

УДК 539.3

## ДИФРАКЦИЯ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ НА ЖЕСТКОМ ЭКРАНЕ

ГЛУШКО А. И.

Рассматривается задача о дифракции плоской продольной волны на границе упругого полупространства, когда одна часть границы свободна от напряжений, а на другой расположен экран — абсолютно жесткая полуплоскость при условиях гладкого контакта. Считается, что фронт падающей волны пересекает границу полупространства по прямой, ортогональной ребру экрана.

Решение этой смешанной задачи строится при помощи преобразования Лапласа и метода Винера — Хопфа. Обращение преобразования Лапласа выполняется методом Каньяра [1].

Аналогично ранее была решена стационарная пространственная задача о сверхзвуковом движении штампа по поверхности упругого полупространства [2]. Здесь будут использованы результаты [2].

1. Введем декартову систему координат  $x, y, z$ . Полупространство занимает область  $z < 0$ , контакт между экраном и средой осуществляется на полуплоскости  $y > 0$ . Угол между нормалью к фронту и осью  $OX$  обозначим  $\beta_1$ ,  $\pi/2 < \beta_1 < \pi$ ,  $t$  — время,  $\rho$  — плотность среды,  $a_1$  — скорость продольных волн,  $a_2$  — скорость поперечных волн,  $\gamma = a_2/a_1$ ,  $u_i, i = 1, 2, 3$  — компоненты вектора скорости,  $\sigma_{ij}, i, j = 1, 2, 3$  — компоненты тензора напряжений. Уравнения движения линейно-упругой среды запишем в виде ( $\delta_{ij}$  — символы Кронекера):

$$\rho \partial u_i / \partial t = \partial \sigma_{ij} / \partial x_j \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{\rho a_1^2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = (1 - 2\gamma^2) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \gamma^2 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Зададим потенциал падающей волны следующим образом:

$$\Phi(t, x, y, z) = \Phi_0(t + \cos \beta_1 / a_1 x + \sin \beta_1 / a_1 z) H(t + \cos \beta_1 / a_1 x + \sin \beta_1 / a_1 z)$$

Здесь  $\Phi_0 = \Phi_0(x)$  — заданная дважды дифференцируемая функция. Задача дифракции состоит в том, чтобы в области  $G = \{t, x, y, z : t + x \cos \beta_1 / a_1 > 0, z < 0\}$  найти решение уравнений линейной теории упругости, удовлетворяющее следующим условиям на границе  $z = 0$ :

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \quad (1.2)$$

$$w = u_3 = a_1^{-1} \sin \beta_1 \Phi_0''(\xi), \quad \xi > 0, \quad y > 0$$

$$\sigma = \sigma_{33} = \rho(1 - 2\gamma^2 \cos^2 \beta_1) \Phi_0''(\xi), \quad \xi > 0, \quad y < 0$$

Здесь  $\xi = t + x \cos \beta_1 / a_1$ ,  $\Phi_0', \Phi_0''$  — первая и вторая производные  $\Phi_0$ .

Потребуем, чтобы решение было интегрируемо в окрестности ребра  $z = 0, y = 0$ . Задача легко сводится к случаю, когда при  $y < 0$  заданы нулевые граничные условия. Возьмем суперпозицию падающей волны и отраженных продольной и поперечных волн так, чтобы на границе  $z = 0$  выполнялись условия  $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$ . Эти условия будут выполнены, если потенциалы  $\Phi_1$  и  $\Psi$  взять в виде

$$\Phi_1(t, x, y, z) = \Phi_0(t + a_1^{-1} \cos \beta_1 x + a_1^{-1} \sin \beta_1 z) + \quad (1.3)$$

$$+ A \Phi_0(t + a_1^{-1} \cos \beta_1 x - a_1^{-1} \sin \beta_1 z)$$

$$\Psi = B \Phi_0(t + a_1^{-1} \cos \beta_1 x - R_1 a_1^{-1} z), \quad A = (-b_1 + R_1 \cos^2 \beta_1 \sin \beta_1) \cdot \Delta$$

$$R_1 = \sqrt{\gamma^2 - \cos^2 \beta_1}, \quad b_1 = (1/2 \gamma^2 - \cos^2 \beta_1)^2$$

$$B = -2 \cos \beta_1 \sin \beta_1 \sqrt{b_1} \Delta, \quad \Delta = 1 / (b_1 + R_1 \cos^2 \beta_1 \sin \beta_1)$$

