

УДК 539.214

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ

АРУТЮНЯН Н. Х., РАДАЕВ Ю. Н.

В теории кручения упругих тел [1, 2] доказано, что среди призматических стержней с различными поперечными сечениями, имеющими одинаковую площадь A , оптимальной формой является круглое поперечное сечение.

Справедливость аналогичного утверждения показана [3] и для случая, когда весь материал стержня находится в состоянии пластического течения.

В настоящей работе приводятся постановка и решение оптимальных задач чисто пластического и упругопластического кручения призматических стержней. Из полученных результатов как частные случаи следуют результаты [1-3].

1. Оптимизация предельного крутящего момента для стержня двусвязного поперечного сечения. Рассмотрим стержень односвязного поперечного сечения Ω_2 . Ослабим его сечение, вырезав некоторую односвязную область Ω_1 . Обозначим $A_1 = \text{mes } \Omega_1$, $A_2 = \text{mes } \Omega_2$, $A = \text{mes } \Omega$, $\Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1$, $\gamma_1 = \partial\Omega_1$, $\gamma_2 = \partial\Omega_2$, γ_1, γ_2 — простые кусочно-гладкие контуры.

Зафиксируем внешний контур γ_2 . Поставим следующую оптимальную задачу: выбрать форму и расположение ослабляющего отверстия таким образом, чтобы полученный стержень с двусвязным поперечным сечением заданной площади A имел максимальный предельный крутящий момент по сравнению с любым другим стержнем, имеющим двусвязное поперечное сечение площади A и предписанную внешнюю границу γ_2 . Под предельным крутящим моментом $M_*(\gamma_1)$ понимается такое его значение, при котором весь материал стержня переходит в состояние пластического течения.

Предельный крутящий момент связан с функцией напряжений Праудтля φ соотношением [4]:

$$\frac{M_*(\gamma_1)}{2k} = \int \int_{\Omega} \varphi dx_1 dx_2 + c(\gamma_1)A_1, \quad \varphi = k\psi \quad (1.1)$$

где k — предел текучести материала, $c(\gamma_1)$ — константа, определяемая из решения следующей краевой задачи:

$$(\partial\psi/\partial x_1)^2 + (\partial\psi/\partial x_2)^2 = 1, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad \psi|_{\gamma_2} = 0, \quad \psi|_{\gamma_1} = c(\gamma_1) \quad (1.2)$$

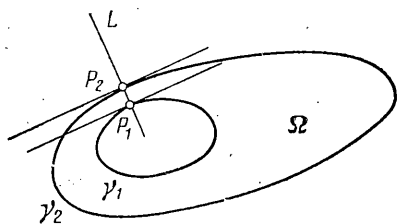
условием непрерывности ψ в $\bar{\Omega}$ ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$) и условием

$$\int \int_{\Omega} \psi dx_1 dx_2 = \max$$

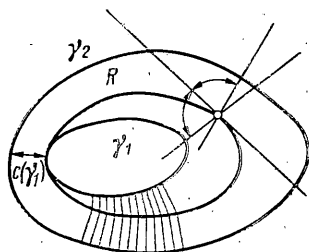
где $c(\gamma_1)$ — минимум расстояния между контурами γ_1 и γ_2 . Если отрезок P_1P_2 реализует указанный минимум, то прямая L , проведенная через точки P_1 и P_2 , ортогональна кривой γ_1 в точке P_1 и кривой γ_2 в точке P_2 (фиг. 1).

Оптимальная задача сводится к нахождению максимума функционала (1.1) при следующих условиях: γ_2, A_2 фиксированы, $\text{mes } \Omega = A$, ψ непрерывна в $\bar{\Omega}$, $|\nabla\psi| = 1$, $(x_1, x_2) \in \Omega$, $\psi = 0$ на контуре γ_2 , $\psi = c(\gamma_1)$ на контуре γ_1 .

