общую точку, при этом движение каждой из них вызывает такое же перемещение парной плоскости. Возникающая элементарная пластическая деформация  $\xi_n^p$  от перемещения одной плоскости пластичности, уравнение которой в этот момент  $x_n n_h = h$  направлено по нормали  $\mathbf{n}$  к ней и зависит от отклонения  $h - \xi_0$ , на которое она переместилась из начального состояния,  $p$  имеет вид:  $\xi_n^p = q(h - \xi_0) \mathbf{n}$ , где  $q = q(h - \xi_0)$  — некоторая неизвестная пока нечетная функция:  $q(-t) = -q(t)$ . Далее будет показан способ ее определения по диаграмме чистого сдвига.

Полная пластическая деформация получается осреднением суммы элементарных от перемещения всех прямых пластичности

$$\xi^p = k \int_{\Omega} q(h - \xi_0) \mathbf{n} d\Omega \quad (1.1)$$

где  $d\Omega$  — элемент телесного угла в  $R^5$ ,  $\Omega$  — полный телесный угол,  $k$  — некоторый нормирующий множитель ( $k = 15/8\pi^{-2}$ ) (см. фиг. 1).

Соотношения между напряжениями и деформациями принимают вид ( $E$  — модуль Юнга):

$$\mathbf{S} = E \left[ \xi - k \int_{\Omega} q(h - \xi_0) \mathbf{n} d\Omega \right] \quad (1.2)$$

Для интегрирования в (1.1) компоненты единичного вектора нормали  $\mathbf{n}$  плоскости пластичности удобно выразить через обобщенные полярные углы  $\varphi_i$  ( $i=1, 4$ ):

$$n_1 = \cos \varphi_1, \quad n_2 = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \quad n_3 = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \quad (1.3)$$

$$n_4 = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \cos \varphi_4$$

$$n_5 = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_4$$

$$(0 \leq \varphi_i \leq \pi \quad (i=1, 2, 3), \quad 0 \leq \varphi_4 \leq 2\pi)$$

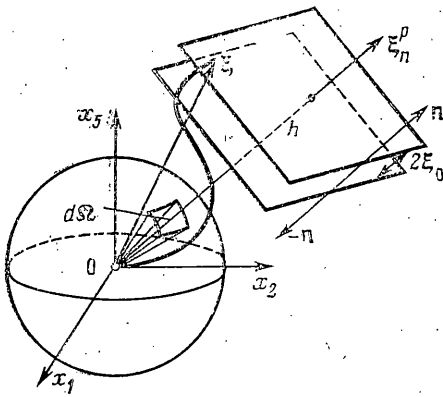
При этом [5]  $d\Omega = \sin^3 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 \sin \varphi_3 d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 d\varphi_4$ . Соотношения (1.2), учитывая парность плоскостей пластичности, можно записать так:

$$\mathbf{S} = E \left[ \xi - 2k \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} q(h - \xi_0) \mathbf{n} \sin^3 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 \sin \varphi_3 d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 d\varphi_4 \right] \quad (1.4)$$

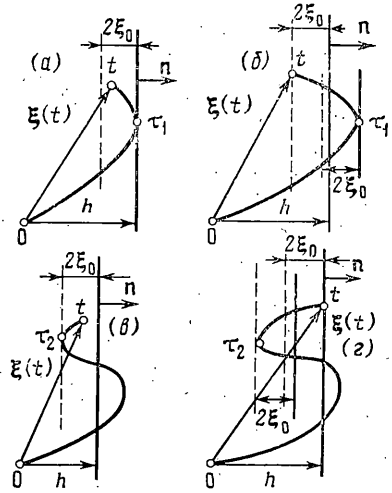
Как видно из (1.4), вектор напряжений  $\mathbf{S}$ , построенный для некоторой точки  $\xi$  траектории деформирования, есть функционал от всей предшествующей траектории деформирования, так как величина  $h$ , равная отклонению данной плоскости с нормалью  $\mathbf{n}$  от начала координат, зависит от всей истории деформирования и определяется по следующему правилу.

