

УДК 531.8

## **СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЙ РОБОТОМ-МАНИПУЛЯТОРОМ ПРЯМЫМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА**

**БРАГИНА А. А., ЧЕРНОРУЦКИЙ Г. С., ШТАКАН В. Ф.**

Как известно, задача управления движением робота-манипулятора заключается в синтезе закона управления, реализующего программную траекторию. Необходимые для управления этими сложными механизмами со многими степенями свободы моменты и силы формируются, в частности, системами исполнительных приводов, сопряженных с манипуляторами. Ограничения, обусловленные возможностями функционирования и мощности приводов, оказывают наряду с нелинейностями типа «люфт», «сухое трение» в механических передачах существенное влияние на динамику робота. В связи с этим при построении уравнений движения манипулятор с приводами целесообразно рассматривать как единую систему, фазовый вектор которой определяется данными как механизма, так и исполнительных приводов. При исследовании уравнений движения необходимо учитывать наличие внешних воздействий, появление которых в процессе работы манипуляционных устройств предотвратить невозможно, что усложняет решение задачи. В связи с этим синтез управления и стабилизация роботов-манипуляторов проводится, как правило, в предположении о допустимости упрощения уравнений динамики, описывающих эти многосвязные системы, посредством их линеаризации или введения в приводы манипуляторов сигналов, компенсирующих перекрестные связи в системах управления отдельными звеньями. Это приводит в конечном счете к тому, что анализируются не точные уравнения, а лишь некоторые их приближения. В настоящее время основным строгим методом динамического анализа нелинейных систем, использующим полные уравнения динамики, является метод функций Ляпунова. Этим методом может быть решена задача синтеза управляющих моментов манипулятора при использовании в качестве функции Ляпунова полной энергии системы. Однако полученные моменты не могут служить управляющими воздействиями реального манипулятора, поскольку инерционность приводов создаст существенное отличие реальных моментов от желаемых. Поэтому более строго задачу синтеза управлений следует решать учитывая возможные инерционности приводов уже на этапе формализации задачи и рассматривая в качестве входного сигнала звена манипулятора не момент, а входной сигнал привода, например напряжение на входе усилителя и т. п. Такой подход к синтезу управлений базируется на использовании в качестве функций Ляпунова первых интегралов движения системы, поэтому включаемый в рассмотрение привод должен иметь конкретный физический смысл, например: электропривод постоянного тока, гидропривод с дроссельным управлением и т. д., что позволит учесть его энергию при построении функции Ляпунова.

В данной работе прямым методом Ляпунова решена задача синтеза управлений и исследования устойчивости манипулятора с приводами в точке программной траектории. Приведены результаты, направленные на решение проблемы компенсации внешних воздействий. Для определенности рассмотрен манипулятор с электрическими приводами с якорным управлением, что, однако, не ограничивает возможностей перехода к какому-либо иному типу привода. При выводе уравнений динамики учитывается, что исследуемая система имеет девять обобщенных координат: шесть «электрических» и три «механических». Несмотря на то что общая механика и электротехника имеют аппарат, теоретически пригодный для систем с любым конечным числом обобщенных координат, в действительности редко можно встретить попытки постановки и решения задач для систем с числом обобщенных координат больше шести. Основной причиной этого является громоздкость получаемых уравнений движения. В связи с этим вывод уравнений динамики рассматриваемой электро-механической системы проведен с использованием тензорного анализа [1, 2]. Для некоторых обобщенных координат и скоростей системы использованы обозначения, принятые в электротехнике. С этой целью в выражении полной кинетической энергии электро-механической системы, используемом при выводе уравнений, выделены в виде отдельных слагаемых кинетические энергии манипулятора и сопряженных с ним приводов.