Задача дифракции сводится к нахождению решения уравнений теории упругости, удовлетворяющего смешанным граничным условиям при  $z=0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{31}=\sigma_{32}=0, \quad \sigma_{33}=0, \quad y < 0 \\ w = [-(1-A)a_1^{-1} \sin \beta_1 + R_1 B a_1^{-1}] \Phi_0''(\xi) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Решение задачи (1.1), (1.4) будем строить аналогично [2]. Введем некоторые обозначения. Пусть  $X^T$  — вектор-строка с компонентами

$$\begin{aligned} X^T &= \{u_1, u_2, u_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\} \\ M &= 1/\cos \beta_1, \quad \alpha_1 = \sqrt{M^2 - 1} = -\operatorname{tg} \beta_1 \\ \alpha_2 &= \sqrt{M^2/\gamma^2 - 1} = -\operatorname{tg} \beta_2, \quad \delta = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)^{1/2} \\ &(\alpha_1 < \alpha_2, \cos \beta_1/a_1 = \cos \beta_2/a_2) \end{aligned}$$

Будем искать решение задачи в виде  $X(t, x, y, z) = Y(x+ct, y, z) \cdot H(x+ct) = Y(x', y, z)H(x')$ . Здесь  $H=H(x)$  — функция Хевисайда,  $Y = Y(x, y, z)$  — вектор-столбец, полученный транспонированием вектор-строки  $X^T$ ,  $x' = x+ct$  (штрих далее будет опущен),  $c = a_1/\cos \beta_1$ . Обозначим через  $Y^*$  преобразование Лапласа вектора  $Y$  по переменным  $x$  и  $y$ :

$$Y^*(p_1, p_2, z) = \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp[-p_1 x - p_2 y] Y(x, y, z)$$

Здесь  $p_1, p_2$  — комплексные числа, удовлетворяющие условиям  $0 < \operatorname{Re} p_2 < \alpha_1 \operatorname{Re} p_1$ . Вектор  $Y^*$  может быть представлен в виде [2]:

$$Y^*(p_1, p_2, z) = c_1 q_1 e^{w_1 z} + (c_2 q_2 + c_3 q_3) e^{w_2 z} \quad (1.5)$$

Здесь  $\omega_1 = \omega_1(p_1, p_2)$ ,  $\omega_2 = \omega_2(p_1, p_2)$  — регулярные ветви функций  $\omega_1 = \sqrt{\alpha_1^2 p_1^2 - p_2^2} = p_1 \omega_1(\theta)$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\alpha_2^2 p_1^2 - p_2^2} = p_1 \omega_2(\theta)$ , имеющие положительную вещественную часть в полосе  $0 < \operatorname{Re} p_2 < \alpha_1 \operatorname{Re} p_1$ . Векторы  $q_1, q_2, q_3$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} q_1^T &= \{1, \theta, \omega_1, a[1 + (1 - 2\gamma^2)(\theta^2 + \omega_1^2)], a[\theta^2 + (1 - 2\gamma^2)(1 + \omega_1^2)], \\ &a[(1 - 2\gamma^2)(1 + \theta^2) + \omega_1^2], 2b\theta, 2b\theta\omega_1, 2b\omega_1\} \\ q_2^T &= \left\{1, 0, -\frac{1}{\omega_2}, 2b, 0, -2b, b\theta, \frac{b\theta}{\omega_2}, \frac{b(\omega_2^2 - 1)}{\omega_2}\right\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$q_3^T = \left\{0, 1, -\frac{\theta}{\omega_2}, 0, 2b\theta, -2b\theta, b, \frac{b(\omega_2^2 - \theta^2)}{\omega_2}, \frac{b\theta}{\omega_2}\right\}$$

$$a = \rho a_1/M, \quad b = \rho a_1 \gamma^2/M, \quad \theta = p_2/p_1 \quad (1.7)$$

$$c_k = \sigma^* c_k' \quad (k=1, 2, 3) \quad (1.7)$$

$$c_1' = D(\frac{1}{2}M^2/\gamma^2 - 1 - \theta^2) \quad (1.8)$$

$$c_2' = -D\sqrt{\alpha_1^2 - \theta^2}\sqrt{\alpha_2^2 - \theta^2}, \quad c_3' = \theta c_2, \quad D = (2bR(\theta))^{-1}$$

