МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1987

УДК 539.3.01

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ИЗ МАТЕРИАЛА ГАРМОНИЧЕСКОГО ВИДА

ДОБОРДЖГИНИДЗЕ Л. Г.

В условиях плоской деформации исследуется контактная задача о равновесии системы жестких профилей на границе нелинейно-упругой полуплоскости из материала гармонического вида [1, 2]. Предполагается, что на контакте трение отсутствует. Задача приведена к нелинейному функциональному уравнению. В некоторых случаях равновесия найдены точные решения этого уравнения.

1. Пусть нелинейно-упругий материал занимает в плоскости переменной $z=x+iy$ нижнюю полуплоскость S с границей L $(L=L'+L'')$. Причем $L'=[a_1b_1]+\dots+[a_nb_n]$. На каждый из отрезков $[a_kb_k]$ действует жесткий штамп без учета сил трения. Часть границы L'' свободна от внешних воздействий. Напряжения и вращение на бесконечности примем равными нулю.

Граничные условия задачи имеют вид [3]:

$$X_y=0,\quad x\in L,\qquad Y_y=0,\quad x\in L'',\qquad v=f(x)+d(x),\quad x\in L' \tag{1.1}$$

где X_x, Y_y, X_y — компоненты тензора истинных напряжений Коши, v — нормальное (u — касательное) упругое смещение точек границы полуплоскости; функция $f(x)$ $(f'(x)\in H(L'))$ характеризует форму совокупности профилей штампов до деформации. Если штампы жестко связаны друг с другом, то $d(x)=d$ на L', а если они не связаны, то $d(x)=d_k$ на $[a_kb_k]$, где d, d_k $(k=1, 2,\dots, n)$ — действительные постоянные. В первом случае задается равнодействующая $(0, N_0)$ всех действующих на жесткие профили внешних сил, во втором — равнодействующая $(0, N_k)$ для каждого штампа в отдельности.

Для решения задачи воспользуемся комплексными представлениями полей напряжений, деформаций и смещений через две аналитические в рассматриваемой области S функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ [2] (λ, μ — постоянные Ламе):

$$\begin{gathered} X_x+Y_y+4\mu=(\lambda+2\mu)q\Omega(q)/\sqrt{J} \\ Y_y-X_x-2iX_y=-\frac{4(\lambda+2\mu)}{\sqrt{J}}\frac{\Omega(q)}{q}\frac{\partial z^*}{\partial z}\frac{\partial z^*}{\partial \bar z} \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$u+iv=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\int\varphi'^2(z)\,dz+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z)}{\overline{\varphi'(z)}}+\overline{\psi(z)}\right] \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial z}=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\varphi'^2(z)+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\varphi'(z)}{\overline{\varphi'(z)}},\qquad \frac{\partial z^*}{\partial \bar z}=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z)\overline{\varphi''(z)}}{\overline{\varphi'^2(z)}}-\overline{\psi'(z)}\right] \tag{1.4}$$

$$\sqrt{J}=\left|\frac{\partial z^*}{\partial z}\right|^2-\left|\frac{\partial z^*}{\partial \bar z}\right|^2,\qquad q=2\left|\frac{\partial z^*}{\partial z}\right|,\qquad \Omega(q)=q-\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \tag{1.5}$$

При достаточно больших $|z|$ указанные функции имеют асимптотику [4, 5]:

$$\varphi(z)=-\frac{(\lambda+2\mu)(X+iY)}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\ln z+z+o(1)+\text{const} \tag{1.6}$$

$$\psi(z)=\frac{(\lambda+2\mu)(X-iY)}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\left[\frac{1}{2\varphi'(z)}-1\right]\ln z+o(1)+\text{const} \tag{1.7}$$

Кроме того, $\varphi'(z)\neq 0$ всюду в $S+L$. Из (1.2), с учетом первого соотношения (1.1), следует необходимая для дальнейшего формула

$$Y_y=N(x)=2\mu(\lambda+\mu)[|\varphi'^2(x)|-1][\lambda+\mu+\mu|\varphi'^2(x)|]^{-1} \tag{1.8}$$

На основании (1.8) после учета второго соотношения (1.1) имеем

$$|\varphi'(x)|=\left[\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{2\mu+N(x)}{2(\lambda+\mu)-N(x)}\right]^{1/2}=f_1(x),\quad x\in L',\quad |\varphi'(x)|=1,\quad x\in L'' \tag{1.9}$$

Для решения граничной задачи (1.9), согласно условию $\varphi'(z)\neq 0$, введем аналитическую в области S функцию

$$\Omega(z)=\ln\varphi'(z) \tag{1.10}$$

и зафиксируем ее однозначный элемент условием $\Omega(\infty)=0$.