Пусть траектория деформирования задана кривой  $\xi = \xi(\tau)$ , где  $\tau \in [0, t]$  — время или любой монотонно возрастающий с деформированием параметр. Тогда в момент  $t$  возможны следующие три случая:  $h = \xi_0$ , если  $\max \{ |\xi(\tau) \cdot \mathbf{n}| \leq \xi_0 \}$ ;  $h = \min \{ \xi(\tau_1) \cdot \mathbf{n}, \xi(t) \cdot \mathbf{n} + 2\xi_0 \}$ , если моменту  $t$  предшествовал последний активный  $\max \{ \xi(\tau) \cdot \mathbf{n} \}$  в момент  $\tau_1$ , т. е. такой максимум значения  $\xi(\tau) \cdot \mathbf{n}$ , при котором в момент  $\tau_1$  конец вектора  $\xi(\tau_1)$  принадлежал соответствующей плоскости;  $h = \max \{ \xi(\tau_2) \cdot \mathbf{n} + 2\xi_0, \xi(t) \cdot \mathbf{n} \}$ , если моменту  $t$  предшествовал последний активный  $\min \{ \xi(\tau) \cdot \mathbf{n} \}$  в момент  $\tau_2$ , т. е. если при  $\tau_2$  величина  $\xi(\tau) \cdot \mathbf{n}$  достигает минимума и при этом вектор  $\xi(\tau_2)$  касается соответствующей плоскости с нормалью  $\mathbf{n}$ .

Указанное правило определения  $h$  проиллюстрировано на фиг. 2 (а-г), где нормаль  $\mathbf{n}$  плоскости пластичности лежит в плоскости чертежа.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. В простейшем случае функцию  $q=q(h-\xi_0)$  можно взять линейной ( $g_0$  — постоянная):

$$q(h-\xi_0)=g_0(h-\xi_0) \quad (2.1)$$

Для определения  $g_0$  рассмотрим деформирование по оси  $\xi_1$ . В этом случае в соответствии с описанным выше правилом для отклонения  $h$  плоскости пластичности с нормалью  $n$ , определяемой (1.3), имеем

$$h=\xi_0 \quad (-\xi_0/\xi_1 \leq \cos \varphi_1 \leq \xi_0/\xi_1)$$

$$h=\xi_1 \cos \varphi_1 \quad (\xi_0/\xi_1 < \cos \varphi_1 < 1) \quad (2.2)$$

$$h=-\xi_1 \cos \varphi_1 + 2\xi_0 \quad (-1 \leq \cos \varphi_1 < -\xi_0/\xi_1)$$

Подставляя  $h$  из (2.2) в (1.4) и вычисляя интегралы по  $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ , получим

$$S_1 = E \left[ \xi_1 - 4k\pi^2 g_0 \int_0^{\omega} (\xi_1 \cos \varphi_1 - \xi_0) \cos \varphi_1 \sin^3 \varphi_1 d\varphi_1 \right] \quad (2.3)$$

$$S_m = 0 \quad (m=2, 5), \quad \omega = \arccos(\xi_0/\xi_1)$$

Вычисляя интеграл в (2.3), получим

$$S_1 = E \left[ \xi_1 - 4k\pi^2 g_0 \left( \frac{1}{5} \xi_1^{-1} \xi_0 + \frac{1}{6} \xi_0^3 / \xi_1^2 - 1/20 \xi_0^5 / \xi_1^4 \right) \right] \quad (2.4)$$

Видно, что в (1.8) удобно положить нормирующий множитель  $k=15/8\pi^2$ . Тогда

$$S_1 = E \xi_0 \left[ (1-g_0) \xi_1 / \xi_0 + 15/8 g_0^{-5} / 4 g_0 (\xi_0 / \xi_1)^2 + 3/8 g_0 (\xi_0 / \xi_1)^4 \right] \quad (2.5)$$

Такие же соотношения получаются при одноосном деформировании по другим осям, так как постулат изотропии заложен в самой конструкции определяющих соотношений (1.4).

Варьируя  $g_0$ , можно описывать одноосную диаграмму материалов от имеющих площадку текучести до существенно упрочняющихся. При  $g_0=1$  одноосная диаграмма имеет горизонтальную асимптоту, при  $0 < g_0 < 1$  — наклонную с углом наклона  $\beta$ , который определяется соотношением  $\operatorname{tg} \beta = E(1-g_0)$ , а точка  $S_1^*$  пересечения асимптоты с осью  $S_1$  есть  $S_1^* = 15/8 g_0 E \xi_0$ . Из соотношений для  $\operatorname{tg} \beta$  и  $S_1^*$  следует простой способ определения постоянных материала  $g_0$  и  $\xi_0$ .