$$R(\theta) = (\frac{1}{2}M^2/\gamma^2 - 1 - \theta^2)^2 + (1 + \theta^2)\sqrt{\alpha_1^2 - \theta^2}\sqrt{\alpha_2^2 - \theta^2} \quad (1.9)$$

$$\sigma^* = \sigma^*(p_1, p_2) = -w^*(p_1) G_0(\theta_* + \theta) R^+(\theta) / (p_1 \theta \sqrt{\alpha_1 + \theta}) \quad (1.9)$$

$$w^*(p_1) = \int_0^{\infty} w(x) e^{-p_1 x} dx \quad (1.10)$$

Здесь  $w$  определена формулой (1.4);  $\theta_*$  — корень уравнения

$$R(\theta) = 0, \quad R^+(\theta) = \exp \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_2}^{-\alpha_1} g(t) \frac{dt}{t - \theta}$$

$$g(t) = \operatorname{arctg} \frac{(1+t^2)\sqrt{(t^2 - \alpha_1^2)(\alpha_2^2 - t^2)}}{(M^2/2\gamma^2 - 1 - t^2)^2}$$

$$G_0 = \frac{\gamma}{M} \sqrt{\frac{2R(0)}{\alpha_1(\gamma^2-1)}}$$

Регулярные ветви радикалов, входящих в  $c_h$ , выбраны так, что  $\sqrt{\alpha_1^2} = \alpha_1$ ,  $\sqrt{\alpha_2^2} = \alpha_2$  при  $\theta=0$ .

Таким образом, коэффициенты  $c_1, c_2, c_3$  определены и решение задачи можно записать используя обратное преобразование Лапласа.

$$Y(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\nu_1-i\infty}^{\nu_1+i\infty} e^{p_1 x} dp_1 \int_{\nu_2-i\infty}^{\nu_2+i\infty} e^{p_2 y} Y^*(p_1, p_2, z) dp_2$$

$$\nu_1 = \text{Re } p_1, \quad \nu_2 = \text{Re } p_2, \quad \nu_1 > \nu_2 > 0$$

Вектор  $Y^*(p_1, p_2, z)$  определяется через векторы  $q_h$ , коэффициенты  $c_h$  и функции  $\omega_h$  выражением (1.5).

Подставим в (1.7) вместо  $\sigma^*$  выражение (1.9). Получим

$$c_h = c_h^*(\theta) w^*(p_1) / (p_1 \theta).$$

Здесь

$$c_h^* = G(\theta) c_h'(\theta), \quad G(\theta) = -G_0(\theta_* + \theta) / \sqrt{\alpha_1 + \theta R^+}(\theta).$$

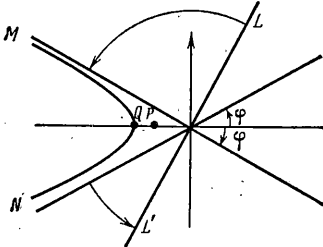
Так как  $c_1^*(0) \neq 0, c_2^*(0) \neq 0$ , то функции  $c_1(p_1, \theta), c_2(p_1, \theta)$  имеют простой полюс в нуле  $\theta=0$ . Функция  $G(\theta)$  регулярна во всей плоскости переменного  $\theta$ , за исключением разреза на действительной оси  $(-\infty, -\alpha_1)$ .

2. Сделаем замену переменных  $p_2 = \theta p_1$ . Тогда

$$Y(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^\infty p_1 e^{p_1 x} dp_1 \int_{LL'} e^{p_1 \theta y} \sum_{h=1}^3 c_h q_h e^{\omega_h z} d\theta \quad (2.1)$$

Здесь  $\omega_3 = \omega_2, LL'$  — прямая  $\theta = p_2/p_1$  (фиг. 1).

Обращение преобразования Лапласа выполним методом Каньяра. Для этого перепишем подынтегральное выражение (2.1) следующим образом:



Фиг. 1

$$\exp(p_1 \theta y) \sum_{h=1}^3 c_h(\theta, p_1) q_h(\theta) \exp(\omega_h z) =$$

$$= \frac{w^*(p_1)}{p_1} \sum_{h=1}^3 \frac{c_h^*(\theta)}{\theta} q_h(\theta) \exp(-\tau(\theta, \alpha_h) p_1)$$

$$\alpha_3 = \alpha_2, \quad \tau(\theta, \alpha) = -\sqrt{\alpha^2 - \theta^2} z - \theta y$$