Граничное условие (1.9) можно переписать так:

$$\operatorname{Re}\Omega(x)=F(x),\quad x\in L',\quad \operatorname{Re}\Omega(x)=0,\quad x\in L'' \tag{1.11}$$

где $F(x)$ — неизвестная функция, связанная с $N(x)$ формулой

$$F(x)={}^1/_2\ln[(\lambda+\mu)\mu^{-1}(2\mu+N(x))/(2(\lambda+\mu)-N(x))] \tag{1.12}$$

Если временно $F(x)$ считать известной, то (1.11) представляет собой граничную задачу Дирихле для нижней полуплоскости S. С учетом $\Omega(\infty)=0$ эта задача имеет решение

$$\Omega(z)=-\frac{1}{\pi i}\int_{L'}\frac{F(x)\,dx}{x-z},\qquad z\in S \tag{1.13}$$

Из (1.10) и (1.13) находим

$$\varphi'(z)=\exp\left(-\frac{1}{\pi i}\int_{L'}\frac{F(x)\,dx}{x-z}\right),\qquad z\in S \tag{1.14}$$

Попытаемся удовлетворить последнему соотношению условия (1.1). Заметим, что с использованием (1.8) из (1.3) следует формула (при $x\in L$):

$$u_x'+iv_x'=\varphi'^2(x)\left[\frac{\mu}{\lambda+2\mu}+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{|\varphi'^2(x)|}\right]-1 \tag{1.15}$$

Отсюда с учетом последнего соотношения (1.1) имеем условие при $x\in L'$:

$$[\mu|\varphi'^2(x)|+\lambda+\mu]\operatorname{Im}\varphi'^2(x)=(\lambda+2\mu)|\varphi'^2(x)|f'(x) \tag{1.16}$$

После этого из (1.14) с использованием соотношения Сохоцкого — Племеля найдем граничные значения функции $\varphi'(z)$ на L' и полученное выражение подставим в (1.16). Получим для определения функции $F(x)$ на L' существенно нелинейное функциональное уравнение

$$[\lambda+\mu+\mu\exp(2F(x_0))]\sin\frac{2}{\pi}\int_{L'}\frac{F(x)\,dx}{x-x_0}=(\lambda+2\mu)f'(x_0) \tag{1.17}$$

В общем случае (для любого f) возможно только приближенное решение этого уравнения одним из способов, указанных, например в [6]. Несмотря на значительные трудности вычислительного характера, численная реализация уравнения (1.17) может принести определенную пользу при решении многих важных контактных задач в нелинейной постановке.

В важном для практики случае, когда рассматриваемые штампы имеют прямолинейное горизонтальное основание, удается найти точное решение нелинейного уравнения (1.17). При этом $f'(x)=0$ и уравнение приобретает вид

$$\sin\left(\frac{2}{\pi}\int_{L'}\frac{F(x)\,dx}{x-x_0}\right)=0 \qquad (1.18)$$

Так как находится неограниченное на концах L' решение уравнения (1.18), имеем

$$\int_{L'}\frac{F(x)\,dx}{x-x_0}=0 \qquad (1.19)$$

Для определения $F(x)$ на L' получено однородное характеристическое сингулярное интегральное уравнение первого рода. В указанном классе функций (класс h_0 [7]) оно имеет решение

$$F(x)=(C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_n)(x-a_1)^{-1/2}(x-b_1)^{-1/2}\ldots(x-a_n)^{-1/2}(x-b_n)^{-1/2} \qquad (1.20)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, для определения которых должны быть использованы (в зависимости от вида задачи) указанные дополнительные условия.