Соотношения (2.5) достаточно хорошо описывают одноосные диаграммы реально упрочняющихся материалов. Однако соотношения (1.4) позволяют описывать материалы с произвольной гладкой одноосной диаграммой, имеющей, например, площадку текучести с последующим участком

упрочнения. Подберем функцию  $q=q(h-\xi_0)$  таким образом, чтобы связь  $S_1$  и  $\xi_1$  по соотношениям (1.4) при одноосном деформировании совпадала с известной из эксперимента одноосной диаграммой  $S_1=S_1(\xi_1)$ . При деформировании по оси  $\xi_1$  из (1.4), учитывая (2.2), получим

$$S_1 = E \left[ \xi_1 - \frac{15}{2} \int_0^{\omega} q(\xi_1 \cos \varphi_1 - \xi_0) \sin^3 \varphi_1 \cos \varphi_1 d\varphi_1 \right]$$

$$\omega = \arccos(\xi_0/\xi_1)$$

Приравняем найденное значение  $S_1$  экспериментальному  $S_1(\xi_1)$ . Обозначив  $t = \cos \varphi_1$ ,  $x = \xi_1/\xi_0$ ,  $h_1 = h/\xi_0$ ,  $q_1(h_1-1) = q(h-\xi_0)/\xi_0$ ,  $S^*(x) = S_1(\xi_1)/(E\xi_0)$ ,  $f(x) = x - S^*(x)$ , получим

$$\int_{1/x}^1 q_1(xt-1)(1-t^2)t dt = \frac{2}{15} f(x) \quad (2.6)$$

Вводя новую переменную интегрирования  $z = xt$ , соотношение (2.6) можно переписать так:

$$\int_1^x q_1(z-1)(x^2-z^2)z dz = \frac{2}{15} x^4 f(x) \quad (2.7)$$

Продифференцировав (2.7) по  $x$  и умножив обе части получившегося равенства на  $x/2$ , получим

$$\int_1^x q_1(z-1)x^2 z dz = \frac{1}{15} x \frac{d}{dx} (x^4 f(x)) \quad (2.8)$$

Вычитая (2.7) из (2.8), имеем

$$\int_1^x q_1(z-1)z^3 dz = \frac{1}{15} \left( x \frac{d}{dx} (x^4 f(x)) - 2x^4 f(x) \right) \quad (2.9)$$

Дифференцируя (2.9) по  $x$ , получим

$$q_1(x-1) = \frac{1}{15x^3} \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} (x^4 f(x)) - 2x^4 f(x) \right) \quad (2.10)$$

или, учитывая обозначение  $f(x) = x - S^*(x)$ , будем окончательно иметь соотношение

$$q_1(x-1) = 1/15 (15x - 8S^*(x) - 7xdS^*/dx - x^2 d^2 S^*/dx^2) \quad (2.11)$$

которое позволяет по экспериментальной одноосной диаграмме определять искомую функцию  $q=q(h-\xi_0)$ . В дальнейшем при расчетах ограничимся представлением (2.1).

3. При использовании формул (1.4) приходится вычислять интегралы в  $R^5$  по поверхности  $\Omega^+ = \{x_1^2 + \dots + x_5^2 = 1, x_5 \geq 0\}$  — верхней половине единичной сферы

$$I = \int_{\Omega^+} f(x) d\Omega \quad (3.1)$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся методом кратного применения квадратурных формул гауссова типа с весом [5]. Вводя новые переменные  $t_k = \cos \varphi_k$  ( $k=1, 4$ ), где  $\varphi_k$  — полярные углы, интеграл (3.1) можно записать в виде

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(t_1, t_2, t_3, t_4) (1-t_1^2) \sqrt{1-t_2^2} \frac{1}{\sqrt{1-t_4^2}} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 \quad (3.2)$$

Вычисление этого интеграла сводится к четырехкратному вычислению интегралов типа

$$\int \varphi(t) (1-t^2)^{m/2} dt \quad (-1 \leq t \leq 1, m = -1, 0, 1, 2)$$

для которых применимы известные квадратурные формулы гауссова типа с весом  $\rho(t) = (1-t^2)^{m/2}$ :

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) (1-t^2)^{m/2} dt \approx \sum_{j=1}^l A_j^{(m)} \varphi(t_j^{(m)}) \quad (3.3)$$

Формулы (3.3) становятся точными, если  $\varphi(t)$  — многочлен степени не более  $(2l-1)$ . Значения коэффициентов  $A_j^{(m)}$  и узлов  $t_j^{(m)}$  приведены, например, в [5].