Рассмотрим более подробно случай  $y > 0$ . Зададим контур  $MQN$  (фиг. 1) формулой

$$\theta = (-ty \pm i\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) / r^2, \quad t \geq \alpha r \quad (2.2)$$

Здесь  $y + iz = re^{i\varphi}$ . При изменении  $t$  в интервале  $(\alpha r, \infty)$  точка контура  $\theta(t)$  описывает дугу  $MQ$ ,  $\text{Re } \theta < 0, \text{Im } \theta > 0$ , если в (2.2) взят знак плюс, и дугу  $QN$ ,  $\text{Re } \theta < 0, \text{Im } \theta < 0$ , если взят знак минус. Дуги  $QM$  и  $QN$  симметричны относительно действительной оси и имеют асимптоты  $z \cos \varphi \pm y \sin \varphi = 0$ ;  $\theta = -\alpha \cos \varphi$  в точке  $Q$ . Проверка показывает, что на контуре  $MQN$  функция  $\tau = \tau(\theta, \alpha)$  принимает вещественные значения и  $\tau > 0$ . В точке  $Q$   $\tau(-\alpha \cos \varphi, \alpha) = \alpha r$ ; на интервале  $-\alpha < \text{Re } \theta < \alpha$  и  $\text{Im } \theta = 0$  функция  $\tau = \tau(\theta, \alpha)$  принимает также действительные значения. В точке  $\theta = -\alpha \cos \varphi$  значение  $\tau$  максимально,  $\tau(-\alpha \cos \varphi, \alpha) = \alpha r$ , а на интервале  $-\alpha \cos \varphi < \theta < 0$   $\tau$  монотонно убывает,  $0 < -\alpha z \leq \tau \leq \alpha r$ .

В методе Каньяра интеграл по прямой  $LL'$  преобразуется в интеграл по контуру  $MQPQN$ , где функция  $\tau = \tau(\theta, \alpha)$  действительна и принимает положительные значения. На этой фигуре точке  $P$  соответствует  $\theta = -\alpha_1$ .

Так как все функции (2.1) регулярны вне разрезов  $(-\infty, -\alpha_1)$ ,  $(\alpha_1, \infty)$ , то при  $\alpha = \alpha_1$  интеграл по берегам разреза  $QP$  обратится в нуль.

Переход от интеграла по прямой  $LL'$  к интегралу по контуру  $MQPQN$  возможен, так как на дугах  $LM$  и  $L'N$   $1/2\pi < \arg p_1(z\sqrt{\alpha^2 - \theta^2} + y\theta) < 3/2\pi$ , т. е. в обоих случаях  $\operatorname{Re} p_1(z\sqrt{\alpha^2 - \theta^2} + y\theta) < 0$ . Тогда интегралы по дугам  $LM$ ,  $L'N$  исчезают при  $|\theta| \rightarrow \infty$ , а интеграл по прямой  $LL'$  от первых двух слагаемых в (2.1) преобразуется в интеграл по контуру  $MQPQN$  и вычит в нуле от подынтегрального выражения. Последнее слагаемое в (2.1) преобразуется в интеграл по контуру  $MQPQN$ . Таким образом (2.1) приводится к виду

$$Y(x, y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty w^*(p_1) e^{p_1 x} dp_1 \left[ \sum_{k=1}^2 c_k^*(0) q_k(0) \exp(-\tau_k(0) p_1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{k=1}^3 \frac{c_k^*(\theta)}{\theta} q_k(\theta) \exp(-\tau_k p_1) d\theta \right] \quad (2.3)$$

Здесь  $\tau_k(\theta) = -\theta y - \sqrt{\alpha_k^2 - \theta^2} z$ ,  $\Gamma$  — контур  $MQPQN$ . Так как  $\tau_k(0) = -\alpha_k z$ , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{v_1 - i\infty}^{v_1 + i\infty} w^*(p_1) e^{p_1 x} \left[ \sum_{k=1}^2 c_k^*(0) q_k(0) \exp(\alpha_k p_1 z) \right] dp_1 = \\ = \sum_{k=1}^2 c_k^*(0) q_k(0) w(x + \alpha_k z) H(x + \alpha_k z) \quad (2.4)$$