1. Выведем уравнения динамики манипулятора. По аналогии с [2] обобщенные координаты звеньев до их соединения в агрегат назовем опор-

ными координатами манипулятора. Введем две группы индексов. Греческими буквами  $\lambda, \mu, \nu, \beta, \gamma$  будут обозначаться номера звеньев или обобщенных координат манипулятора  $\eta_\lambda$ , латинскими буквами  $p, q$  — номера его опорных координат  $\xi_p$ . После соединения звеньев опорные координаты манипулятора однозначно определяются его обобщенными координатами и структура манипулятора описывается уравнениями связей  $\xi_p = \xi_p(\eta_\lambda)$ , задающих структурную матрицу манипулятора  $\partial \xi_p / \partial \eta_\lambda$  [2]. Индексы  $\lambda, \mu, \nu, \beta, \gamma$  пробегают значения  $1, 2, \dots, n$ , где  $n$  — число обобщенных координат манипулятора; размерность структурной матрицы  $m \times n$  определяет число опорных координат манипулятора после соединения звеньев:  $p, q = 1, 2, \dots, m$ . Кинетическую энергию манипулятора получим как энергию сложной системы связанных тел

$$T_M = (1/2) c_{\lambda\mu} \dot{\eta}_\lambda \dot{\eta}_\mu, \quad c_{\lambda\mu} = b_{pq} (\partial \xi_p / \partial \eta_\lambda) (\partial \xi_q / \partial \eta_\mu)$$

где  $c_{\lambda\mu}$  — метрический тензор манипулятора,  $b_{pq}$  — тензор инерции манипулятора [2], построенный с учетом размерности его структурной матрицы.

Добавим к совокупности обобщенных координат манипулятора обобщенные координаты электроприводов звеньев  $Q_{a\lambda}, Q_{b\lambda}$ , определив их зарядками, протекающими через поперечные сечения обмоток якоря и возбуждения соответствующих электродвигателей. Обозначим  $I_{a\lambda} = Q_{a\lambda}, I_{b\lambda} = Q_{b\lambda}$  — токи обмоток якоря и возбуждения электродвигателей звеньев (обобщенные скорости системы) соответственно,  $L_{a\lambda\mu}, L_{b\lambda\mu}$  — тензоры индуктивности якорных обмоток и обмоток возбуждения соответственно электродвигателей всех электроприводов,  $M_{\lambda\mu}$  — тензор взаимной индуктивности якорных обмоток и обмоток возбуждения электродвигателей.

Полная кинетическая энергия манипулятора с электроприводами определяется выражением

$$T = (1/2) c_{\lambda\mu} \dot{\eta}_\lambda \dot{\eta}_\mu + (1/2) L_{a\lambda\mu} I_{a\lambda} I_{a\mu} + (1/2) L_{b\lambda\mu} I_{b\lambda} I_{b\mu} + M_{\lambda\mu} I_{a\lambda} I_{b\mu} \quad (4.1)$$

Поскольку рассматриваемая система имеет циклическую скорость  $I_{b\lambda}$ , получим уравнения, описывающие ее динамику, в форме Рауса [3]. Точку программной траектории системы определим наряду с обобщенными координатой и скоростью  $\eta_\lambda, \dot{\eta}_\lambda$  обобщенной скоростью  $I_{a\lambda}$ . Для исключения скорости  $I_{b\lambda}$  из соотношений, описывающих динамику, воспользуемся тем, что обобщенные импульсы, соответствующие циклическим координатам, остаются неизменными во все время движения системы, т. е. имеют место первые интегралы движения

$$\partial T / \partial I_{b\mu} = L_{b\lambda\mu} I_{b\lambda} + M_{\lambda\mu} I_{a\lambda} = n_\mu = \text{const.} \quad (4.2)$$