После определения $F(x)$ функцию $\varphi(z)$ находим согласно (1.14) и (1.20). Другую искомую функцию $\psi(z)$ можно определить через $\varphi(z)$ и условия (1.1), применяя (1.2), (1.4), (1.6), (1.7) [5]:

$$\psi'(z)=\frac{(\lambda+2\mu)(X-iY)}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\left[\frac{\varphi''(z)\ln z}{\varphi'^2(z)}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi''(x)\ln x\,dx}{\varphi'^2(x)(x-z)}\right]-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi(x)}\varphi''(x)\,dx}{\varphi'^2(x)(x-z)} \qquad (1.21)$$

Теперь упругое поле полуплоскости можно определить из (1.2)—(1.5) непосредственным вычислением.

2. Рассмотрим равновесие одного штампа ($n=1$), прижатого посредством внешних сил с равнодействующей $(0, N_0)$ к отрезку $[ab]$ границы L. Тогда формула (1.20) примет вид

$$F(x)=G_0[(x-a)(b-x)]^{-1/2} \qquad (2.1)$$

где G_0 — произвольная постоянная. Для ее определения проинтегрируем равенство (2.1) от a до b. Получим

$$\int_a^b F(x)\,dx=C_0\pi=P_0 \qquad (2.2)$$

Для определения неизвестной постоянной P_0 проследим за асимптотическим поведением правой части (1.14) при больших $|z|$. С учетом (1.6) находим

$$P_0=(\lambda+2\mu)N_0[4\mu(\lambda+\mu)]^{-1} \qquad (2.3)$$

Отсюда с использованием (2.2) получим

$$C_0=(\lambda+2\mu)N_0[4\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{(x-a)(b-x)}]^{-1} \qquad (2.4)$$

Следовательно, в рассматриваемом классе функций уравнение (1.19) имеет единственное решение

$$F(x)=(\lambda+2\mu)N_0[4\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{(x-a)(b-x)}]^{-1} \qquad (2.5)$$

Найдем истинное контактное напряжение $N(x)$ на $[ab]$. Для этого сравним выражения (1.12) и (2.5). Получим

$$N(x)=2\mu\left[\exp\left(\frac{(\lambda+2\mu)N_0}{2\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{(x-a)(b-x)}}\right)-1\right]\times$$
$$\times\left[1+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\exp\frac{(\lambda+2\mu)N_0}{2\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{(x-a)(b-x)}}\right]^{-1}. \tag{2.6}$$

Напомним, что по линейной теории контактное напряжение равно

$$N(x)=N_0[\pi\sqrt{(x-a)(b-x)}\,]^{-1} \tag{2.7}$$

Формула (2.6) по сравнению с (2.7) имеет два преимущества: учитывает упругие свойства деформируемого материала и обеспечивает конечность напряжений в окрестности концов штампа (хотя $N(x)\to 2(\lambda+\mu)$ при $x\to a$ или $x\to b$). Это свидетельствует об образовании пластических зон в указанных местах.

Между формулами (2.6) и (2.7) существует следующая связь. Если с использованием известных экспоненциальных разложений [8] правую часть (2.6) представить в виде ряда, то линейное относительно N_0 слагаемое в этом разложении окажется решением (2.7).

Для сравнения контактных напряжений по (2.6) и (2.7) были подсчитаны значения $N(x)/2\mu$ в различных точках контактной области, при различных значениях отношения $N_0/2\mu$, когда $l=b-a=2$, а на штамп действует приложенная в центре симметрии сила величины N_0.

Как показывают вычисления по нелинейной теории, примерно на участке [0,5; 0,5] под штампом нормальное контактное напряжение уменьшается по сравнению с линейным классическим случаем, а вне этого участка, напротив, наблюдается тенденция повышения значений этих напряжений. Эта разница между данными по линейной и нелинейной теориями невелика. Даже в точке $x=0{,}99$ она не превосходит 6%.

Для определения функции $\varphi(z)$ подставим (2.5) в правую часть (1.14):

$$\varphi'(z)=\exp[(\lambda+2\mu)N_0/(8\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{(z-a)(b-z)})] \tag{2.8}$$

После этого из соотношений (1.2)—(1.5) можно вычислить напряжения и смещения в области S.