Параметрические уравнения кривых γ_1, γ_2 возьмем соответственно в виде $x_1 = \lambda_1(s), x_2 = \mu_1(s), 0 \leq s \leq l_1; x_1 = \lambda_2(\sigma), x_2 = \mu_2(\sigma), 0 \leq \sigma \leq l_2; s, \sigma$ — натуральные параметры вдоль γ_1 и $\gamma_2; l_1, l_2$ — длины контуров γ_1, γ_2 . Наряду



Фиг. 1



Фиг. 2

с контурами γ_1, γ_2 рассмотрим внутреннюю эквидистанту γ к контуру γ_2 . Параметрические уравнения γ можно представить в виде $x_1 = \lambda_2(\sigma) - \mu_2'(\sigma)\alpha$, $x_2 = \mu_2(\sigma) + \lambda_2'(\sigma)\alpha$, $0 \leq \sigma \leq l_2$. Константа α находится из условия $\text{mes } \Omega = A$ и выражается через l_2 и A следующим образом:

$$\alpha = [l_2 - (l_2^2 - 4\pi A)^{1/2}] / (2\pi) \quad (1.3)$$

Действительно

$$A = \int_{\Omega} dx_1 dx_2$$

Интеграл справа по области Ω сведем к интегралу по прямоугольнику $0 \leq \sigma \leq l_2$, $0 \leq \xi \leq 1$ путем замены переменных $x_1 = \lambda_2(\sigma) - \xi\alpha\mu_2'(\sigma)$, $x_2 = \mu_2(\sigma) + \xi\alpha\lambda_2'(\sigma)$. Соответствующий указанному преобразованию переменных якобиан: $J = \alpha - \xi\alpha^2\kappa_2$, $\kappa_2(\sigma)$ — кривизна контура γ_2 как функция натурального параметра σ . Следовательно

$$A = \int_0^{l_2} \int_0^1 (\alpha - \xi\alpha^2\kappa_2(\sigma)) d\xi d\sigma$$

Учитывая, что

$$\int_0^{l_2} \kappa_2(\sigma) d\sigma = 2\pi$$

последнее равенство можно переписать в следующем виде: $\pi\alpha^2 - l_2\alpha + A = 0$. Разрешив полученное уравнение относительно α , приходим к формуле (1.3).

Если контур γ_1 отличен от γ , то в силу изопериметрического условия $A = \text{mes } \Omega$ получим, что $c(\gamma_1) < [l_2 - (l_2^2 - 4\pi A)^{1/2}] / (2\pi)$ (в этом случае существуют точки контура γ_1 , лежащие между γ_2 и γ). Следовательно, при варьировании внутреннего контура γ_1 относительно эквидистанты γ $\delta c < 0$. Известно [4], что решение краевой задачи (1.2), вообще говоря, не является непрерывно дифференцируемым всюду в Ω , так как решение задачи Коши $|\nabla\psi|^2 = 1$, $\psi(\omega_1(\tau), \omega_2(\tau)) = a$ на начальной кривой $x_1 = \omega_1(\tau)$, $x_2 = \omega_2(\tau)$ в параметрической форме имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \omega_1(\tau) + \xi\omega_2'(\tau) (\omega_1'^2 + \omega_2'^2)^{-1/2} \\ x_2 &= \omega_2(\tau) - \xi\omega_1'(\tau) (\omega_1'^2 + \omega_2'^2)^{-1/2}, \quad \psi = a + \xi \end{aligned} \quad (1.4)$$

Поэтому в точке пересечения нормалей к граничным кривым γ_1 и γ_2 функции ψ , $\partial\psi/\partial x_1$, $\partial\psi/\partial x_2$ могут претерпевать разрыв. В частности, значение $c(\gamma_1) = \min(\gamma_1, \gamma_2)$ обеспечивает непрерывность функции ψ в $\bar{\Omega}$, но частные производные $\partial\psi/\partial x_1$ и $\partial\psi/\partial x_2$ претерпевают скачок при переходе через некоторую кривую R . Используя интегральные уравнения равновесия; можно доказать, что линия разрыва R является биссектрисой углов, составляемых нормальными к контурам γ_1 и γ_2 (фиг. 2). Если использовать песчаную аналогию, то R — проекция гребня песчаной насыпи на платформу, поддерживающую насыпь. Необходимо отметить, что при сложной

форме контуров γ_1 и γ_2 и наличии изломов возникают линии разрыва, образованные пересечением нормалей к γ_1 и γ_2 в отдельности. В случае $\gamma_1 = \gamma$ линия разрыва R совпадает с γ и, если γ_2 — гладкий выпуклый контур, то решение краевой задачи (1.2) будет непрерывно дифференцируемым. Значение предельного скручивающего момента при $\gamma_1 = \gamma$ дается формулой

$$M_*(\gamma) = 2k(\alpha A_1 + 1/2\alpha^2 l_2 - 2/3\pi\alpha^3) \quad (1.5)$$

полученной из (1.4); α определено формулой (1.3). Естественно предположить, что функционал (1.1) достигает максимума на эквидистанте γ .