Учитывая, что в сопряженных точках  $\theta$  и  $\bar{\theta}$ :

$$c_k^*(\bar{\theta}) q_k(\bar{\theta}) = \overline{c_k^*(\theta) q_k(\theta)}, \quad d\theta/d\tau(\bar{\theta}) = \overline{d\theta/d\tau(\theta)}$$

можно записать

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{v_1 - i\infty}^{v_1 + i\infty} w^*(p_1) e^{p_1 x} dp_1 \int_\Gamma \frac{c_1^*(\theta)}{\theta} q_1(\theta) \exp(-\tau_1(\theta) p_1) d\theta = \\ = \frac{-2i}{(2\pi i)^2} \int_{v_1 - i\infty}^{v_1 + i\infty} w^*(p_1) e^{p_1 x} dp_1 \times \\ \times \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[ \frac{c_1^*(s_1)}{s_1} q_1(s_1) \frac{ds_1}{d\tau}(s_1) \right] H(\tau - \alpha_1 r) e^{-p_1 \tau} d\tau = \\ = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty w(x - \tau) \operatorname{Im} \left[ \frac{c_1^*(s_1)}{s_1} q_1(s_1) \frac{ds_1}{d\tau}(s_1) \right] H(\tau - \alpha_1 r) d\tau \quad (2.5)$$

Здесь  $s_1 = \theta(\tau, \alpha_1)$ ,  $\theta(\tau, \alpha_1)$  определена формулой (2.3), в которой  $\alpha = \alpha_1$ . Два других интеграла в (2.3) запишутся следующим образом. Если точка  $Q$  лежит на разрезе  $(-\infty, -\alpha_1)$ , т. е.  $|\alpha_2 \cos \varphi| > \alpha_1$ , то

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{v_1 - i\infty}^{v_1 + i\infty} w^*(p_1) e^{p_1 x} dp_1 \int_{\Gamma_{MQRPN}} \sum_{k=2}^3 \frac{c_k^*(\theta)}{\theta} q_k(\theta) \exp(-\tau_k(\theta) p_1) d\theta = \\ = \frac{-2i}{(2\pi i)^2} \int_{v_1 - i\infty}^{v_1 + i\infty} w^*(p_1) e^{p_1 x} dp_1 \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[ \sum_{k=2}^3 \frac{c_k^*(s_2)}{s_2} q_k(s_2) \frac{ds_2}{d\tau}(s_2) \right] H(\mu) d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^x w(x-\tau) \operatorname{Im} \left[ \sum_{h=2}^5 \frac{c_h^*(s_2)}{s_2} q_h(s_2) \frac{ds_2}{d\tau}(s_2) \right] H(\mu) d\tau$$

Если  $|\alpha_2 \cos \varphi| < \alpha_1$ , то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\nu_1-i\infty}^{\nu_1+i\infty} w^*(p_1) e^{p_1 z} dp_1 \int_{\Gamma_{MQR}} \sum_{h=2}^3 \frac{c_h^*(\theta)}{\theta} q_h(\theta) \exp(-\tau_k(\theta) p_1) d\theta = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_0^x w(x-\tau) \operatorname{Im} \left[ \sum_{h=2}^3 \frac{c_h^*(s_2)}{s_2} q_h(s_2) \frac{ds_2}{d\tau}(s_2) \right] H(\tau-\alpha_2 r) d\tau \end{aligned}$$

Здесь  $\mu = \tau - \alpha_1 y + \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} z$ ,  $s_2$  — комплекснозначная кусочно-гладкая функция переменного  $\tau$ :

$$s_2 = \frac{-\tau y - \sqrt{\alpha_2^2 r^2 - \tau^2} z}{r^2}, \quad 0 < -\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} z + \alpha_1 y < \tau < \alpha_2 r$$

$$s_2 = (-\tau y - i\sqrt{\tau^2 - \alpha_2^2 r^2} z) / r^2, \quad \tau \geq \alpha_2 r$$

Так как  $s_2(\tau)$  недифференцируема при  $\tau = \alpha_2 r$ , то интеграл, содержащий множитель  $ds_2/d\tau$ , есть сумма двух интегралов: интеграла по отрезку  $[-\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} z + \alpha_1 y, \alpha_2 r]$ , когда  $s_2(\tau)$  определяется верхней формулой, и интеграла по отрезку  $[\alpha_2 r, x]$ ,  $x > \alpha_2 r$ , когда  $s_2(\tau)$  определяется нижней формулой.

