

УДК 539.375

КОСОЕ СОУДАРЕНИЕ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ СО СЛОЕМ ЖИДКОСТИ В ДОЗВУКОВОМ РЕЖИМЕ

САЖИН В. В., СИМОНОВ И. В.

Рассматриваются особенности волнового поля при стационарном соударении упругой и акустической полос под малым углом. При использовании преобразования Фурье задача сводится к обобщенной задаче Римана. Методом факторизации получено решение, содержащее ряд произвольных постоянных, которые определяются из условий в особых точках. Скоростями волн Релея и Стоунли диапазон скоростей движения края разреза разбивается на три интервала, в каждом из которых решение имеет свою структуру. Выявлено асимптотическое поведение решения вблизи края разреза и на бесконечности. Обсуждаются предельные случаи.

1. Рассмотрим кусочно-однородную полосу с полубесконечным разрезом, закрывающимся с постоянной скоростью $c > 0$. Области $0 < y \leq 1$, $|x| < \infty$ и $-h \leq y < 0$, $|x| < \infty$ заполнены упругой и акустической средами. В декартовой системе координат xOy , связанной с краем разреза, движение будем предполагать установившимся, а относительную касательную скорость — малой по сравнению с волновыми скоростями.

Для продольного и поперечного потенциалов скоростей в упругой области (φ , ψ) и потенциала скорости в жидкости (χ) имеем уравнения:

$$\begin{aligned} \beta_0^2 \chi_{xx} + \chi_{yy} = 0, \quad \beta_1^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 & \quad (1.1) \\ \beta_2^2 \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0, \quad \beta_j = \left(1 - \frac{c^2}{c_j^2}\right)^{1/2} \quad (j=0, 1, 2) \end{aligned}$$

Индексы x и y внизу означают дифференцирование по соответствующей переменной. За единицы измерения выбраны: толщина упругого слоя h_1 , плотность упругой полосы ρ_1 , скорость поперечных волн c_2^0 и 2μ , где μ — модуль сдвига; c_1 и $c_2 = 1$ — безразмерные скорости продольных и поперечных волн в упругом теле, а c_0 — безразмерная скорость звука в жидкости.

Скорости u , w , нормальные $\sigma^{(x)}$, σ и касательное τ напряжения, а также давление p выражаются через φ , ψ , χ по формулам [1]:

$$\begin{aligned} u_0 = \chi_x, \quad u_1 = \varphi_x + \psi_y, \quad w_0 = \chi_y, \quad w_1 = \varphi_y - \psi_x & \quad (1.2) \\ \sigma_x^{(x)} = \varphi_{yy} - \psi_{xy} - 1/2 c_1^2 \Delta \varphi, \quad \sigma \tau_x = 1/2 (\psi_{xx} - \psi_{yy}) - \varphi_{xy} \\ \sigma \sigma_x = \varphi_{xx} + \psi_{xy} - 1/2 c_1^2 \Delta \varphi, \quad p = 1/2 \rho_0 c \chi_x \end{aligned}$$

Индекс 0 относится к жидкости, 1 и 2 — к упругой среде. Ограничимся рассмотрением случая дозвукового движения края разреза $0 < c < c^*$, где $c^* = \min(c_0, c_2 = 1)$: тогда уравнения (1.1) будут уравнениями эллиптического типа.

Краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma = \tau = 0 \quad (y=1, |x| < \infty), \quad \tau = 0 \quad (y=0, |x| < \infty) & \quad (1.3) \\ \sigma = 0, \quad p = 0 \quad (y=0, x > 0), \quad v = 0, \quad \sigma = -p \quad (y=0, x < 0) \\ p = 0 \quad (y=-h, |x| < \infty) \end{aligned}$$

где v — скачок скорости на границе раздела двух сред. Кроме того, необходимо ввести условие

$$v_{\infty} = \lim_{x_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{v(x, 0)}{x_2 - x_1} dx = -v_0 \quad \left(x_1, x_2, \frac{x_2}{x_1} \rightarrow \infty \right) \quad (1.4)$$

которое выделяет постоянную составляющую скачка скорости при $x \rightarrow \infty$ ($-v_0$ — скачок скорости соударения полос на бесконечности), так как решение на бесконечности может содержать собственные волны — осциллирующие функции [2]. В точках $x=y=0$ и $x=\pm\infty$ решение может иметь особенности, где следует ставить дополнительные условия. Для обеспечения единственности решения используем условие неотрицательности и конечности потока энергии $0 \leq e_0 < \infty$, приходящегося на единицу длины края разреза в окрестность точки $x=y=0$, а на бесконечности учтем энергетический принцип излучения Мандельштама [3], согласно которому энергия распространяется от источника возбуждения на бесконечность, но не наоборот. Применительно к данной задаче условия в особых точках будут конкретизированы ниже.