Определив  $I_{b\lambda}$  из (4.2):

$$I_{b\lambda} = L_b^{-\lambda\mu} (n_\mu - M_{\mu\nu} I_{a\nu}) \quad (4.3)$$

где тензор  $L_b^{-\lambda\mu}$  такой, что  $L_b^{-\lambda\mu} L_{b\mu\nu} = \delta_\nu^\lambda$ ,  $\delta_\nu^\lambda$  — символ Кронекера, составим функцию Рауса [3], которая не содержит явно циклической скорости  $I_{b\lambda}$  и при выводе уравнений динамики играет роль функции Лагранжа:  $R = T_+ - n_\lambda I_{b\lambda}$ . Здесь  $T_+$  — результат подстановки  $I_{b\lambda}$  (4.3) в выражение (4.1) для кинетической энергии системы. Имеем

$$R = (1/2) c_{\lambda\mu} \dot{\eta}_\lambda \dot{\eta}_\mu + (1/2) (L_{a\lambda\mu} - L_b^{-\lambda\gamma} M_{\gamma\mu}) I_{a\lambda} I_{a\mu} + M_{\lambda\mu} L_b^{-\mu\gamma} n_\gamma I_{a\lambda} - (1/2) L_b^{-\lambda\mu} n_\lambda n_\mu \quad (4.4)$$

Применяя классический способ вывода уравнений динамики, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \dot{\eta}_\lambda} &= c_{\lambda\mu} \dot{\eta}_\mu, & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{\eta}_\lambda} \right) &= c_{\lambda\mu} \ddot{\eta}_\mu + \frac{\partial c_{\lambda\mu}}{\partial \eta_\nu} \dot{\eta}_\mu \dot{\eta}_\nu \\ \frac{\partial R}{\partial \eta_\lambda} &= \frac{1}{2} \frac{\partial c_{\mu\nu}}{\partial \eta_\lambda} \dot{\eta}_\mu \dot{\eta}_\nu + \frac{\partial M_{\mu\nu}}{\partial \eta_\lambda} L_b^{-\mu\gamma} n_\gamma I_{a\nu} - L_b^{-\nu\gamma} M_{\gamma\mu} \frac{\partial M_{\nu\beta}}{\partial \eta_\lambda} I_{a\beta} I_{a\mu} \\ & \quad \partial R / \partial I_{a\lambda} = (L_{a\lambda\mu} - L_b^{-\nu\gamma} M_{\gamma\mu} M_{\lambda\nu}) I_{a\mu} + M_{\lambda\mu} L_b^{-\mu\gamma} n_\gamma \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial I_{a\lambda}} \right) &= (L_{a\lambda\mu} - L_b^{-\nu\gamma} M_{\gamma\mu} M_{\lambda\nu}) \dot{I}_{a\mu} - 2 L_b^{-\nu\gamma} M_{\gamma\mu} \frac{\partial M_{\nu\lambda}}{\partial \eta_\beta} \dot{\eta}_\beta \dot{I}_{a\mu} + L_b^{-\mu\gamma} n_\gamma \frac{\partial M_{\mu\lambda}}{\partial \eta_\beta} \dot{\eta}_\beta \dot{I}_{a\mu} \end{aligned}$$

Искомая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} (L_{a\lambda\mu} - L_b^{v\gamma} M_{\gamma\mu} M_{v\lambda}) I_{a\mu}^{\cdot} + L_b^{v\gamma} (n_{\gamma} - 2M_{\gamma\mu} I_{a\mu}^{\cdot}) (\partial M_{v\lambda} / \partial \eta_{\beta}) \eta_{\beta}^{\cdot} = N_{\lambda} \\ c_{\lambda\mu} \eta_{\mu}^{\cdot\cdot} + C_{\lambda,\mu\nu} \eta_{\mu}^{\cdot} \eta_{\nu}^{\cdot} - L_b^{v\gamma} (n_{\gamma} - M_{\gamma\mu} I_{a\mu}^{\cdot}) (\partial M_{v\beta} / \partial \eta_{\lambda}) I_{a\beta} = M_{\lambda} \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $C_{\lambda,\mu\nu} = (1/2) ((\partial c_{\lambda\mu} / \partial \eta_{\nu}) + (\partial c_{\lambda\nu} / \partial \eta_{\mu}) - (\partial c_{\mu\nu} / \partial \eta_{\lambda}))$  — символ Кристоффеля первого рода метрического тензора  $c_{\lambda\mu}$ ,  $N_{\lambda}$ ,  $M_{\lambda}$  — обобщенные силы:  $N_{\lambda} = -R_{\lambda\mu} I_{a\mu}^{\cdot} + U_{\lambda}$ ,  $M_{\lambda} = -B_{\lambda\mu} \eta_{\mu}^{\cdot} - \partial \Pi(\eta) / \partial \eta_{\lambda}$ ,  $R_{\lambda\mu}$ ,  $B_{\lambda\mu}$  — тензоры, определяющие диссипацию электромагнитной и механической энергии системы,  $\Pi(\eta)$  — потенциальная энергия манипулятора,  $U_{\lambda} \in R^s$  — управление, стесненное ограничением  $U_{\lambda} \in S$ , где  $S \in R^s$  — ограниченное замкнутое множество, задаваемое из ресурсов управления.