Расчеты по определению значений вектора напряжений  $S$  на заданной траектории деформирования проводятся по следующей схеме. По узлам кубатурных формул (3.3) определяются значения полярных углов  $\varphi_k$ , а по ним с помощью (1.3) — компоненты векторов в плоскостях пластичности, вклад от перемещения которых учитывается в кубатурной формуле для интегралов (1.1). Для каждой из этих плоскостей определяются значения их отклонений  $h$  от начала координат в соответствующие моменты деформирования. Затем с использованием кубатурных формул (3.3) для выбранных точек на траектории деформирования  $\xi = \xi(\tau)$  вычисляются соответствующие значения вектора напряжений  $S(\tau)$ . Отметим, что с вычислительной точки зрения расчет по предложенным соотношениям не сложнее, чем расчет по теории пластического течения (в скоростях), где для решения такой задачи приходится численно интегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим возможность описания с помощью предлагаемых соотношений пластичности известных свойств упругопластических тел, обнаруженных в экспериментах по сложному деформированию.

4. Эксперименты типа плоских траекторий деформирования проводятся на трубчатых образцах, подверженных совместному действию осевого растяжения и кручения. Траектория деформирования — некоторая кривая на плоскости  $O\xi_1\xi_3$ . В качестве таких траекторий наиболее часто рассматриваются двухзвенные и трехзвенные ломаные и траектории в форме дуги окружности.

Рассмотрим двухзвенную ломаную  $OAB$ , состоящую из двух прямолинейных участков. Пусть звено  $OA$  расположено по оси  $\xi_1$  и точке  $A$  соответствует значение  $\xi_1 = \xi_1^\circ$ ,  $\alpha_0$  — угол между направлениями  $OA$  и  $OB$ .

На фиг. 3 приведены данные расчетов по предложенным соотношениям экспериментов такого типа в безразмерных координатах, где  $|S| = (S_1^2 + S_3^2)^{1/2}$  — модуль вектора напряжений,  $s$  — длина траектории деформирования,  $\Delta s$  — длина, отсчитываемая от точки излома,  $\alpha = \arccos [(S_1 \cos \alpha_0 + S_3 \sin \alpha_0) / |S|]$  — угол между вектором  $S$  и направлением участка  $AB$  траектории деформирования,  $g_0 = 0,98$ .

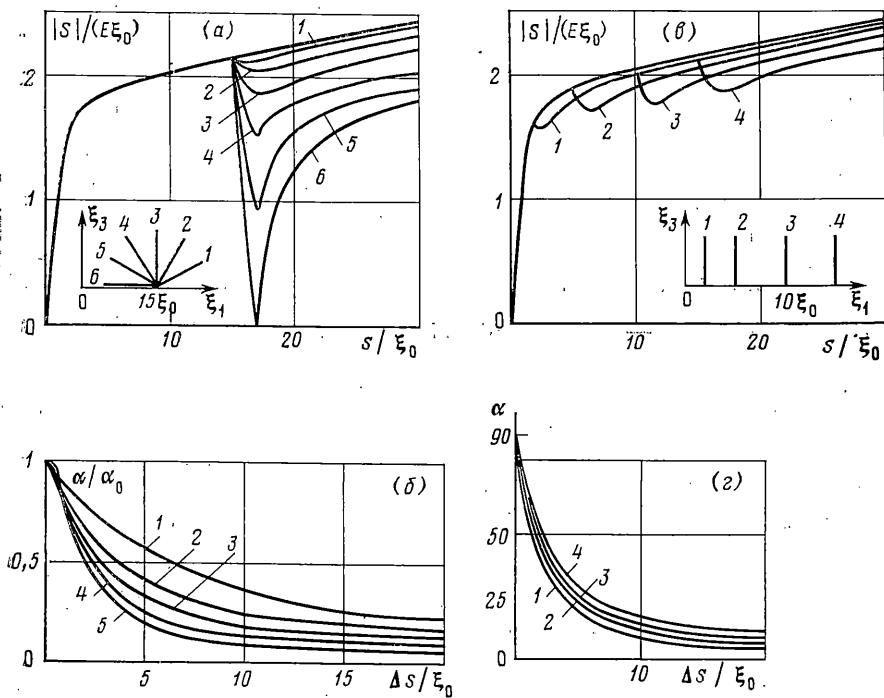
На фиг. 3, а приведены рассчитанные зависимости величины для излома траектории при  $\xi_1^\circ = 15\xi_0$  на угол  $\alpha_0 = 30, 60, 90, 120, 150, 180^\circ$  (кривые 1–6 соответственно). После «нырка» напряжений при  $s = \xi_1^\circ$  значения  $|S|$  сначала приближаются к кривой одноосного деформирования, но, начиная с некоторого  $s$ , идут приблизительно параллельно с ней. Величина падения  $|S|$  увеличивается с ростом угла излома  $\alpha_0$ . Характер нырка напряжений при тупых углах излома ( $\alpha_0 > 90^\circ$ ) меняется. Намечается тенденция к образованию угла на графиках в точках минимума. На фиг. 3, б показано изменение угла  $\alpha$  между вектором  $S$  и направлением траектории деформирования после точки излома. Как видно из этих графиков,  $S$  приближается по направлению к касательной к траектории деформирования.