2. Выполним преобразование Фурье всех функций по x с параметром k . Введем обозначения:

$$\Sigma^-(k) = \int_{-\infty}^0 \sigma(x, 0) e^{ikx} dx, \quad V^+(k) = \int_0^{\infty} v(x, 0) e^{ikx} dx$$

Функция $\Sigma^-(\xi)$ будет аналитической в нижней полуплоскости $\xi = k + i\eta$, а $V^+(\xi)$ — аналитической в верхней полуплоскости ξ [4]. Решая преобразованные уравнения (1.1), с учетом (1.3) и преобразованных уравнений (1.2) получим следующие выражения для фурье-изображений потенциалов скоростей через функцию $\Sigma^-(k)$:

$$\Phi = ic(\beta k)^{-1} D \{ \text{sh } \lambda_2 \text{ sh } [\lambda_1(1-y)] - (R+1) [\text{ch } \lambda_2 \text{ ch } [\lambda_1(1-y)] - \text{ch } (\lambda_1 y)] \} \Sigma^- \quad (2.1)$$

$$\Psi = c\beta_1(\beta^2 k)^{-1} D \{ \text{ch } \lambda_1 \text{ sh } [\lambda_2(1-y)] - (R+1) \text{ sh } \lambda_1 \text{ ch } [\lambda_2(1-y)] + \text{sh } (\lambda_2 y) \} \Sigma^-$$

$$X = -2i(\rho_0 c k)^{-1} \text{sh } [\lambda_0(h+y)] \text{sh}^{-1}(\lambda_0 h) \Sigma^-$$

$$D = (4 \text{ch}^2 \lambda_1 \text{ch}^2 \lambda_2 \Delta_1(k) \Delta_2(k))^{-1}$$

$$\Delta_1(k) = (R+1) \text{th}^{1/2} \lambda_1 - \text{th}^{1/2} \lambda_2$$

$$\Delta_2(k) = (R+1) \text{th}^{1/2} \lambda_2 - \text{th}^{1/2} \lambda_1, \quad \lambda_j = k\beta_j \quad (j=0, 1, 2)$$

$$R = \beta_1 \beta_2 / \beta^2 - 1, \quad \beta = 1/2(1 + \beta_2^2)$$

Используя связь потенциалов со скоростями (1.2) и граничное условие для скачка v из (1.3), приходим к следующей задаче Римана — Гильберта:

$$V^+(k) = H(k) \Sigma^-(k) \quad (2.2)$$

$$H(k) = 2i\beta_0(\rho_0 c \Delta_1(k) \Delta_2(k))^{-1} F(k)$$

$$F(k) = \Delta_1(k) \Delta_2(k) \text{cth}(\lambda_0 h) - B [\Delta_1(k) + \text{th}^{1/2} \lambda_1 \text{th}^{1/2} \lambda_2 \Delta_2(k)]$$

$$B = 1/8 \rho_0 c^4 \beta_1 \beta_0^{-1} \beta^{-2}$$

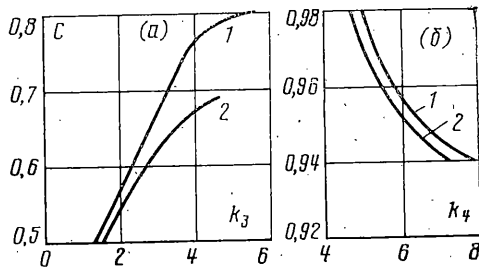
Для решения задачи (2.2), прежде всего, следует выделить особенности коэффициента $H(k)$ [4, 5]:

$$H(k) = 2i(\rho_0 c k)^{-1} (\beta_0 + h^{-1}) \quad (k \rightarrow 0)$$

$$H(k) = \pm 2i\beta_0 S(\rho_0 c R)^{-1} \quad (k \rightarrow \pm\infty)$$

Заметим, что $S(c) = R - 2B = 0$ есть уравнение Стоунли [6] для случая, когда одна из двух сред является идеальной сжимаемой жидкостью. Нулевые действительные решения уравнений $\Delta_j(k) = 0$ ($j=1, 2$) опреде-