Полученная система нелинейных дифференциальных уравнений (1.5) описывает поведение фазового вектора  $[\eta_{\lambda}, \eta_{\lambda}^{\cdot} I_{a\lambda}, I_{a\lambda}^{\cdot}] T$  системы с течением времени  $t \in [t_0, \tau]$ , где  $t_0, \tau$  — фиксированные моменты времени. При данных допустимых функциях  $\dot{U}_{\lambda}$  и начальных условиях  $[\eta_{\lambda}(t_0), \eta_{\lambda}^{\cdot}(t_0), I_{a\lambda}(t_0), I_{a\lambda}^{\cdot}(t_0)] T = [\eta_{\lambda 0}, \eta_{\lambda 0}^{\cdot}, I_{a\lambda 0}, I_{a\lambda 0}^{\cdot}]$  необходимо синтезировать управление, обеспечивающее заданную динамическую точность движения системы в точку программной траектории  $(\eta_{\lambda}^{\circ}, \eta_{\lambda}^{\circ\cdot}, I_{a\lambda}^{\circ}, I_{a\lambda}^{\circ\cdot})$ .

2. Введем возмущения  $\Delta \eta_{\lambda}, \Delta \eta_{\lambda}^{\cdot}, \Delta I_{a\lambda}, \Delta I_{a\lambda}^{\cdot}$  как разность между текущими и программными значениями координат фазового вектора:  $\Delta \eta_{\lambda} = \eta_{\lambda} - \eta_{\lambda}^{\circ}, \Delta \eta_{\lambda}^{\cdot} = \eta_{\lambda}^{\cdot} - \eta_{\lambda}^{\circ\cdot}, \Delta I_{a\lambda} = I_{a\lambda} - I_{a\lambda}^{\circ}, \Delta I_{a\lambda}^{\cdot} = I_{a\lambda}^{\cdot} - I_{a\lambda}^{\circ\cdot}$ .

Из этих равенств следует, что динамика возмущенного движения описывается полученной системой нелинейных дифференциальных уравнений (1.5). Уравнение (1.4) и условие стационарности движения в точке программной траектории  $\partial R / \partial I_{a\lambda} = (L_{a\lambda\mu} - L_b^{v\gamma} M_{\gamma\mu} M_{v\lambda}) I_{a\mu}^{\cdot} + L_b^{v\gamma} M_{\gamma\lambda} n_{\gamma} = m_{\lambda}$ , где  $m_{\lambda}$  — константа, дают следующие интегралы:

$$\begin{aligned} J_{\lambda} = 1/2 c_{\lambda\mu} \eta_{\lambda}^{\cdot} \eta_{\mu}^{\cdot} + 1/2 (L_{a\lambda\mu} - L_b^{v\gamma} M_{\gamma\mu} M_{v\lambda}) \Delta I_{a\mu} \Delta I_{a\lambda} + \Pi(\Delta \eta) \\ J_{\lambda} = (L_{a\lambda\mu} - L_b^{v\gamma} M_{\gamma\mu} M_{v\lambda}) I_{a\mu}^{\cdot} - (L_{a\lambda\mu} - L_b^{v\gamma} M_{\gamma\mu} M_{v\lambda}^{\circ}) I_{a\mu}^{\circ} + L_b^{v\gamma} n_{\gamma} (\partial M_{v\lambda} / \partial \eta_{\beta}) \Delta \eta_{\beta} \end{aligned}$$

где  $M_{\gamma\mu}^{\circ}$  — значение  $M_{\gamma\mu}$  в точке программной траектории.