На фиг. 3, в, г приведены данные расчетов для двухзвенных траекторий с углом излома  $\alpha_0 = 90^\circ$  при различных длинах первого участка ( $\xi_1^\circ / \xi_0 = 2, 5, 10, 15$ , кривые 1–4 соответственно). Как видно из этих графиков, величина падения  $|S|$  после точки излома возрастает с увеличением длины начального участка  $\xi_1^\circ$ , а скорость приближения вектора  $S$  по направлению к касательной к траектории деформирования уменьшается.

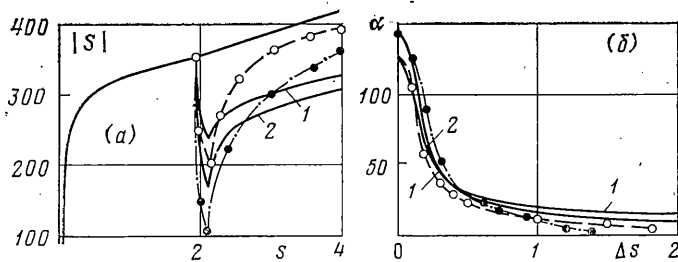
Все отмеченные качественные особенности поведения  $S$  после точки излома подтверждаются известными экспериментами [7–9].

Количественное сравнение расчетов по модели Работнова и опытных данных для траекторий с углом излома  $\alpha_0 \leq 90^\circ$  уже проводилось в [2] в рамках двумерных соотношений. Проведенные расчеты по пятимерным соотношениям близки к ним и дают примерно такое же достаточно хорошее совпадение с экспериментом.

Рассмотрим случай  $\alpha_0 > 90^\circ$ . На фиг. 4 сплошными линиями проведены графики  $|S|$  (фиг. 4, а) и  $\alpha$  (фиг. б) в зависимости от  $s$ , рассчитанным по соотношениям



Фиг. 3



Фиг. 4

(1.4) для нержавеющей ст. 1X18H10T в отожженном состоянии (константы материала  $E=1,85 \cdot 10^5$  МПа,  $g_0=0,982$ ,  $\xi_0=8,37 \cdot 10^{-4}$ ) для  $\alpha_0=125, 145^\circ$  (кривые 1, 2 соответственно) и экспериментальные данные [17], показанные штриховыми и штрихпунктирными линиями соответственно со светлыми и темными кружками (на фигурах, где представлены экспериментальные данные, напряжения  $S$  измеряются в МПа, деформации  $s$  – в процентах, а углы  $\alpha$  – в градусах). Как видно, и при  $\alpha_0 > 90^\circ$  соотношения (1.4) достаточно хорошо описывают эксперимент.