ляют полюсы функции $H(k)$. Это дисперсионные уравнения для полосы: при $c < c_R$, где c_R — единственный положительный корень уравнения Релея, уравнение $\Delta_2(k) = 0$ имеет два действительных, симметричных относительно нуля корня $k = \pm k_2$, а уравнение $\Delta_1(k) = 0$ ненулевых действительных корней в этом интервале не имеет. При $c > c_R$ ситуация обратная: уравнение $\Delta_1(k) = 0$ имеет два действительных симметричных корня $k = \pm k_1$, а уравнение $\Delta_2(k) = 0$ не имеет действительных ненулевых корней [7]. Аналитическое же исследование корней уравнения $F(k) = 0$ затруднительно, поскольку на плоскости комплексного переменного ξ точка $\xi = \infty$ является существенно особой для функции $F(\xi)$ и, кроме того, $F(\xi)$ имеет бесконечное число полюсов, расположенных на мнимой оси. Поведение асимптотик и численный анализ функции $F(k)$ позволяют утверждать, что в интервале $c_s <$



$< c < c_R$, где c_s — единственный положительный корень уравнения Стоунли (заметим, что $c_s < c_R$), уравнение $F(k) = 0$ не имеет ненулевых действительных корней, а в интервалах $0 < c < c_s$ и $c_R < c < c^*$ уравнение $F(k) = 0$ имеет в каждом из них по два действительных симметричных относительно нуля корня $k = \pm k_3$ и $k = \pm k_4$ соответственно.

Для уравнений $F(c, k) = 0$, $\Delta_1(c, k) = 0$, $\Delta_2(c, k) = 0$ численно определялась производная $c'(k)$ в точках $k = k_i$ ($i = 1, 4$). Параметры при этом изменялись в пределах: $0,5 \leq h \leq 2$; $0,5 \leq \rho_0 \leq 1,5$; $0,5 \leq c \leq c^*$; $c_1 = 2$; $0,99 \leq c_0 \leq 1, 2$. Примеры полученных кривых, слабо зависящих от этих параметров, показаны на фиг. 1, а, б. На фиг. 1, а изображены дисперсионные кривые для уравнения $F(c, k) = 0$ в интервале $0 < c < c_s$. Кривая 1 отвечает следующим значениям параметров: $h = 1$, $\rho_0 = 0,5$, $c_0 = 1$, а кривая 2 — $h = 1$, $\rho_0 = 1,5$, $c_0 = 1,2$. Дисперсионные кривые для того же уравнения в интервале $c_R < c < c^*$ показаны на фиг. 1, б. Кривая 1 соответствует значениям параметров: $h = 1$, $\rho_0 = 0,5$, $c_0 = 1,2$, а кривая 2 — $h = 2$, $\rho_0 = 0,5$, $c_0 = 1$. Из результатов расчетов можно сделать вывод, что корням $k = \pm k_3$ и $k = \pm k_2$ отвечают собственные волны с групповой скоростью $c_g > c$, а корням $k = \pm k_1$ и $k = \pm k_4$ — собственные волны, имеющие $c_g < c$. Этот результат для $\Delta_1(c, k)$ и $\Delta_2(c, k)$ известен [7]. Полученные неравенства распространяем, по предположению, на другие допустимые значения параметров. Они будут использоваться далее для проверки выполнения энергетического принципа излучения, который в терминах групповых и фазовых скоростей выглядит так:

$$c_g > c \quad (x \rightarrow \infty), \quad c_g < c \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (2.3)$$

т. е. в решении необходимо оставлять только такие собственные волны, у которых выполняется условие (2.3).

Следуя [4, 5], положим $H(k) = H_0(k)G(k)$. Функцию $H_0(k)$ выбираем таким образом, чтобы в точках $k = 0, \pm \infty$ она совпадала с $H(k)$, в точках $k = \pm k_1, \pm k_2$ имела бы простые полюса, а в точках $k = \pm k_3, \pm k_4$ обращалась в нуль

$$H_0(k) = A(k^2 + a^2)^{1/2}(k^2 - k_3^2)k^{-1}(k^2 - k_2^2)^{-1} \quad (0 < c < c_s) \quad (2.4)$$

$$H_0(k) = A(k^6 + b^6)^{1/2}k^{-1}(k^2 - k_2^2)^{-1} \quad (c_s < c < c_R)$$

$$H_0(k) = A(k^2 + d^2)^{1/2}(k^2 - k_4^2)k^{-1}(k^2 - k_1^2)^{-1} \quad (c_R < c < c^*)$$

$$A = 2i\beta_0 S / \rho_0 c R, \quad a = a_0 k_2^2 / k_3^2, \quad b^3 = -a_0 k_2^2$$