Доказательство оптимальности проведем явно вычислив вариацию функционала (1.1) при отклонении γ_1 от γ . Гладкий контур γ_2 будем считать таким, что для него существует внутренняя эквидистанта, ограничивающая площадь A_1 . Эти условия будут заведомо выполнены, если, например, γ_2 — выпуклый гладкий контур, имеющий в каждой точке конечную кривизну, а A_1 ($A_1 < A_2$) не является слишком малым. Кроме того, при этих условиях будет существовать единственная гладкая линия разрыва R . Отклонение контура γ_1 от эквидистанты вызывает смещение линии разрыва из положения γ . Для описания этого смещения введем функции $f(s)$, $h(\sigma)$, такие, что уравнения

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1(s) + f(s)\mu_1'(s), & x_2 &= \mu_1(s) - f(s)\lambda_1'(s) \\ x_1 &= \lambda_2(\sigma) - h(\sigma)\mu_2'(\sigma), & x_2 &= \mu_2(\sigma) + h(\sigma)\lambda_2'(\sigma) \end{aligned}$$

являются двумя различными параметризациями одной и той же кривой R . Обозначим $s = \omega(\sigma)$ замену параметра вдоль линии разрыва R . Отметим, что $f(s) \geq 0$, $h(\sigma) \geq c(\gamma_1)$.

Вычислив по формулам (1.4) значения функции $\psi(x_1, x_2)$ по разные стороны от кривой R и воспользовавшись условием непрерывности ψ , получим

$$h(\sigma) = f(\omega(\sigma)) + c(\gamma_1) \quad (1.6)$$

Явная форма решения (1.4) и равенство (1.6) позволяют после ряда преобразований представить функционал (1.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{M_*(\gamma_1)}{2k} &= c(\gamma_1)A_1 + \int_0^{l_2} [1/2h^2(\sigma) - 1/3\kappa_2(\sigma)h^3(\sigma)] d\sigma + \\ &+ \int_0^{l_2} [c(h(\sigma) - c) + 1/2(1 + c\kappa_1(\omega(\sigma)))(h(\sigma) - c)^2 + \\ &+ 1/3\kappa_1(\omega(\sigma))(h(\sigma) - c)^3] \omega'(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

где $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(\sigma)$ — кривизны контуров γ_1 и γ_2 как функции натуральных параметров s и σ .

Варьируя внутренний контур γ_1 , получим, что

$$\frac{\delta M_*(\gamma)}{2k} = (A_1 - \pi\alpha^2)\delta c + \int_0^{l_2} (2\alpha - \alpha^2\kappa_2(\sigma))f(\omega(\sigma))d\sigma \quad (1.7)$$

Вариация изопериметрического условия $\text{mes } \Omega = A$ приводит к следующей зависимости между смещением линии разрыва R и вариацией граничного условия δc на внутреннем контуре:

$$\delta c = -\frac{2}{l_2 - 2\pi\alpha} \int_0^{l_2} (1 - \alpha\kappa_2(\sigma))f(\omega(\sigma))d\sigma \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в (1.7), получим искомое выражение для вариации предельного крутящего момента

$$\frac{\delta M_*(\gamma)}{2k} = \int_0^{l_2} (2\alpha - \alpha^2\kappa_2(\sigma) - \frac{2A_1 - 2\pi\alpha^2}{l_2 - 2\pi\alpha} (1 - \alpha\kappa_2(\sigma)))f(\omega(\sigma))d\sigma \quad (1.9)$$

Формула (1.9) выражает изменение объема песчаной насыпи при сдвиге на величину f вдоль нормали к γ_1 проекции гребня песчаной насыпи.

Так как $f(\omega(\sigma)) \geq 0$, то знак вариации δM_* определяется знаком функции $g(\sigma) = -2(A_1 - \pi\alpha^2)(1 - \alpha\kappa_2(\sigma))/(l_2 - 2\pi\alpha) - \alpha^2\kappa_2(\sigma) + 2\alpha$. При ограничениях на контур γ_2 , указанных выше, имеем $g(\sigma) < 0$, $\sigma \in [0, l_2]$. Таким образом приходим к следующему выводу: $M_*(\gamma_1) < M_*(\gamma)$ для любого контура γ_1 , имеющего близкие к γ касательные и расположенного в достаточно малой окрестности γ .