Построим функцию  $V$ , положительно-определенную в фазовом пространстве переменных  $\Delta \eta_{\lambda}, \Delta \eta_{\lambda}^{\circ}, \Delta I_{a\lambda}$  и непрерывную в некоторой области, включающей в себя начало координат (исследуемую точку программной траектории), как связку интегралов возмущенного движения системы  $V = J + \rho J_{\lambda} J_{\lambda}$ , где  $\rho$  — положительная константа. Найдём полную производную  $V^{\cdot}$  в силу системы (1.5). Проведя преобразования, получим

$$\begin{aligned} V^{\cdot} = -B_{\lambda\mu} \eta_{\lambda}^{\cdot} \eta_{\mu}^{\cdot} + \rho (J_{\lambda} + \delta_{\lambda}^{\mu} (\Delta I_{a\mu} / \rho)) (U_{\lambda} - R_{\lambda\mu} I_{a\mu}^{\cdot}) - \\ - (\partial \Pi(\eta^{\circ}) / \partial \eta_{\mu}) \eta_{\mu}^{\cdot} + L_b^{v\gamma} n_{\gamma} (\partial M_{v\mu} / \partial \eta_{\beta}) \eta_{\beta}^{\cdot} I_{a\mu}^{\circ} - L_b^{v\gamma} M_{\gamma\lambda} (\partial M_{v\mu} / \partial \eta_{\beta}) \eta_{\beta}^{\cdot} I_{a\lambda}^{\circ} I_{a\mu}^{\circ} \end{aligned}$$

Так как при стационарном движении позиционные координаты сохраняют постоянные значения, в точке программной траектории справедливо выражение

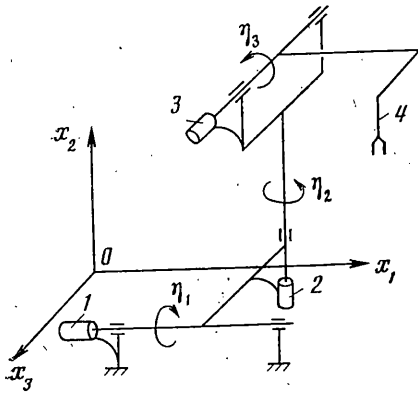
$$L_b^{v\gamma} n_{\gamma} \frac{\partial M_{v\mu}}{\partial \eta_{\beta}} I_{a\mu}^{\circ} - L_b^{v\gamma} M_{\gamma\lambda} \frac{\partial M_{v\mu}}{\partial \eta_{\beta}} I_{a\lambda}^{\circ} I_{a\mu}^{\circ} - \frac{\partial \Pi(\eta^{\circ})}{\partial \eta_{\beta}} = 0 \quad (2.1)$$

и  $V^{\cdot}$  определяется по формуле  $V^{\cdot} = -B_{\lambda\mu} \eta_{\lambda}^{\cdot} \eta_{\mu}^{\cdot} + (U_{\lambda} - R_{\lambda\mu} I_{a\mu}^{\cdot}) (\rho J_{\lambda} + \delta_{\lambda}^{\mu} \Delta I_{a\mu})$ . Выбрав управление в виде  $U_{\lambda} = R_{\lambda\mu} I_{a\mu}^{\cdot} - \kappa (J_{\lambda} + \delta_{\lambda}^{\mu} \Delta I_{a\mu} / \rho)$ , где  $\kappa$  — положительная константа, имеем окончательно