$$d = a_0 k_1^2 / k_4^2, \quad a_0 = R(\rho_0 + h^{-1}) / S \beta_0$$

При таком выборе $H_0(k)$ функция $G(k) = H(k) / H_0(k)$ обладает свойствами: $G(0) = 1$, $G(\pm \infty) = 1$. Для факторизации $G(k)$ необходимо вычислить ее индекс: $G(k)$ — действительная симметричная функция, нигде на действительной оси не обращающаяся в нуль, дифференцируемая и имеющая конечную производную в любой точке действительной оси, следовательно, функция $G(k)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\lambda = 1$. Индекс же непрерывной действительной функции, нигде не обращающейся в нуль, тождественно равен нулю. Значит, $G(k)$ можно

факторизовать используя стандартную процедуру [5]:

$$G(k) = G^+(k)/G^-(k), \quad G^\pm(0, \pm\infty) = 1, \quad G^\pm(\xi) = \exp[\Gamma(\xi)] \quad (2.5)$$

$$\Gamma(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - \xi} d\tau, \quad G^\pm(k) = G^{\pm 1/2} \exp[\Gamma_0(k)]$$

$$\Gamma_0(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - k} d\tau$$

где особые интегралы понимаются в смысле главного значения. Осуществим факторизацию радикалов в (2.4):

$$Q = Q^+Q^- = \sqrt{k^2 + a^2}, \quad Q^\pm(\xi) = \sqrt{\xi \pm ia} \quad (0 < c < c_s) \quad (2.6)$$

$$Q = Q^+Q^- = \sqrt{k^s + b^6}, \quad Q^\pm(\xi) = \left[(\xi \pm be^{\frac{i\pi}{6}}) (\xi \pm be^{\frac{i\pi}{2}}) (\xi \pm be^{\frac{i5\pi}{6}}) \right]^{1/2} \\ (c_s < c < c_R)$$

$$Q = Q^+Q^- = \sqrt{k^2 + d^2}, \quad Q^\pm(\xi) = \sqrt{\xi \pm id} \quad (c_R < c < c^*)$$

Разрезы из точек ветвления проводятся в бесконечность по лучам так, что их продолжение проходит через точку $\xi = 0$. Фиксируем ветвь условием $\sqrt{1} = 1$. Учитывая (2.4) – (2.6), приведем (2.2) к виду

$$\frac{V+k(k^2-k_2^2)}{AQ^+(k^2-k_3^2)G^+} = \frac{Q^-\Sigma^-}{G^-} = C_1 \quad (0 < c < c_s) \quad (2.7)$$

$$\frac{V+k(k^2-k_2^2)}{AQ^+G^+} = \frac{Q^-\Sigma^-}{G^-} = C_2 + C_3k \quad (c_s < c < c_R)$$

$$\frac{V+k}{AQ^+G^+} = \frac{Q^-(k^2-k_4^2)\Sigma^-}{G^-(k^2-k_1^2)} = C_4 \quad (c_R < c < c^*)$$

Левые и правые части равенств (2.7) являются аналитическими функциями в своих областях и совпадают на действительной оси. Решение (V^+, Σ^-) считается ограниченным на действительной оси, следовательно, точки $k = \pm k_j$ ($j=1, 4$) не могут быть особыми точками единой аналитической функции, так как это противоречило бы предположению об ограниченности. Таким образом, эти единые функции являются целыми. Значит, единственной особенностью функции может быть лишь полюс в бесконечно удаленной точке. Если целая функция имеет в бесконечности полюс n -го порядка, то она является полиномом степени n . Из ограниченности потока энергии следует, что $V^+(\xi)$ и $\Sigma^-(\xi)$ должны убывать при $\xi \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $\xi^{-1/2}$ [8]. Устремив $\xi \rightarrow \infty$, установим, что каждая часть в первом и третьем уравнениях (2.7) есть постоянная, а во втором уравнении – полином первой степени.