Теорема 1. Среди всех стержней, имеющих двусвязное поперечное сечение заданной площади A и предписанную внешнюю границу γ_2 , наибольшим предельным крутящим моментом обладает стержень, сечение которого — двусвязная область, заключенная между γ_2 и внутренней эквидистантой γ с параметром α , определяемым по формуле (1.3).

При доказательстве теоремы 1 предполагалось, что контур γ_2 является гладким. Результат останется справедливым и в том случае, когда γ_2 — кусочно-гладкий контур, в частности величины α и $M_*(\gamma)$ будут определяться теми же формулами (1.3), (1.5).

Аналогично изложенному может быть решена задача оптимизации предельного крутящего момента стержня с заданной площадью поперечного сечения A и предписанным внутренним контуром γ_1 . Решением этой оптимальной задачи будет внешняя эквидистанта γ к контуру γ_1 , параметрические уравнения которой $x_1 = \lambda_1(s) + \beta\mu_1'(s)$, $x_2 = \mu_1(s) - \beta\lambda_1'(s)$, где β определяется равенством

$$\beta = [-l_1 + (l_1^2 + 4\pi A)^{1/2}] / (2\pi) \quad (1.10)$$

Вместо формулы (1.8) имеем

$$\delta c = \frac{-2}{l_1 + 2\pi\beta} \int_0^{l_1} (1 + \beta\kappa_1(s)) f(s) ds$$

Основное выражение для вариации функционала (1.1) будет иметь вид:

$$\frac{\delta M_*(\gamma)}{2k} = \int_0^{l_1} \left\{ -2\beta + \beta^2\kappa_1(s) - \frac{2A_1 + 2\pi\beta^2}{l_1 + 2\pi\beta} [1 + \beta\kappa_1(s)] \right\} f(s) ds$$

При этом вместо формулы (1.5) получим

$$M_*(\gamma) = 2k(\beta A_1 + 1/2\beta^2 l_1 + 1/3\pi\beta^3) \quad (1.11)$$

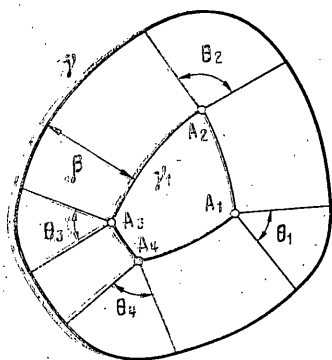
Если контур γ_1 имеет конечное число точек излома A_m , $m = \overline{1, n}$, так, что дуги $A_i A_{i+1}$, ($i < n$), $A_n A_1$ являются гладкими, то под внешней эквидистантой γ следует понимать контур, построенный следующим образом: к каждой из гладких дуг проводим эквидистантные дуги на расстоянии β и дополняем их до замкнутой кривой отрезками окружностей радиуса β с центрами в точках излома A_m (фиг. 3). Значения β и максимального предельного крутящего момента вычисляются по формулам (1.10), (1.11).

Теорема 2. Среди всех стержней, имеющих двусвязное поперечное сечение данной площади A и предписанную внутреннюю границу γ_1 , наибольшим предельным крутящим моментом обладает стержень, сечение которого — двусвязная область, заключенная между γ_1 и внешней эквидистантой γ .

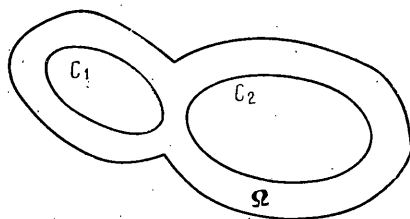
Полученный результат обобщается на случай $(n+1)$ -связного поперечного сечения Ω с предписанными внутренними контурами C_m , $m = \overline{1, n}$. Оптимальный внешний контур в этом случае составляется из дуг эквидистант к контурам C_m (фиг. 4). Если A достаточно мало, то Ω распадается на n двусвязных компонент.

