

УДК 531.38

О КАЧЕНИИ ДИСКА ПО АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

ФЕДОРОВ Ю. Н.

Рассматривается классическая задача о качении без скольжения по горизонтальной плоскости диска с острым краем и осесимметричным распределением масс. Ранее в [1–5] различными методами были получены условия устойчивости стационарных качений и вертикальных вращений диска. В [1], кроме того, был сделан вывод о возможном существовании асимптотического движения, т. е. стремления к неустойчивому стационарному качению.

В публикуемой статье на основе анализа полученных точных общих решений динамических уравнений проведено качественное исследование всех возможных типов движения диска, соответствующих различным начальным условиям. В частности, получены необходимые и достаточные условия для падения диска на горизонтальную плоскость, а также для упомянутого асимптотического движения.

1. Будем рассматривать качение без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости диска с острым краем и осесимметричным распределением масс. Введем систему координат $Oxyz$ с началом в точке O касания края диска и горизонтальной плоскости. Ось x лежит на пересечении горизонтальной плоскости и плоскости диска, ось z перпендикулярна последней, а ось y дополняет систему до правой ортогональной тройки. Проекция угловой скорости диска на оси x, y, z обозначим соответственно p, q, r . Кинематические соотношения Эйлера имеют вид

$$p = \dot{\theta}, \quad q = \dot{\psi} \sin \theta, \quad r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta = \dot{\varphi} + q \operatorname{ctg} \theta \quad (1.1)$$

где θ — угол между осью y и горизонтальной плоскостью, ψ — угол между осью x и некоторой фиксированной горизонтальной прямой, φ — угол чистого вращения.

Запишем, согласно [6], динамические уравнения для рассматриваемой задачи

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} &= -mag \cos \theta + q(Aq \operatorname{ctg} \theta - C_1 r) \\ Aq \dot{q} &= p(Cr - Aq \operatorname{ctg} \theta), \quad A_1 = A + ma^2 \\ C_1 \dot{r} &= ma^2 pq, \quad C_1 = C + ma^2, \quad \theta \in [0; \pi] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь m — масса диска, a — его радиус, g — ускорение свободного падения, C и A — моменты инерции диска соответственно относительно его оси симметрии и его диаметра.

Углы ψ и φ можно определить из (1.1) после интегрирования системы (1.2). Последняя имеет интеграл энергии

$$A_1 p^2 + Aq^2 + C_1 r^2 + 2mag \sin \theta = 2h \quad (1.3)$$

В предположении, что на некотором интервале времени $p \neq 0$, разделим на p второе и третье уравнения в (1.2). В результате получим линейную неавтономную систему для q и r с независимой переменной θ :

$$A \frac{dq}{d\theta} = Cr - Aq \operatorname{ctg} \theta, \quad C_1 \frac{dr}{d\theta} = ma^2 q \quad (1.4)$$

Последняя эквивалентна линейному уравнению

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{dr}{d\theta} - Mr = 0, \quad M = \frac{ma^2 C}{AC_1} > 0 \quad (1.5)$$

Замена, указанная в [7], $x = {}^{1/2} - {}^{1/2} \cos \theta$, $y = r$, $y' = dy/dx$, $y'' = d^2 y/dx^2$ приводит к гипергеометрическому уравнению

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0 \\ (\gamma = 1, \alpha + \beta = 1, \alpha\beta = M) \quad (1.6)$$

Как видно из определения константы M в (1.5), для плоского диска и тел вращения, близких к нему по распределению масс, справедливо неравенство $M > {}^{1/4}$, поэтому α и β являются комплексно-сопряженными величинами, а именно $\alpha = {}^{1/2} + i\Delta$, $\beta = {}^{1/2} - i\Delta$, $\Delta = (M - {}^{1/4})^{1/2}$.