3. Поведение изображений скачка скорости v и напряжения σ при $\xi \rightarrow \infty$ таково:

$$V^+ \sim AC_n \xi^{-1/2}, \quad \Sigma^- \sim C_n \xi^{1/2} \quad (n=1, 3, 4)$$

Тогда поведение оригиналов вблизи точки $x=y=0$ определяется равенствами [9]:

$$v(x \rightarrow +0, 0) = AC_n e^{-\frac{i\pi}{4}} (\pi x)^{-1/2} \quad (3.1)$$

$$\sigma(x \rightarrow -0, 0) = C_n e^{\frac{i\pi}{4}} (-\pi x)^{-1/2} \quad (n=1, 3, 4)$$

Вычислим поток энергии e_0 [10], отнесенный к величине $\mu h c_0^2$:

$$e_0 = 2\beta_0 K_n^2 S / (\rho_0 c R), \quad K_n = C_n \exp(i\pi/4) \quad (n=1, 3, 4)$$

Знак потока будет определяться знаком соотношения S/R . При $0 < c < c_s$ и $c_R < c < c^*$ имеем $S/R > 0$, а при $c_s < c < c_R$ будет $S/R < 0$. Отсюда следует, что $C_3 = 0$.

Перейдем к вычислению оригиналов. Выражения (2.7), могут быть переписаны в виде

$$V^+(\xi) = AC_1 Q^+(\xi) G^+(\xi) (\xi^2 - k_3^2) \xi^{-1} (\xi^2 - k_2^2)^{-1}$$

$$\Sigma^-(\xi) = C_1 G^-(\xi) / (Q^-(\xi)) \quad (0 < c < c_s)$$

$$V^+(\xi) = AC_2 Q^+(\xi) G^+(\xi) \xi^{-1} (\xi^2 - k_2^2)^{-1}$$

$$\Sigma^-(\xi) = C_2 G^-(\xi) / (Q^-(\xi)) \quad (c_s < c < c_R)$$

$$V^+(\xi) = AC_4 \xi^{-1} Q^+(\xi) G^+(\xi)$$

$$\Sigma^-(\xi) = C_4 G^-(\xi) (\xi^2 - k_1^2) [Q^-(\xi) (\xi^2 - k_4^2)]^{-1} \quad (c_R < c < c^*)$$

Все образы искоемых функций убывают на бесконечности, как $|\xi|^{-\varepsilon}$, $\varepsilon \geq 1/2$. Поэтому обратное интегрирование производится по контуру L , совпадающему с действительной осью всюду, за исключением окрестностей полюсов, обход которых оговаривается ниже. В интервале $0 < c < c_s$ особенности $V^+(\xi)$ определяют следующее поведение функции $v(x, 0)$. В нее входят постоянное слагаемое (вычет в точке $\xi=0$), собственные волны (сумма вычетов в точках $\xi = \pm k_2$), локальное возмущение — экспоненциально исчезающая на бесконечности функция (вклад от особых точек вне действительной оси). Собственные волны уносят энергию в бесконечность направо, т. е. принцип излучения (2.3) удовлетворяется. Для определения C_1 используется условие (1.4). Взяв вычет в точке $\xi=0$, получаем, что

$$C_1 = -1/2 \rho_0 c v_0 k_2 k_3^{-1} R^{1/2} [S\beta_0(\rho_0 + h^{-1})]^{-1/2} \exp(-i\pi/4)$$

$$e_0 = 1/2 c v_0^2 \rho_0 k_2^2 [(\rho_0 + h^{-1}) k_3^2]^{-1}$$

Расходуемая кинетическая мощность на единицу длины полосы равна $K = 1/2 c v_0^2 \rho_0 (\rho_0 + h^{-1})^{-1}$. Из результатов вычислений видно, что $k_2 < k_3$, т. е. $e_0 < K$. Таким образом, количество энергии, уносимой собственными волнами e_∞ , зависит от отношения волновых чисел k_2 и k_3 . При обратном интегрировании полюса $\xi=0, \pm k_2$ обходятся сверху. При $x \rightarrow -\infty$ решение стремится к нулю.

В интервале $c_s < c < c_R$ имеем $V^+(\xi) \sim AC_2 \xi^{-3/2}$, $\Sigma^-(\xi) \sim C_2 \xi^{-3/2}$ при $\xi \rightarrow \infty$. Тогда, используя (1.4), можно определить выражение для C_2 и затем асимптотическое поведение оригиналов при $x \rightarrow \pm 0$:

$$C_2 = 1/2 \rho_0 c v_0 k_2 \{-R[S\beta_0(\rho_0 + h^{-1})]^{-1}\}^{1/2} \exp(i\pi/4)$$

$$v(x, 0) = -2v_0 k_2 \{-S\beta_0 x [\pi R(\rho_0 + h^{-1})]^{-1}\}^{1/2} \quad (x \rightarrow +0)$$

$$\sigma(x, 0) = -v_0 \rho_0 c k_2 \{R x [S\beta_0 \pi(\rho_0 + h^{-1})]^{-1}\}^{1/2} \quad (x \rightarrow -0)$$

Скачок скорости и нормальное напряжение не испытывают разрыва в точке $x=y=0$. Поток энергии $e_0=0$, т. е. вся кинетическая энергия соударения превращается в энергию собственных волн и уходит вправо: принцип излучения удовлетворяется. Полюса $\xi=0, \pm k_2$ обходятся сверху. При $x \rightarrow -\infty$ решение стремится к нулю.