Замечание 1. Формула (1.11) позволяет дать решение оптимальной задачи с фиксированными мерами A , A_1 и варьируемыми внутренним и внешним контурами. Продифференцируем (1.11) по l_1 , тогда

$$\partial M_*/\partial l_1 = k\pi^{-1}(A_1 + 1/2A - 1/2\pi\beta^2)[l_1(l_1^2 + 4\pi A)^{-1/2} - 1]$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Так как $A - \pi\beta^2 > 0$, то $\partial M_*/\partial l_1 < 0$ и, следовательно, M_* достигает максимального значения, когда длина контура γ_1 минимальна при заданной площади A_1 , ограниченной γ_1 . Но при заданной площади A_1 наименьший из всех длин l_1 обладает окружностью радиуса $(A_1/\pi)^{1/2}$. Тем самым доказано, что при заданной площади двусвязного сечения стержня A и заданной площади ослабляющего отверстия A_1 наибольшей жесткостью при чисто пластическом кручении обладает стержень, стенки которого — коаксиальные цилиндры радиусов $(A_1/\pi)^{1/2}$ и $[(A_1 + A)/\pi]^{1/2}$.

Замечание 2. Аналогично может быть решена задача оптимизации предельного крутящего момента, если материал стержня пластически анизотропен и имеет условие текучести вида

$$k_1\sigma_{13}^2 + k_2\sigma_{23}^2 + 2k_3\sigma_{13}\sigma_{23} = 1, \quad k_1k_2 - k_3^2 > 0 \quad (1.12)$$

В оптимальной задаче с неварьируемым внутренним контуром, например, оптимальный внешний контур γ_2 строится следующим образом. Заданный контур γ_1 сжимается вдоль главных осей линейного преобразования

$$B = \begin{vmatrix} k_1 & k_3 \\ k_3 & k_2 \end{vmatrix}$$

в отношениях $b_1^{-1/2}$ и $b_2^{-1/2}$ (b_1, b_2 — собственные значения B), затем строится эквидистанта так, чтобы она ограничивала площадь $(A + A_1)(\det B)^{-1/2}$, наконец, вся плоскость подвергается растяжению вдоль тех же главных осей в отношениях $b_1^{1/2}$ и $b_2^{1/2}$.

В качестве примера найдем максимальный предельный момент для стержня с ослабляющим эллиптическим отверстием $(x_1/a)^2 + (x_2/b)^2 = 1$ ($b > a$). Оптимальная внешняя граница в данном случае есть овал, определяемый уравнениями

$$\begin{aligned} x_1 &= [a + \beta(1 - \varepsilon^2 \sin^2 t)^{-1/2}] \cos t \\ x_2 &= [b + \beta(1 - \varepsilon^2)^{1/2}(1 - \varepsilon^2 \sin^2 t)^{-1/2}] \sin t \\ \beta &= [-bE(\varepsilon) + (b^2E^2(\varepsilon) + 4\pi A)^{1/2}] / (2\pi) \\ \varepsilon^2 &= 1 - (a/b)^2 \end{aligned}$$

где $E(\varepsilon)$ — полный эллиптический интеграл. Максимальный предельный момент равен $2k(\pi ab\beta^{1/2} + \frac{1}{2}E(\varepsilon)\beta\beta^{2+1/2}\pi\beta^3)$.

Для сечения с трещиной $x_1 = 0, |x_2| \leq b$ оптимальный внешний контур состоит из отрезков $x_1 = \pm\beta, |x_2| \leq \beta$, дополненных полуокружностями радиусов β с центрами в вершинах трещины. Значения β и M_* получаются предельным переходом при $a \rightarrow 0+$ в соответствующих выражениях для эллипса

$$\beta = [-2b + (4b^2 + \pi A)^{1/2}] / \pi, \quad M_* = 2k(2b\beta^{2+1/2}\pi\beta^3)$$

Если материал стержня пластически анизотропен (1.12), то в задаче с трещиной имеем следующее значение для максимального предельного момента:

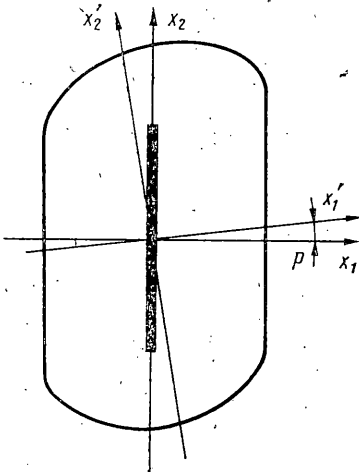
$$M_* = 2(k_1k_2 - k_3^2)^{1/2} [2\rho^2 b(b_2^{-1} \cos^2 p + b_1^{-1} \sin^2 p)^{1/2} + \frac{1}{3}\rho^3 \pi]$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2p &= 2k_3/(k_1 - k_2), \quad 2b_{1,2} = k_1 + k_2 \pm [(k_1 - k_2)^2 + 4k_3^2]^{1/2} \\ \rho &= [4b^2 (b_2^{-1} \cos^2 p + b_1^{-1} \sin^2 p) + \pi A (b_1 b_2)^{-1/2}]^{1/2} - \\ &\quad - 2b (b_2^{-1} \cos^2 p + b_1^{-1} \sin^2 p)^{1/2} \end{aligned}$$

Оптимальный внешний контур гладкий и составлен из отрезков прямых, параллельных трещине, и дуг эллипсов (фиг. 5), уравнения которых, отнесенные к главным осям x_1' , x_2' матрицы B , имеют вид

$$(x_1' \pm b \sin p)^2/b_1 + (x_2' \pm b \cos p)^2/b_2 = \rho^2$$

Наконец, устремляя b к нулю, получим, что оптимальная односвязная область — эллипс $b_2^{1/2} x_1'^2/b_1^{1/2} + b_1^{1/2} x_2'^2/b_2^{1/2} = A/\pi$, полуоси которого зависят только от отношения собственных значений. Соответствующий предельный крутящий момент равен $^{2/3} A^{1/2} [\pi (b_1 b_2)^{1/2}]^{-1/2}$.



Фиг. 5

2. Оптимальная задача теории упруго-пластического кручения призматических стержней. Рассмотрим призматический стержень, упругопластический материал которого характеризуется упругим модулем сдвига G и пределом текучести k . Через Ω обозначим односвязную область, занимаемую поперечным сечением стержня; $\gamma = \partial\Omega$ — простая кусочно-гладкая кривая, ограничивающая область Ω и имеющая конечную кривизну всюду, за исключением точек излома; ω — крутка.

Как известно [4], функция напряжений Прандтля $\varphi(x_1, x_2)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$, обращается в нуль на γ и непрерывно дифференцируема в Ω , $|\nabla\varphi| \leq k$ всюду в Ω , причем там, где $|\nabla\varphi| < k$, функция φ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta\varphi = -2G\omega$. Крутящий момент $M(\gamma)$, соответствующий крутке ω , выражается через функцию Прандтля по формуле

$$M(\gamma) = 2 \iint_{\Omega} \varphi \, dx_1 \, dx_2 \quad (2.1)$$

Сформулируем оптимальную задачу: найти форму поперечного сечения призматического стержня так, чтобы его момент при кручении был максимален по сравнению с любым другим упругопластическим стержнем, имеющим односвязное сечение заданной площади A (крутка $0 < \omega < +\infty$ фиксирована).

Оптимальной формой будет круг радиуса $(A/\pi)^{1/2}$. Доказательство этого утверждения основано на явной верхней оценке крутящего момента (2.1), в которую входят только константы материала G, k , крутка ω , длина контура l и площадь упругого ядра.

Введем следующие обозначения: A' — площадь упругой области Ω' , A'' — площадь пластической области Ω'' , $\kappa(s)$ — кривизна γ , $x_1 = \lambda(s)$, $x_2 = \mu(s)$ — натуральные уравнения контура γ . Параметрические уравнения упругопластической границы γ' возьмем в форме $x_1 = \lambda(s) - h(s)\mu'(s)$, $x_2 = \mu(s) + h(s)\lambda'(s)$, $0 \leq s \leq l$, $h(s) \geq 0$.