3. Исследуем задачу для двух штампов ($n=2$, $a_1=-b$, $b_1=-a$, $a_2=a$, $b_2=b$), жестко связанных между собой и находящихся на одной высоте, при заданном главном векторе $(0, N_0)$ приложенных к штампам внешних сил. Уравнение (1.19) имеет решение

$$F(x)=(A+Bx)/\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)},\quad a<|x|<b \tag{3.1}$$

Для определения произвольных постоянных A и B внесем (3.1) в правую часть (1.14) и вычислим полученный при этом интеграл типа Коши. Получим (с точностью до знака, правило выбора которого указано дальше):

$$B=(\lambda+2\mu)N_0/[4\pi\mu(\lambda+\mu)] \tag{3.2}$$

После этого проинтегрируем (3.1) от a до b и используем соотношения

$$\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}=\frac{1}{b}K(k),\qquad \int_a^b\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}=\frac{\pi}{2} \tag{3.3}$$

где K — эллиптический интеграл первого рода, $k=\sqrt{1-a^2/b^2}$. С учетом (3.2) получим, что $A=0$. Уравнение (1.19) имеет решение

$$F(x)=\pm(\lambda+2\mu)N_0x[4\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}\,]^{-1},\quad a<|x|<b \tag{3.4}$$

где знак плюс берется при $x>0$, а знак минус — при $x<0$.

Из (1.12) и (3.4) определяем значения нормального контактного напряжения

$$N(x)=2\mu\left[\exp\left(\pm\frac{(\lambda+2\mu)N_0x}{2\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}\right)-1\right]\times$$
$$\times\left[1+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\exp\left(\pm\frac{(\lambda+2\mu)N_0x}{2\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}\right)\right],\quad a<|x|<b \quad (3.5)$$

По линейной классической теории, при том же правиле выбора знака, как известно

$$N(x)=\pm N_0x(\pi\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)})^{-1} \quad (3.6)$$

4. Рассмотрим случай упругого равновесия двух штампов ($n=2$, $a_1=-b$, $b_1=-a$, $a_2=a$, $b_2=b$), когда они перемещаются в перпендикулярном направлении к границе независимо друг от друга (несвязанные штампы). В этом случае дополнительно задаются величины равнодействующих N_1, N_2:

$$N_1=\int_{-b}^{-a}N(x)\,dx,\qquad N_2=\int_{a}^{b}N(x)\,dx \quad (4.1)$$

Уравнение (1.19) имеет решение

$$F(x)=\pm(\lambda+2\mu[(N_1-N_2)\pi b/2K(k)-(N_1+N_2)x][4\pi\mu(\lambda+\mu)\times$$
$$\times\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}\,]^{-1},\quad a<|x|<b \quad (4.2)$$

Из (1.12) и (4.2) находим контактное напряжение под штампом

$$N(x)=2\mu\left\{\exp\left[\pm\frac{\lambda+2\mu}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\frac{(N_1-N_2)\pi b/2K(k)-(N_1+N_2)x}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}\right]-1\right\}\times$$
$$\times\left\{1+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\exp\left[\pm\frac{(\lambda+2\mu)}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\frac{(N_1-N_2)\pi b/2K(k)-(N_1+N_2)x}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}\right]\right\}^{-1} \quad (4.3)$$

По линейной теории

$$N(x)=\pm[(N_1-N_2)\pi b/2K(k)-(N_1+N_2)x]/(\pi\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}) \quad (4.4)$$

В приведенных соотношениях знаки перед радикалами выбираются, как в (3.5) и (3.6).

Если воспользоваться известным разложением экспоненциальной функции в ряд по полиномам, указанным в [8], и представить (3.5) (или (4.3)) в виде указанного разложения, то линейное (относительно N_0 или N_1, N_2) слагаемое будет соответствовать решению по линейной теории (3.6) (или 4.4)).

ЛИТЕРАТУРА

1. *John F.* Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Communs. Pure. Appl. Math. 1960. V. 13. No. 2. P. 239—296.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. 512 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 707 с.
4. *Добордэкгинидзе Л. Г.* Комплексное представление смещений и напряжений для нелинейно-упругого материала гармонического типа // Тр. Тбил. мат. ин-та. 1979. Т. 61. С. 37—48.
5. *Добордэкгинидзе Л. Г.* Плоская задача для упругой полуплоскости из гармонического материала // Научн. тр. Груз. политехн. ин-та. 1982. № 2(247). С. 65—72.
6. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука. 1966. 664 с.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. 511 с.
8. *Акимов М. И.* О функциях Bessel'я многих переменных и их приложениях в механике. Пг., 1922. 136 с.

Тбилиси

Поступила в редакцию
4.XII.1985