В интервале $c_R < c < c^*$ асимптотики при $|x| \rightarrow 0$ аналогичны асимптотикам в интервале $0 < c < c_s$. Полюс $\xi=0$ обходим сверху, а полюса $\xi = \pm k_4$ — снизу

$$C_4 = -1/2 \rho_0 c v_0 k_4 k_1^{-1} \{R[S\beta_0(\rho_0 + h^{-1})]^{-1}\}^{1/2} \exp(-i\pi/4)$$

$$e_0 = 1/2 \rho_0 c v_0^2 k_4^2 [k_1^2(\rho_0 + h^{-1})]^{-1} \quad (k_4 < k_1)$$

Кинетическая мощность $K = e_0 + e_\infty$ делится, как и в случае $0 < c < c_s$, на мощность, выделяющуюся в точке $x=y=0$, и мощность e_∞ , уносимую волнами в направлении $x = -\infty$. Функцию $v(x, 0)$ можно представить в виде суммы постоянного слагаемого и локальной (исчезающей при $x \rightarrow \pm\infty$) волны. Напряжение $\sigma(x, 0)$, как и все остальные функции при $x < 0$, расщепляется на локальное возмущение и собственную волну, огра-

значенную на бесконечности. Выделим эту собственную волну:

$$\sigma(x, 0) \sim -^{1/2} \rho_0 c v_0 (k_1^2 - k_4^2) k_1^{-1} \{R[S\beta_0(\rho_0 + h^{-1})]^{-1}\}^{1/2} \times \\ \times \text{Im} \{G^-(k_4) \exp -i(k_4 x + \pi/4)\} / Q^-(k_4) \quad (x \rightarrow -\infty)$$

Исходя из этой формулы, можно оценить амплитуду растягивающих напряжений (отрицательных давлений) на границе раздела вдали от точки контакта. Появление таких давлений является дефектом постановки задачи и свидетельствует об образовании зон (или одной зоны) отрыва. Учесть этот эффект аналитически затруднительно. Между тем асимптотическое поведение оригиналов в нуле во всех выделенных интервалах скоростей удовлетворяет необходимым динамическому и кинематическому условиям: $\sigma \leq 0$ ($x \rightarrow -0$), $v \leq 0$ ($x \rightarrow +0$). В интервалах $0 < c < c_s$ и $c_s < c < c_R$ функция $\sigma(x, 0)$ — неосциллирующая и, по-видимому, не меняет знака при $-\infty < x < 0$ (доказать строго это утверждение не представляется возможным).

Остальные искомые функции могут быть построены в областях определения, исходя из (2.1). При обращении формул (2.1) следует пользоваться правилами обхода полюсов, сформулированных выше по отношению к функциям $v(x, 0)$ и $\sigma(x, 0)$.

Рассмотрим нормальные и касательные компоненты скорости при $y=0$ во всех трех интервалах. Фурье-изображения скоростей выражаются по формулам

$$W_1(k) = F_1(k) \Sigma^-(k); \quad W_0(k) = F_2(k) \Sigma^-(k)$$

$$U_1(k) = F_3(k) \Sigma^-(k), \quad U_0(k) = -2(\rho_0 c)^{-1} \Sigma^-(k)$$

$$F_1(k) = -^{1/2} i \beta_1 c^3 (\beta^2 R)^{-1} D \text{ch } \lambda_1 \text{ch } \lambda_2 \Delta_3(k)$$

$$\Delta_3(k) = (R+1) \text{th } \lambda_1 - \text{th } \lambda_2, \quad F_2(k) = -2i \beta_0 (\rho_0 c)^{-1} \text{cth } (\lambda_0 h)$$

$$F_3(k) = cD \{ \text{sh } \lambda_1 \text{sh } \lambda_2 [\beta^{-1} + (R+1)^2] + (R+1) (\beta^{-1} + 1) (1 - \text{ch } \lambda_1 \text{ch } \lambda_2) \}$$