Для оценки крутящего момента $M(\gamma)$ оценим сверху интегралы от функции Прандтля φ по упругой и пластической областям (Ω' и Ω'' соответственно). Интегрируя функцию φ по области Ω'' и вычисляя площадь, ограниченную кривыми γ и γ' , получим

$$\iint_{\Omega''} \varphi \, dx_1 \, dx_2 = k \int_0^l (1/2 h^2(s) - 1/3 \kappa(s) h^3(s)) \, ds \quad (2.2)$$

$$A'' = \int_0^l (h(s) - 1/2 \kappa(s) h^2(s)) ds \quad (2.3)$$

Кроме того, по теореме Гаусса — Остроградского (\mathbf{v} — вектор единичной внутренней нормали кривой γ' , σ — натуральный параметр вдоль γ'):

$$\iint_{\Omega'} \Delta \varphi dx_1 dx_2 = - \int_{\gamma'} \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi d\sigma$$

Учитывая, что $d\sigma/ds = [(1 - \kappa h)^2 + h'^2]^{1/2}$, $\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi = k(1 - \kappa h) [(1 - \kappa h)^2 + h'^2]^{-1/2}$, получим

$$\frac{2G\omega A'}{k} = l - \int_0^l \kappa(s) h(s) ds \quad (2.4)$$

Рассматривая (2.2) как функционал от h , а (2.3) — как изопериметрическое условие, можно найти, что максимальное значение (2.2) достигается при $h(s) \equiv \alpha$. Константа α определяется из условия (2.3) формулой $\alpha = [l - (l^2 - 4\pi A'')^{1/2}] / (2\pi)$. Следовательно, справедлива оценка

$$2 \iint_{\Omega''} \varphi dx_1 dx_2 \leq 2k (1/2 l \alpha^2 - 2/3 \pi \alpha^3) \quad (2.5)$$

В упругой области Ω' функцию Прандтля представим в виде суммы $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Функция φ_1 обращается в нуль на упругопластической границе γ' и удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta \varphi_1 = -2G\omega$. Гармоническая в Ω' функция φ_2 на кривой γ' принимает значения $kh(s)$. Используя оценку Девенпорта [2], имеем

$$2 \iint_{\Omega'} \varphi_1 dx_1 dx_2 \leq \frac{G\omega A'^2}{2\pi} \quad (2.6)$$

Аналогично можно показать, что

$$2 \iint_{\Omega'} \varphi_2 dx_1 dx_2 \leq 2k\alpha A' \quad (2.7)$$

(если дополнительно предположить контур γ гладким и выпуклым). С учетом оценок (2.5), (2.6), (2.7) получим

$$M(\gamma) / (2k) \leq 1/2 l \alpha^2 - 2/3 \pi \alpha^3 + A'^2 / (4\pi r_0) + \alpha A' \\ r_0 = k / (G\omega)$$

Из решения упругопластической задачи для круга известно, что r_0 имеет смысл радиуса упругого ядра. Введем характеристику $r' = (A'/\pi)^{1/2}$ и запишем последнюю оценку следующим образом (не ограничивая общности, примем $A = \pi$):

$$M(\gamma) / (2k\pi) \leq l \alpha^2 / (2\pi) - 2/3 \alpha^3 + r'^4 / (4r_0) + \alpha r'^2 \quad (2.8) \\ \alpha = l / (2\pi) - [(l / (2\pi))^2 - 1 + r'^2]^{1/2}$$

Основная оценка (2.8) позволяет сделать вывод о том, что решение оптимальной задачи есть круг единичного радиуса. Рассмотрим в замкнутой области \bar{D} : $l \geq 2\pi$, $0 \leq r' \leq 1$ функцию

$$F(l, r') = 1/2 l \alpha^2 / \pi - 2/3 \alpha^3 + r'^4 / (4r_0) + \alpha r'^2$$

и найдем ее экстремум при условии, что отношение приращения площади упругого ядра к приращению длины варьируемого контура $\pi(r'^2 - r_0^2) / (l - 2\pi)$ ограничено. Покажем, что функция $F(l, r')$ достигает условного максимума в точке $l = 2\pi$, $r' = r_0$ ($\alpha = 1 - r_0$). Вычислив частную производную $\partial F / \partial l$, получаем, что F монотонно убывает с ростом l . Поэтому максимальное значение достигается на границе области $l = 2\pi$, $0 \leq r' \leq 1$. Кроме

того, $\partial F/\partial l(2\pi, r_0) = -(1-r_0)/(2\pi)$, $\partial F/\partial r'(2\pi, r_0) = 0$, $\partial^2 F/\partial r'^2(2\pi, r_0) = r_0$.
Следовательно

$$F(l, r') - F(2\pi, r_0) = -\frac{1-r_0}{2\pi}(l-2\pi) + \frac{r_0}{2}(r'-r_0)^2 + \dots$$