Из формул (1.6)–(1.9) следует, что на отрезке  $[-\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} z + \alpha_1 y, \alpha_2 r]$  при  $y > 0$ :

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{c_k^*(s_2)}{s_2} q_k(s_2) \frac{ds_2}{d\tau}(s_2) \right] = 0 \quad (k=2, 3)$$

Учитывая это, окончательно решение задачи при  $y > 0$  записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} Y(x, y, z) &= \sum_{h=1}^2 c_h^*(0) q_h(0) w(x + \alpha_h z) H(x + \alpha_h z) - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_0^x d\tau w(x-\tau) \left\{ \operatorname{Im} \left[ \frac{c_1^*(s_1)}{s_1} q_1(s_1) \frac{ds_1}{d\tau}(s_1) \right] H(\tau - \alpha_1 r) - \right. \\ & \left. - \operatorname{Im} \left[ \sum_{h=2}^3 \frac{c_h^*(s_2)}{s_2} q_h(s_2) \frac{ds_2}{d\tau}(s_2) \right] H(\tau - \alpha_2 r) \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Аналогично можно получить решение задачи при  $y < 0$ :

$$\begin{aligned} Y(x, y, z) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^x d\tau w(x-\tau) \left\{ \operatorname{Im} \left[ \frac{c_1^*(t_1)}{t_1} q_1(t_1) \frac{dt_1}{d\tau}(t_1) \right] H(\tau - \alpha_1 r) + \right. \\ & \left. + \operatorname{Im} \left[ \sum_{h=2}^3 \frac{c_h^*(t_2)}{t_2} q_h(t_2) \frac{dt_2}{d\tau}(t_2) \right] \chi(\tau) \right\}, \quad \left( -\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2} \right) \quad (2.7) \\ & \chi(\tau) = H(\tau - \alpha_2 r), \quad -\alpha_2 \cos \varphi \leq \alpha_1 \\ & \chi(\tau) = H(\tau + \alpha_1 y + \delta z), \quad -\alpha_2 \cos \varphi > \alpha_1 \end{aligned}$$

$$t_1 = \frac{-\tau y + i\sqrt{\tau^2 - \alpha_1^2 r^2} z}{r^2}, \quad \tau \geq \alpha_1 r$$

$$t_2 = \frac{-\tau y + \sqrt{\alpha_1^2 r^2 - \tau^2 z}}{r^2}, \quad 0 < -\delta z - \alpha_1 y < \tau < \alpha_2 r$$

$$t_2 = \frac{-\tau y + i\sqrt{\tau^2 - \alpha_2^2 r^2} z}{r^2}, \quad \tau \geq \alpha_2 r$$

Здесь также интеграл, содержащий множитель  $dt_2/d\tau$ , есть сумма двух интегралов: интеграла по отрезку  $[-\delta z - \alpha_1 y, \alpha_2 r]$ , когда  $t_2(\tau)$  определяется верхней формулой, и интеграла по отрезку  $[\alpha_2 r, x]$ ,  $\alpha_2 r < x$ , когда  $t_2(\tau)$  определяется нижней формулой.

Проверим, что построенное решение интегрируемо в окрестности ребра  $z=0, y=0$ . Для этого достаточно оценить интегралы в (2.6) и (2.7) при  $r \rightarrow 0$ . Рассмотрим более подробно случай  $y > 0$ ; оценка интеграла (2.7) при  $y < 0$  может быть получена аналогичным образом.

Введем переменную  $\tau = \alpha_2 r \tau'$  и обозначим  $i$ -ю компоненту вектора  $q_k$  через  $q_k^i$ , ( $i=1, 2, \dots, 9$ ;  $k=1, 2, 3$ ):  $g_i = w(x-\tau) \text{Im}[c_i'(s_i) s^{-1} q_i(s_i) ds_i / d\tau' G(s_i)]$  ( $i=1, 2, 3$ )  $s_3 = s_2$ ,  $\tau_1 = \alpha_1 / \alpha_2$ ,  $\tau_2 = x / (\alpha_2 r)$ .

Тогда интеграл в (2.6) можно записать в виде

$$J(x, y, z) = \int_{\tau_1}^1 g_1(s_1) d\tau' + \int_1^{\tau_2} \sum_{i=1}^3 g_i(s_i) d\tau'$$

Так как первое слагаемое ограничено при  $r \rightarrow 0$ , а  $\tau_2 \rightarrow \infty$ , то для асимптотической оценки  $J = J(x, y, z)$  следует получить представление подынтегрального выражения во втором интеграле при  $\tau' \rightarrow \infty$ .