Из формулы для $U_0(k)$ видно, что поведение и асимптотики касательной скорости на поверхности жидкой фазы с точностью до коэффициента $-2(\rho_0 c)^{-1}$ совпадают с поведением функции $\sigma(x, 0)$. При определении структуры и асимптотик остальных функций существенно, что они имеют особенности в обеих полуплоскостях — обстоятельство, порожденное несимметрией задачи. Начнем с функции $w_1(x)$. Выделяя особенности, в интервале $0 < c < c_s$, введем функцию

$$W_1'(k) = W_1(k) - \frac{id_1}{k} - \frac{id_+}{k-k_2} - \frac{id_-}{k+k_2} - \frac{id_\infty}{\sqrt{k}}$$

где $id_1/k, \dots$ есть асимптотики $W_1(k)$ при $k \rightarrow 0, \pm k_2, \pm \infty$ соответственно. Тогда функция $W_1'(k)$ интегрируема на действительной оси.

Однозначную ветвь функции \sqrt{k} выбираем исходя из условия $W_1' = O(k^{-1})$ при $k \rightarrow \pm \infty$. Проводим прямолинейный разрез $[0, -i\infty[$, т. е. $\sqrt{k} > 0$ при $k > 0$ и $\sqrt{k} = i\sqrt{|k|}$ при $k < 0$. Контур обратного интегрирования для функции $W_1'(k)$ есть действительная ось, для функции

$$W_1^+(\xi) = \frac{id_1}{\xi} + \frac{id_+}{\xi - k_2} + \frac{id_-}{\xi + k_2} + \frac{id_\infty}{\sqrt{\xi}}$$

действительная ось с обходом полюсов сверху. В результате для вертикальной компоненты скорости упругой полосы получим представление

$$w_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_1'(k) e^{-ikx} dk + \frac{1}{2\pi} \int_L W_1^+(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \quad (3.2)$$

Второй интеграл в (3.2) тождественно равен нулю при $x < 0$ и равен сумме вычетов в соответствующих точках и интеграла по разрезу

$[0, -i\infty[$ (вклад точки ветвления) при $x > 0$. Учитывая это, получим

$$w_1(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_1'(k) dk = O(1) \quad (x \rightarrow -0)$$

$$w_1(x) \sim id_{\infty}(\pi x)^{-1/2} \exp(-i\pi/4) \quad (x \rightarrow +0)$$

При $x < 0$ решение (3.2) есть локальное возмущение, при $x > 0$ решение расщепляется на локальное возмущение, собственные волны (сумма вычетов в точках $\xi = \pm k_2$) и скорость упругой полосы при $x \rightarrow \infty$ ($w_1(x) = -\rho_0 v_0 (\rho_0 + h^{-1})^{-1}$). Прodelывая аналогичные операции, можно получить

$$w_0(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_0'(k) dk = O(1) \quad (x \rightarrow -0) \quad (3.3)$$

$$W_0'(k) = W_0(k) - id_0 k^{-1} - id_{\infty}^0 k^{-1/2}$$

$$W_0 \rightarrow id_0/k \quad (k \rightarrow 0), \quad W_0 \rightarrow id_{\infty}^0 k^{-1/2} \quad (k \rightarrow \pm\infty)$$

$$w_0(x) \sim id_{\infty}^0 (\pi x)^{-1/2} \exp(-i\pi/4) \quad (x \rightarrow +0)$$

При $x > 0$ решение представляет из себя сумму локального возмущения и нормальной скорости жидкого слоя: $w_0(x) = v_0 (1 + \rho_0 h)^{-1} (x \rightarrow \infty)$, а при $x < 0$ — локальное возмущение. Из формул для нормальных скоростей на бесконечности видно, что выполняется закон сохранения импульса: $\rho_0 h w_0 + w_1 \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$. Далее, для касательной компоненты скорости u_1 имеем

$$u_1(x) \sim O(1) \quad (x \rightarrow -0), \quad u_1(x) \sim if_{\infty}(\pi x)^{-1/2} e^{-i\pi/4} \quad (x \rightarrow +0) \quad (3.4)$$

$$U_1'(k) = U_1(k) - \frac{if_+}{k - k_2} - \frac{if_-}{k + k_2} - \frac{if_{\infty}}{\sqrt{k}}$$

$$U_1(k) \rightarrow if_{\infty} k^{-1/2} (k \rightarrow \pm\infty), \quad U_1(k) \rightarrow \frac{if_{\pm}}{k \mp k_2} \quad (k \rightarrow \pm k_2)$$