и $\Delta F < 0$, если точка $(l, r') \in D$ при условии, что отношение $\pi(r'^2 - r_0^2)/l - 2\pi$ ограничено. Необходимо отметить, что ограниченность указанного отношения может быть доказана при помощи соотношений (2.3), (2.4) и уравнения

$$\lim_{x \rightarrow x'} \nabla \varphi = k n \quad (x \in \Omega')$$

Здесь x' — произвольная точка упругопластической границы γ' с координатами $x'_1 = \lambda(s) - h(s)\mu'(s)$, $x'_2 = \mu(s) + h(s)\lambda'(s)$; $n_1 = -\mu'(s)$, $n_2 = \lambda'(s)$, а для φ следует использовать представление теории потенциала. Из оценки (2.8) как частные случаи при $\alpha = 0$, $r' = 0$ следуют результаты [2, 3].

Таким образом, из всех упругопластических стержней, имеющих односвязное поперечное сечение заданной площади A , наибольшее сопротивление кручению оказывает стержень круглого поперечного сечения с упругим ядром радиуса $r_0 = k/(G\omega)$.

В [5] показано, что задача упругопластического кручения допускает вариационную формулировку. Пусть гильбертово пространство $H(\Omega)$ является пополнением пространства $C^1(\Omega)$ — непрерывно дифференцируемых в Ω функций с компактными в Ω носителями — по норме, порождаемой скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\Omega} \int \left(uv + \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial v}{\partial x_{\alpha}} \right) dx_1 dx_2 \quad (\alpha = 1, 2)$$

Функции $u \in H(\Omega)$, удовлетворяющие условию $|\nabla u| \leq k$ в области Ω , образуют замкнутое выпуклое множество $V(\Omega)$. Функция Прандтля φ является решением вариационной задачи

$$\min_{u \in V(\Omega)} \int_{\Omega} \int (-2\omega u + |\nabla u|^2 / (2G)) dx_1 dx_2$$

Далее рассмотрим следующую вариационную задачу:

$$\min_{\Omega} : \text{mes } \Omega = A \quad [\min_{u \in V(\Omega)} J(u)] \quad (2.9)$$

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} \int (-2\omega \varphi + |\nabla \varphi|^2 / (2G)) dx_1 dx_2$$

где $J(\varphi)$ — величина дополнительной работы.

Сформулированная задача может быть решена методом симметризации [2]. Действительно, если через Ω^* обозначить симметризацию Штейнера области Ω относительно фиксированной прямой, а через u^* — симметризацию функции u , то [2]

$$\int_{\Omega} \int |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 \geq \int_{\Omega^*} \int |\nabla u^*|^2 dx_1 dx_2$$

Так как $u^* \in V(\Omega^*)$, то, применяя последовательно процесс симметризации относительно соответствующим образом выбранной последовательности прямых, получим, что решением вариационной задачи (2.9) является круг радиуса $(A/\pi)^{1/2}$.

В задаче оптимизации жесткости при кручении упругопластического стержня, материал которого в упругой области изотропен, а в области пластического течения анизотропен с условием текучести (1.12), оптимальным контуром является эллипс, определяемый в осях x'_1, x'_2 , повернутых на угол p относительно осей x_1, x_2 ($\text{tg } 2p = 2k_3/(k_1 - k_2)$), уравнением

$$x_1'^2/a^2 + x_2'^2/b^2 = 1, \quad a^2 = \pi(b_1/b_2)^{1/2}/A \\ b^2 = \pi(b_2/b_1)^{1/2}/A, \quad 2b_{1,2} = k_1 + k_2 \pm [(k_1 - k_2)^2 + 4k_3^2]^{1/2}$$

Форма упругого ядра с необходимой точностью может быть определена на основе численных методов [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз. 1963. 686 с.
2. Полюа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз. 1962. 336 с.
3. Leavitt J., Ungar P. Circle supports the largest sandpile // *Communs Pure and Appl. Math.* 1962. V. 15. No. 1. P. 35—37.
4. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. шк. 1969. 608 с.
5. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир. 1974. 159 с.
6. Черноусько Ф. Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач // *Ж. вычисл. математики и мат. физики*, 1965. Т. 5. № 4. С. 749—754.

Москва

Поступила в редакцию
16.III.1987