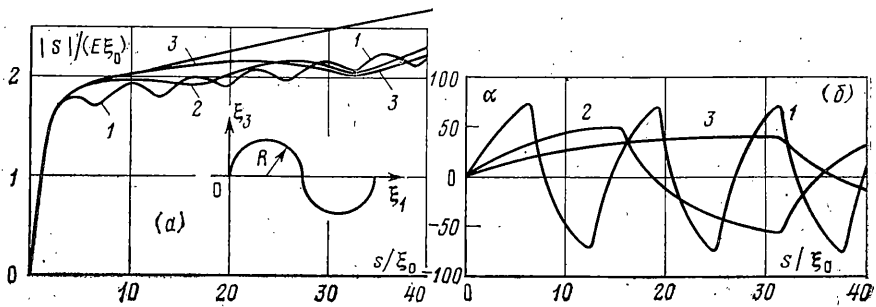
Рассмотрим теперь на плоскости  $O\xi_1\xi_3$  траекторию деформирования в виде сопряженных полуокружностей радиуса  $R$  с центрами по оси  $O\xi_1$ . Уравнение такой траектории можно задать в виде

$$\xi_1 = (2m-1)R - R \cos(\varphi - \pi(m-1)), \quad \xi_3 = R \sin \varphi$$

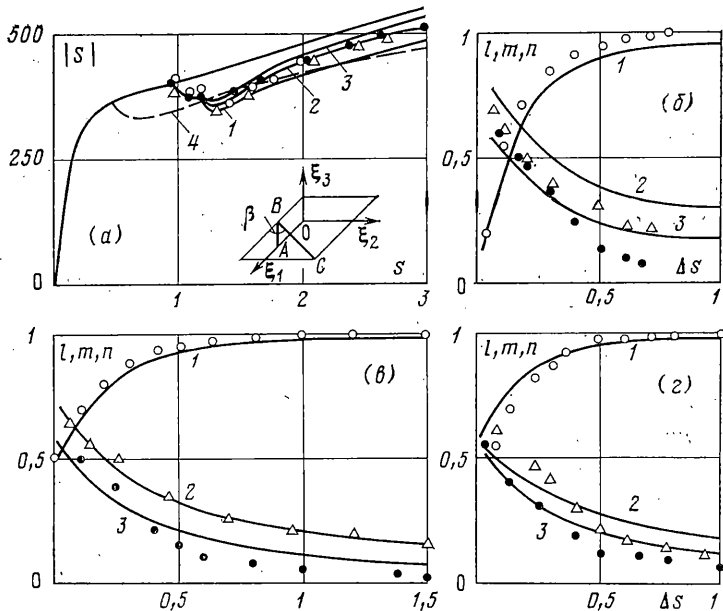
где  $s$  – длина траектории,  $\varphi = s/R$ ,  $m = [\varphi/\pi] + 1$  – порядковый номер полуокружности (квадратные скобки здесь означают целую часть заключенного в них числа).

Результаты расчетов по соотношениям (1.4) для такой траектории будем представлять в виде зависимостей  $|S|$  и  $\alpha$  от величины  $s$ , где  $|S| = (S_1^2 + S_3^2)^{1/2}$  – модуль вектора напряжений  $S$ ,  $\alpha$  – угол между направлением  $S$  и касательной к траектории деформирования, определяемый из соотношений  $\alpha = \gamma - \beta$ ,  $\text{tg } \gamma = S_3/S_1$ ,  $\text{tg } \beta = \cos \varphi / \sin(\varphi - \pi(m-1))$ .

На фиг. 5 представлены графики этих зависимостей в безразмерных координатах для различных значений  $R$  (постоянная материала  $g_0=0,98$ ). Кривые 1–3 соответствуют случаям  $R/\xi_0=2, 5, 10$ . Как видно, в точках, близких к переходу с одной полуокружности на другую, наблюдается падение значения  $|S|$  с последующим частичным приближением к кривой одноосного деформирования. Зависимость  $\alpha(s)$  уже после прохождения второй полуокружности становится почти периодической, причем с увеличением значения  $R$  отклонения вектора напряжений  $S$  по направлению от касательной к траектории деформирования уменьшаются. Все эти качественные особенности совпадают с наблюдаемыми в экспериментах [9, 7].



Фиг. 5



Фиг. 6

5. Рассмотрим теперь описание соотношениями пластичности (1.4) результатов экспериментов, проведенных в трехмерном подпространстве  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  пространства девиаторов деформаций. В качестве таких экспериментов рассмотрим опыты [11] по деформированию тонкостенных трубчатых образцов при совместном растяжении, кручении и внутреннем давлении.