При $x > 0$ в решении для $u_1(x)$ присутствуют локальное возмущение и собственные волны, а при $x < 0$ — локальное возмущение. В интервале $c_s < c < c_R$ поведение всех функций ($w_1(x)$, $w_0(x)$, $u_1(x)$) аналогично по структуре их поведению в первом интервале, изменятся лишь асимптотики вблизи нуля:

$$w_1(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_1'(k) dk = l_0 \quad (x \rightarrow -0)$$

$$w_1(x) \sim l_0 + (d_1 + d_+ + d_-) \quad (x \rightarrow +0)$$

$$W_1'(k) = W_1(k) - \frac{id_1}{k} - \frac{id_+}{k - k_2} - \frac{id_-}{k + k_2}$$

$$w_0(x) \sim O(1) \quad (x \rightarrow +0)$$

$$u_1(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_1'(k) dk \quad (x \rightarrow -0)$$

$$u_1(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_1'(k) dk + (f_+ + f_-) \quad (x \rightarrow +0)$$

$$U_1'(k) = U_1(k) - if_+/(k - k_2) - if_-/(k + k_2)$$

Асимптотики всех этих функций в данном интервале есть $O(1)$. В интервале $c_R < c < c^*$ качественное поведение скорости сходно с поведением скачка v , а асимптотики в нуле подобны (3.3) — (3.4).

Полученное формальное решение допускает проверку всех поставленных условий задачи, обладает необходимой гладкостью внутри области и тем самым имеет силу точного решения.

4. Проведем сопоставление с некоторыми предельными ситуациями. В случае двух акустических полос можно получить следующую задачу Римана:

$$V^+(k) = H(k) \Sigma^-(k) \quad (4.1)$$

$$H(k) = i[\beta_1 \rho_1^{-1} \operatorname{cth}(\beta_1 k h_1) + \beta_2 \rho_2^{-1} \operatorname{cth}(\beta_2 k h_2)] / c$$

где $\beta_j = (1 - c^2/c_j^2)^{1/2}$; c_j , ρ_j , h_j — соответственно скорости звука, плотности и толщины жидких слоев 1 и 2. Опуская промежуточные выкладки, приведем асимптотические выражения для давления и скачка скорости вблизи точки $x=y=0$:

$$v(x, 0) \sim -v_0 \{h_1 h_2 (\beta_1 \rho_2 + \beta_2 \rho_1) [\pi x (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)]^{-1}\}^{1/2} \quad (x \rightarrow +0)$$

$$p(x, 0) \sim c v_0 \rho_1 \rho_2 \{-h_1 h_2 [\pi x (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) (\beta_1 \rho_2 + \beta_2 \rho_1)]^{-1}\}^{1/2} \quad (x \rightarrow -0)$$

Если $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$, $c_1 = c_2$, то эти асимптотики совпадают с соответствующими выражениями [11]. В акустике не появляются собственные волны, что отличает этот случай от рассмотренных выше. Математически — это следствие отсутствия полюсов коэффициента $H(k)$ в (4.1) на действительной оси, за исключением точки $k=0$. Баланс энергии выражается равенством

$$K = e_0 = 1/2 c v_0^2 \rho_1 \rho_2 h_1 h_2 (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)^{-1}$$

Характерной особенностью соударения, когда хотя бы одна из полос — акустическая, является сингулярность решения в точке контакта при малых скоростях ($0 < c < c_S$ для упругой и акустической полос и $0 < c < \min(c_1, c_2)$ для двух акустических полос). В то же время в задаче симметричного соударения двух упругих полос [2] при $0 < c < c_R$ решение непрерывно в точке контакта, а область сингулярности решения отодвинута за скорость волны Релея. Совершая предельные переходы $h \rightarrow \infty$ и $h \rightarrow 0$ в (2.2), можно показать, что коэффициент $H(k)$ переходит в коэффициенты задач Римана, отвечающих взаимодействию упругой полосы с акустическим полупространством и жидкой полосы с упругим полупространством.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
2. Симонов И. В. Стационарное дозвуковое движение разреза в упругой полосе // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 6. С. 90—99.
3. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука. 1972. 439 с.
4. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М.: Наука. 1978. 295 с.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука. 1977. 640 с.
6. Брезовских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука. 1973. 343 с.
7. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука. 1979. 349 с.
8. Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М. Механика хрупкого разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 3. С. 112—125.
9. Эрдеи А. Асимптотические разложения. М.: Физматгиз. 1962. 127 с.
10. Слепян Л. И. Динамика хрупкого разрушения в средах со структурой // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 121—130.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука. 1977. 407 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.1.1986