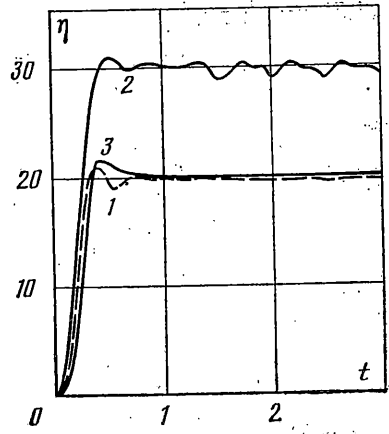
$$V^{\cdot} = -B_{\lambda\mu} \eta_{\lambda}^{\cdot} \eta_{\mu}^{\cdot} - \rho \kappa (J_{\lambda} + \delta_{\lambda}^{\mu} \Delta I_{a\mu} / \rho) (J_{\lambda} + \delta_{\lambda}^{\mu} \Delta I_{a\mu} / \rho)$$

Полученная производная функции Ляпунова  $V^{\cdot}$  отрицательна, и, следовательно, в силу известной теоремы Ляпунова [4] положение равновесия системы (1.5) устойчиво асимптотически.

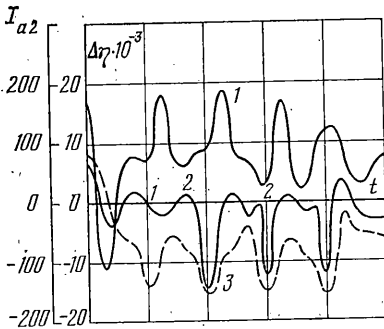
Пусть влияние нелинейного момента типа «сухое трение» и внешних возмущений (удары) достаточно велико, т. е. суммарный момент сил сопротивления движению манипулятора определяется выражением  $M_{\lambda} = -B_{\lambda\mu} \eta_{\mu}^{\cdot} - \partial \Pi(\eta) / \partial \eta_{\lambda} - T_{\lambda}(\eta^{\cdot}) - F_{\lambda}(t)$ , где  $T_{\lambda}(\eta^{\cdot})$  — моменты трения в осях манипулятора,  $F_{\lambda}(t)$  — внешние возмущения. Проведя синтез закона управления по аналогии с [5], можно показать, что управлением, обеспе-



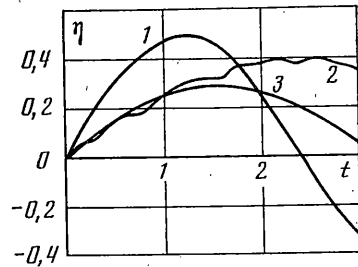
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

чивающим требуемые динамические свойства объекта, будет управление вида

$$U_{\lambda}^{\circ} = U_{\lambda} + U_{\lambda}^* \quad (2.2)$$

где  $U_{\lambda}^* = -k_{\lambda\mu} |\eta_{\mu}| \text{sign} \{J_{\lambda} + \delta_{\lambda}^{\mu} \Delta I_{a\mu} / \rho\}$  — управление сигнальной адаптации,  $k_{\lambda\mu}$  — положительная константа, выбираемая из ресурса управления, величин моментов трения и возмущений. Программные значения токов  $I_{a\lambda}^{\circ}$  должны быть вычислены из условия стационарности режима (2.4). Они определяют развиваемые приводами моменты сил, компенсирующих действие на манипулятор потенциальных сил в точке программной траектории.

3. Приведем результат численного моделирования, выполненного с целью анализа полученной схемы управления и ее чувствительности к действию возмущений на примере электромеханического робота минимальной конфигурации с кинематической схемой, изображенной на фиг. 1, со следующими длинами (м) и массами звеньев (кг):  $l_1 = 0,125$ ,  $l_2 = 0,375$ ,  $l_3 = 1$ ,  $m_1 = m_2 = 400$ ,  $m_3 = 1020$ . В качестве приводов для всех степеней подвижности приняты электродвигатели постоянного тока (фиг. 1, позиции 1, 2, 3) мощностью 8 кВт.