Можно проверить, что при  $\tau' \rightarrow \infty$

$$s_k(\tau') \sim \tau', \quad |ds_k/d\tau'| \leq \text{const}, \quad R(s_k) \sim s_k^2 \quad (k=1, 2, 3)$$

$$\left| \sum_{k=1}^3 c_k'(s_k) q_k^i(s_k) \right| < \text{const} \quad (i=1, 2, \dots, 9)$$

$$G(s_k)/s_k = (\theta_* + s_k) / (s_k(\alpha + s_k)^{1/2}) \sim s_k^{-1/2} \quad (k=1, 2, 3)$$

Из этих оценок следует, что вектор-функция  $X = X(x, y, z)$  имеет асимптотическое представление  $X(x, y, z) = (x/r)^{1/2} X_0(x, \varphi) + X_1(x, r, \varphi)$  при  $r \rightarrow 0$ . Здесь вектор-функция  $X_1 = X_1(x, r, \varphi)$  ограничена при  $r \rightarrow 0$ . Значит,  $X = X(x, y, z)$  интегрируема в окрестности ребра  $y=0, z=0$ .

Следует отметить, что условие интегрируемости было использовано при построении решения методом Винера — Хопфа: предполагалось, что функция  $\sigma_{33}(x, y, 0)$  интегрируема на плоскости  $z=0$  в окрестности прямой  $y=0$ .

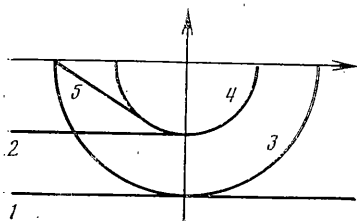
Когда рассматривается задача в напряжениях  $\sigma_{33}(x, y, 0) = \sigma(x, y)$ ,  $\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, z=0$ , то решение задачи записывается формулой

$$Y(x, y, z) = \iint dx' dy' \sigma(x-x', y-y') G(x', y', z)$$

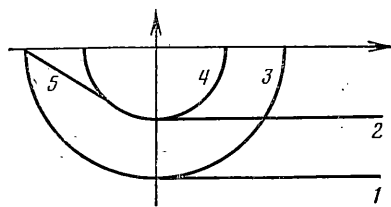
$$G(x, y, z) = \text{Im} \left[ \frac{c_k^*(s_1)}{s_1} q_1(s_1) \frac{ds_1}{dx}(s_1) \right] H(x - \alpha_1 r) +$$

$$+ \sum_{k=2}^3 \frac{c_k^*(s_2)}{s_2} q_k(s_2) \frac{ds_2}{dx}(s_2) H(x - \mu) H(\alpha_2 r - x) +$$

$$+ \sum_{k=2}^3 \frac{c_k^*(s_3)}{s_3} q_k(s_3) \frac{ds_3}{dx}(s_3) H(x - \alpha_2 r)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Функции  $c_k^*(\theta)$  определены формулами (1.8), векторы  $q_k(\theta)$  — формулами (1.6):

$$\mu = -\alpha_1 \operatorname{sign}(y) y + \delta z,$$

$$s_1 = (-xy + iv\sqrt{x^2 - \alpha_1^2 r^2 z}) r^{-2}, \quad x > \alpha_1 r;$$

$$s_2 = (-xy - \operatorname{sign}(y)\sqrt{\alpha_2^2 r^2 - x^2 z}) r^{-2} \quad \alpha_1 \operatorname{sign}(y) y - \delta z < x < \alpha_2 r;$$

$$s_3 = (-xy + iv\sqrt{x^2 - \alpha_2^2 r^2 z}) r^{-2}, \quad x > \alpha_2 r; \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad v = -\operatorname{sign}(y)$$