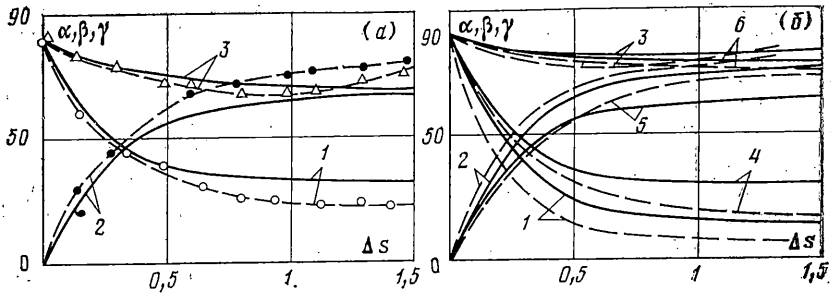
Траектории деформирования — трехзвенные пространственные ломаные и траектории в виде винтовых линий. Материал — ст. 45 в состоянии отжига (постоянные материала при расчетах  $E=1,78 \cdot 10^5$  МПа,  $g_0=0,962$ ,  $\xi_0=10,7 \cdot 10^{-4}$ ).

Рассмотрим в пространстве  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  трехзвенную ломаную  $OABC$ , где отрезок  $OA$  направлен из начала координат по оси  $O\xi_1$  — простое растяжение, отрезок  $AB$  параллелен оси  $O\xi_3$  — кручение при  $\xi_1=\xi_1^\circ$ ,  $\xi_2=0$  до значения  $\xi_3=\xi_3^\circ$ , отрезок  $BC$  параллелен плоскости  $O\xi_1\xi_2$  и составляет угол  $\beta$  с осью  $O\xi_1$  — совместное растяжение и внутреннее давление при  $\xi_3=\xi_3^\circ$  вдоль прямой  $BC$ . Для третьего звена  $BC$  введем репер отсчета  $\tau, \nu, \mu$  по формулам  $\tau=\cos \beta e_1+\sin \beta e_2$ ,  $\nu=-\sin \beta e_1+\cos \beta e_2$ ,  $\mu=e_3$ .

Вектор напряжений  $S$  определяется его модулем  $|S|=(S_1^2+S_2^2+S_3^2)^{1/2}$  и направляющими косинусами  $l, m, n$  ( $l^2+m^2+n^2=1$ ) в репере отсчета  $\tau, \nu, \mu$ :  $l=\cos \beta S_1^\circ - \sin \beta S_2^\circ$ ,  $m=\sin \beta S_1^\circ + \cos \beta S_2^\circ$ ,  $n=S_3^\circ$ , где  $S_k^\circ=S_k/|S|$  ( $k=1, 2, 3$ ) — направляющие косинусы вектора  $S$  в исходном репере  $e_1, e_2, e_3$ .

На фиг. 6, а сплошными линиями представлены результаты расчетов зависимости  $|S|$  (в МПа) от длины траектории деформирования  $s$  (в %) при  $\xi_1^\circ=100 \cdot 10^{-4}$ ,  $\xi_3^\circ=20 \cdot 10^{-4}$ . Кривая 0 соответствует одноосному деформированию, кривые 1–3 отвечают углам излома  $\beta=90, 60, 45^\circ$  соответственно, экспериментальные данные [11] помечены светлыми кружками, треугольниками и темными кружками соответственно. Видно, что расчетные кривые качественно полностью описывают наблюдаемые в экспериментах факты резкого падения  $|S|$  в точках  $A$  и  $B$  излома траектории деформирования и последующее «приближение» к траектории одноосного деформирования в различной степени в зависимости от значения  $\beta$ .

На фиг. 6, б–г представлены рассчитанные значения направляющих косинусов  $l, m, n$  (кривые 1–3 соответственно) и экспериментальные данные [11]. Как видно



Фиг. 7

из этих графиков, рассчитанные кривые качественно правильно описывают наблюдаемый в экспериментах эффект монотонного уменьшения значений  $m$  и  $n$ , т. е. приближение по направлению вектора  $S$  к направлению третьего звена траектории деформирования.

Рассмотрим теперь в пространстве деформаций  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  траекторию деформирования по оси  $O\xi_1$  в виде первоначального прямоугольного участка  $\xi_1=s$ ,  $\xi_2=\xi_3=0$  при  $s \leq R$  и дальнейшего деформирования по винтовой линии  $\xi_1=R \cos(\Delta s \cos \theta/R)$ ,  $\xi_2=R \sin(\Delta s \cos \theta/R)$ ,  $\xi_3=\Delta s \sin \theta$  при  $s \leq R$ , где  $s$  — длина траектории деформирования,  $R$  — радиус цилиндра с осью симметрии вдоль оси  $O\xi_3$ ,  $\theta$  — угол подъема винтовой линии на развертке цилиндра,  $\Delta s = s - R$ .