Математическая модель динамики робота построена в форме уравнений (1.5). При формировании метрического тензора манипулятора  $C_{\lambda\mu}$ , символа Кристоффеля  $C_{\lambda,\mu\nu}$  и моментов потенциальных сил  $\partial\Pi(\eta)/\partial\eta_{\lambda}$  ( $\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3$ ) использована методика, пригодная для манипуляторов произвольной конфигурации с любым числом степеней подвижности, изложенная в [2]. Расчеты проведены с учетом того, что при практической реализации алгоритма управления коэффициенты взаимоиנדукции обмоток якоря и возбуждения пренебрежимо малы, а тензоры  $L_{a\lambda\mu}$ ,  $L_{b\lambda\mu}$ ,  $R_{a\lambda\mu}$ ,  $R_{b\lambda\mu}$ ,  $B_{\lambda\mu}$  ( $\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3$ ) диагональны. В соответствии с этим система

(1.5) имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda=1: \quad & L_{a11}I_{a1} + I_{b1}(\partial M_{11}/\partial \eta_1)\eta_1 = -R_{a11}I_{a1} + U_1^\circ \\ c_{1\mu}\eta_\mu + C_{1,\nu\nu}\eta_\mu \eta_\nu = & I_{b1}(\partial M_{11}/\partial \eta_1)I_{a1} - \partial \Pi(\eta)/\partial \eta_1 - B_{11}\eta_1 - T_{11} \operatorname{sign} \eta_1 \\ \lambda=2: \quad & L_{a22}I_{a2} + I_{b2}(\partial M_{22}/\partial \eta_2)\eta_2 = -R_{a22}I_{a2} + U_2^\circ \\ c_{2\mu}\eta_\mu + C_{2,\nu\nu}\eta_\mu \eta_\nu = & I_{b2}(\partial M_{22}/\partial \eta_2)I_{a2} - \partial \Pi(\eta)/\partial \eta_2 - B_{22}\eta_2 - T_{22} \operatorname{sign} \eta_2 \\ \lambda=3: \quad & L_{a33}I_{a3} + I_{b3}(\partial M_{33}/\partial \eta_3)\eta_3 = -R_{a33}I_{a3} + U_3^\circ \\ c_{3\mu}\eta_\mu + C_{3,\nu\nu}\eta_\mu \eta_\nu = & I_{b3}(\partial M_{33}/\partial \eta_3)I_{a3} - \partial \Pi(\eta)/\partial \eta_3 - B_{33}\eta_3 - T_{33} \operatorname{sign} \eta_3 \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее, принято условие о суммировании по двум повторяющимся индексам [2]. Элементы  $L_{11}=L_{22}=L_{33}=0,0062$  Гн,  $R_{a11}=R_{a22}=R_{a33}=0,202$  Ом; коэффициенты электромеханической связи  $\partial M_{11}/\partial \eta_1 = \partial M_{22}/\partial \eta_2 = \partial M_{33}/\partial \eta_3 = 88,8$  (Ом·с) вычислены с учетом передаточного числа редукторов ( $i=94$ ); коэффициенты вязкого трения (Нм·с)  $B_{11}, B_{22}, B_{33}$  равны соответственно 6370, 5294, 3089; коэффициенты  $T_{11}=T_{22}=T_{33}=10^4$  Нм определяют моменты сухого трения по степеням подвижности, которые при  $\eta_\lambda = 0$  ( $\lambda=1, 2, 3$ ) могут принимать значения в пределах интервала  $[-10^4, 10^4]$  Нм.

Управления  $U_\lambda^\circ$  ( $\lambda=1, 2, 3$ ), на величины которых наложено амплитудное ограничение  $|U_\lambda| \leq 120$  В, построены в соответствии с формулой (2.2) и имеют вид