3. Проанализируем полученные формулы. Так как  $\alpha_k = -\operatorname{tg} \beta_k$ ,  $x + \alpha_k z = (x \cos \beta_k - y \sin \beta_k) / \cos \beta_k$ , то первое слагаемое в (2.6), пропорциональное  $H(x + \alpha_1 z)$ , соответствует отраженной плоской продольной волне, второе, пропорциональное  $H(x + \alpha_2 z)$ , — отраженной плоской поперечной волне. Можно проверить, что сумма по  $k$  от единицы до двух  $Y_1 = \sum c_k^*(0) \times q_k(0) w(x + \alpha_k z)$  удовлетворяет при  $z=0$  граничным условиям  $\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$ ,  $u_3(x, y, 0) = w(x, y)$ . Тогда из (1.4) видно, что сумма  $Y_0 + Y_1$  (здесь  $Y_0$  — вектор-функция), потенциалы смещений которой определены формулами (1.3), удовлетворяет граничным условиям  $\sigma_{31} = \sigma_{32} = u_3 = 0$  при  $z=0$ . Из этого следует, что в среде при  $y > 0$  нет отраженной плоской поперечной волны, а есть только отраженная плоская продольная волна. Третье слагаемое в (2.6), содержащее под знаком интеграла множитель  $H(\tau - \alpha_1 r)$ , представляет собой «продольную» коническую дифракционную волну. Фронт этой волны имеет уравнение

$$x - \alpha_1 \sqrt{y^2 + z^2} = 0 \quad (3.1)$$

Два последних слагаемых под знаком интеграла в (2.6) соответствуют «поперечной» конической дифракционной волне. Эти слагаемые обращаются в нуль вне области, ограниченной конической поверхностью

$$x - \alpha_2 \sqrt{y^2 + z^2} = 0 \quad (3.2)$$

Аналогичным образом анализируется формула (2.7), представляющая решение при  $y < 0$ . Здесь, однако, отсутствуют слагаемые, соответствующие отраженным плоским волнам. Учитывая (1.4), это означает, что при  $y < 0$  в среде имеются отраженные плоские волны. Интенсивности этих волн определены формулами (1.3). При  $y < 0$  также имеется коническая продольная дифракционная волна, фронт которой определяется уравнением (3.1). Последние два слагаемых в (2.7), соответствующие конической поперечной волне и головной волне, обращаются в нуль вне области, ограниченной поверхностью  $x - \alpha_2 \sqrt{y^2 + z^2} = 0$  при  $\alpha_1 z - \delta y < 0$ ,  $y < 0$  и плоскостью

$$x + \alpha_1 y + \delta z = 0 \quad (3.3)$$

при  $\alpha_1 z - \delta y > 0$ . На линии  $z = -\delta \alpha_2^{-2} x$ ,  $y = -\alpha_1 \alpha_2^{-2} x$  коническая поверхность и плоскость (3.3) гладко сопрягаются.

Линии пересечения указанных фронтов с плоскостью  $x = x_0 > 0$  показаны на фиг. 2. Здесь линиям 3—5 соответствуют поверхности (3.1) — (3.3). Линии 1, 2 соответствуют плоским отраженным волнам: продольной и поперечной.

Формулы (2.6), (2.7) дают также решение задачи о сверхзвуковом движении штампа по упругому полупространству. Из этого следует, что анализ решения задачи о дифракции плоской волны на экране дословно переносится на решение задачи о штампе. Отличие состоит в том, что в задаче о штампе отраженные плоские волны распространяются не в области  $y < 0, z < 0, x < 0$ , а в области  $y > 0, z > 0, x > 0$ . Пересечение фронтов отраженных и дифракционных волн показано на фиг. 3 (штамп движется по полуплоскости  $y > 0$ ). Следует отметить, что похожая картина волновых фронтов имеет место и в задаче об ударе о поверхность упругого полупространства полубесконечного штампа (в условиях плоской деформации) [3]. Однако решение плоской задачи записывается значительно более простыми формулами.

Отметим, что отсутствие головных волн в области  $z < 0, x > 0, y > 0$  в задаче о дифракции на жестком экране и в задаче о сверхзвуковом движении штампа связано с тем, что на границе  $z = 0, y > 0$  ставятся условия  $\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, u_3(x, y, 0) = w(x)H(y)$ . При других граничных условиях, например в задаче о дифракции стационарной плоской волны на разрезе жестко заземленными краями, имеются также и головные волны [4].

Автор благодарит Н. В. Зволинского и А. Н. Ковшова за обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. De Hoop A. T. A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems // Appl. Sci. Res. Sec. B. 1960. V. 8. No. 4. P. 349-356.
2. Глушко А. И. О сверхзвуковом движении штампа по упругому полупространству // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 92-97.
3. Флитман Л. М. Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 697-705.
4. Филиппов А. Ф. Пространственная задача дифракции упругой волны на остром ребре // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 694-696.

Москва

Поступила в редакцию  
4.VII.1985