Результаты расчетов будем представлять в виде значения  $|S|$  и значений углов ориентации  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  вектора напряжений  $S$  в естественном сопровождающем репере  $\tau$ ,  $n$ ,  $l$  (касательная, нормаль, бинормаль). Имеем

$$\cos \alpha = -\sin \varphi \cos \theta S_1^\circ + \cos \varphi \cos \theta S_2^\circ + \sin \theta S_3^\circ$$

$$\cos \beta = \cos \varphi S_1^\circ + \sin \varphi S_2^\circ$$

$$\cos \gamma = \sin \varphi \sin \theta S_1^\circ - \cos \varphi \sin \theta S_2^\circ + \cos \theta S_3^\circ$$

где  $S_k^\circ = S_k/|S|$  ( $k=1, 2, 3$ ) — направляющие косинусы вектора  $S$  в репере  $e_1, e_2, e_3$  и  $\varphi = \Delta s \cos \theta/R$ ,  $\Delta s = s - R$ .

На фиг. 7, а приведены сплошными линиями рассчитанные по соотношениям (1.4) значения углов  $\alpha, \beta, \gamma$  в градусах (кривые 1–3 соответственно) и экспериментальные данные [11] (штриховые линии) для  $R=5 \cdot 10^{-3}$  при  $\theta=45^\circ$  соответственно в зависимости от  $\Delta s$  — длины траектории после выхода на винтовую линию. На фиг. 7, б аналогично для  $R=5 \cdot 10^{-3}$  при  $\theta=75^\circ$  (кривые 1–3) и для  $R=10^{-2}$  при  $\theta=45^\circ$  (кривые 4–6). На фиг. 7, а (штриховая кривая 4) показано рассчитанное значение  $|S|$  для  $R=5 \cdot 10^{-3}$  при  $\theta=45^\circ$ .

Как видно, и здесь наблюдается полное качественное совпадение результатов расчетов и экспериментов, в частности угол сближения  $\alpha$  (угол между вектором напряжения  $S$  и касательной  $\tau$  к траектории деформирования) сначала быстро уменьшается, а затем, начиная с  $\Delta s \approx 10^{-2}$ , сохраняет по существу постоянное значение.

Таким образом, в рамках соотношений пластичности, основанных на модели Работнова, могут быть описаны многие свойства реальных упругопластических материалов: упрочнение, эффект Баушингера, зависимость мгновенного модуля сдвига от предварительного осевого сжатия [2], эффекты типа запаздывания при плоских траекториях деформирования в виде ломаных (как с острым, так и с тупым углом излома) или дуг окружностей, а также эффекты, обнаруженные в трехмерных экспериментах на траекториях в виде трехзвенных ломаных и винтовых линий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Модель, иллюстрирующая некоторые свойства упрочняющегося пластического тела // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 1. С. 164–168.
2. Попов Л. Г. Описание эффектов сложного деформирования соотношениями, основанными на модели Ю. Н. Работнова // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 48–56.
3. Клошников В. Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ. 1979. 208 с.
4. Сандерс Дж. Соотношения между напряжениями и деформациями в пластической области, основанные на линейных функциях нагружения // Механика. 1956. № 3. С. 99–109.
5. Шилов Г. Е. Математический анализ: функции нескольких вещественных переменных. Ч. 1, 2. М.: Наука. 1972. 624 с.
6. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука. 1967. 500 с.
7. Ленский В. С. Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1960. № 5. С. 93–100.



8. *Коровин И. М.* Экспериментальное определение зависимости напряжения - деформация при сложном нагружении по траектории с одной точкой излома // Инж. журн. 1964. Т. 4. № 3. С. 592-600.
9. *Васин Р. А.* Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении // Упругость и неупругость. Вып. 1. М.: Изд-во МГУ. 1971. С. 59-126.
10. *Шиммарев О. А., Щерба А. Г.* Образ процесса нагружения для двузвенных ломаных траекторий деформации с углом излома более  $90^\circ$  // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 5. С. 185-189.
11. *Ленский В. С., Машков И. Д.* Проверка законов пластичности в трехмерном пространстве девиатора деформаций // Упругость и неупругость. Вып. 2. М.: Изд-во МГУ. 1971. С. 158-166.

Москва.

Поступила в редакцию  
28.XII.1985