$$\begin{aligned} U_1^\circ = & R_{a11}I_{a1} - \kappa [(L_{a11} + \rho^{-1})\Delta I_{a1} + (\partial M_{11}/\partial \eta_1)I_{b1}\Delta \eta_1] - \\ & - k_{11}|\eta_1| \operatorname{sign} \{ (L_{a11} + \rho^{-1})\Delta I_{a1} + (\partial M_{11}/\partial \eta_1)I_{b1}\Delta \eta_1 \} \\ U_2^\circ = & R_{a22}I_{a2} - \kappa [(L_{a22} + \rho^{-1})\Delta I_{a2} + (\partial M_{22}/\partial \eta_2)I_{b2}\Delta \eta_2] - \\ & - k_{22}|\eta_2| \operatorname{sign} \{ (L_{a22} + \rho^{-1})\Delta I_{a2} + (\partial M_{22}/\partial \eta_2)I_{b2}\Delta \eta_2 \} \\ U_3^\circ = & R_{a33}I_{a3} - \kappa [(L_{a33} + \rho^{-1})\Delta I_{a3} + (\partial M_{33}/\partial \eta_3)I_{b3}\Delta \eta_3] - \\ & - k_{33}|\eta_3| \operatorname{sign} \{ (L_{a33} + \rho^{-1})\Delta I_{a3} + (\partial M_{33}/\partial \eta_3)I_{b3}\Delta \eta_3 \} \end{aligned}$$

Рассматривались движения манипулятора робота, обеспечивающие перемещение рабочего органа (фиг. 1, позиция 4) в точку программной траектории со значениями программных углов (рад)  $\eta_1^\circ = \eta_3^\circ = 0,2$ ,  $\eta_2^\circ = 0,3$  при наличии нелинейности типа «сухое трение», «ограничение» (на управляющее напряжение) и действии на второе звено манипулятора момента сопротивления  $F_2(t)$ , имитирующего удары. Кривые 1–3 (величины  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  соответственно) представлены на фиг. 2. Величина и длительность случайного воздействия  $F_2(t)$  выбирались из интервалов  $[3 \cdot 10^4, 8 \cdot 10^4]$  Нм,  $[0,05, 0,1]$  с соответственно. Фиг. 3 иллюстрирует реакцию тока якоря электродвигателя второго звена ( $A$ , кривая 1) на случайные воздействия и процессы изменения динамической ошибки по второй обобщенной координате при управлении с сигнальной подстройкой ( $\Delta \eta_2^*(t)$ , кривая 2) и без нее  $\Delta \eta_2(t)$ ; кривая 3). Как видно из графиков, за счет введения этой добавки удается уменьшить величину динамической ошибки.

Работоспособность алгоритма управления (2.2) проверялась при моделировании движения манипулятора по программной траектории при наличии названных нелинейностей и внешних возмущений. Кривые 1–3 (величины  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  соответственно) на фиг. 4 подтверждают работоспособность алгоритма: при движении по программной траектории  $\eta_1^\circ(t) = 0,5 \sin 1,3t$ ,  $\eta_2^\circ(t) = 0,4 \sin 0,7t$ ,  $\eta_3^\circ(t) = 0,3 \sin t$ . Разность между текущими и программными значениями по первой и третьей обобщенным координатам и по второй в промежутке времени между ударами не превышает 0,009.

Выбор коэффициентов  $\rho, \kappa$  и  $k_{\lambda\mu}$  ( $\lambda, \mu=1, 2, 3$ ) проводился в процессе моделирования с целью улучшения качества переходных процессов, в частности уменьшения их колебательности и увеличения скорости убывания динамической ошибки. Расчеты проведены при  $\rho=200$  1/Гн,  $\kappa=50$  В/Вб,  $k_{11}=80$  В·с,  $k_{22}=k_{33}=40$  В·с.

Изложенные теоретические результаты позволяют исследовать динамику полной математической модели робота-манипулятора и построить законы управления, реализующие программное движение с требуемой

точностью. Построение модели динамики в тензорной форме записи позволяет избежать технические трудности, обычно возникающие при непосредственном применении прямого метода Ляпунова к исследованию многосвязных систем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука. 1978. 296 с.
2. Корнев Г. В. Целенаправленная механика управляемых манипуляторов. М.: Наука. 1979. 447 с.
3. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука. 1976. 319 с.
4. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М.: Наука. 1970. 240 с.
5. Петров Б. Н., Рутковский В. Ю., Земляков С. Д. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами. М.: Наука. 1980. 243 с.

Челябинск

Поступила в редакцию  
23.I.1986