Общее решение (1.6) выражается линейной комбинацией гипергеометрических рядов $y(x) = \lambda F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \mu F(\alpha, \beta, \gamma, 1-x)$, $\lambda, \mu = \text{const.}$ В частности, при $M = {}^{1/4}$ имеем $\alpha = {}^{1/2}$, $\beta = {}^{1/2}$ и $y(x) = (2/\pi)(\lambda K(\sqrt{x}) + \mu K(\sqrt{1-x}))$, где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Установим некоторые необходимые в дальнейшем свойства функции $F({}^{1/2} + i\Delta, {}^{1/2} - i\Delta, 1, x)$. Для этого, воспользовавшись разложением

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} x^n, \quad (a, n) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

где (a, n) — символ Ашеля, и учитывая следующее тождество [8]:

$$\frac{\Gamma(a+n+ib)\Gamma(a+n-ib)}{\Gamma(a+ib)\Gamma(a-ib)} = \left[\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \right]^2 P_n(b)$$

$$P_n(b) = \prod_{m=1}^n \left[1 + \frac{4b^2}{(2m-1)^2} \right]$$

получим

$$F({}^{1/2} - i\Delta, {}^{1/2} + i\Delta, 1, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{({}^{1/2}, n)}{(1, n)} \right]^2 P_n(\Delta) x^n \quad (1.7)$$

Дробь в данном ряду есть коэффициент n -го члена разложения полного эллиптического интеграла первого рода в гипергеометрический ряд, а величина $P_n(\Delta)$ — «искажение» данного члена.

Вследствие того что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{1}{(2m-1)^2} < \infty$$

будет справедливо неравенство $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\Delta) = P < \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, ряд (1.7), как и решение (1.6), имеет ту же область сходимости, что и разложение $K(k)$, а именно $[0, 1)$.

Будем далее обозначать $F({}^{1/2} + i\Delta, {}^{1/2} - i\Delta, 1, x(\theta))$ как $R_1(\theta)$, $R_1(\pi - \theta)$ — как $R_2(\theta)$. Штрих символизирует производную по θ .

Поскольку любая производная ряда (1.7) по x положительна, то заключаем, что

$$R_1'(\theta) = \frac{1}{2} \sin \theta \frac{dF(x)}{dx} > 0 \quad (\theta \in (0; \pi))$$

$$R_1''(\theta) = \frac{1}{2} \left(\cos \theta \frac{dF(x)}{dx} + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \frac{d^2 F(x)}{dx^2} \right) > 0$$

$$(\theta \in [0; \pi/2])$$

Кроме того, из (1.5) следует $R_1''(\theta) = MR_1(\theta) - \text{ctg } \theta R_1'(\theta) > 0$ при $\theta \in [\pi/2; \pi]$. Перейдем теперь к изучению свойств решения системы (1.4). Оно имеет вид

$$r(\theta) = \lambda R_1(\theta) + \mu R_2(\theta) \quad (1.8)$$

$$q(\theta) = \delta(\lambda R_1'(\theta) + \mu R_2'(\theta)), \quad \delta = C_1/ma^2$$

$$\lambda = \frac{\delta r_0 R_2'(\theta_0) - q_0 R_2(\theta_0)}{D}, \quad \mu = \frac{R_1(\theta_0) q_0 - \delta r_0 R_1'(\theta_0)}{D} \quad (1.9)$$

$$D = \delta[R_1(\theta_0)R_2'(\theta_0) - R_2(\theta_0)R_1'(\theta_0)] < 0$$

Здесь и далее нижний нулевой индекс соответствует начальным значениям переменных.

Из (1.8) следует, что качественный вид функций $r(\theta)$ и $q(\theta)$ зависит лишь от отношения $\varepsilon = \lambda/\mu$. При этом будем предполагать, что $\mu > 0$, так как всегда можно выбрать в диске соответствующие направления осей правой системы *Oxyz*. Учитывая имеющиеся свойства $R_1(\theta)$ (свойства $R_2(\theta)$ отличаются тем, что нечетные производные имеют обратный знак), найдем, что при условии $\varepsilon \geq 0$ всюду на $[0; \pi]$ функция $r(\theta)$ — положительная, вогнутая, имеет единственный минимум при $\theta = \theta_*$, причем $\theta_* > \pi/2$, если $0 \leq \varepsilon < 1$, $\theta_* < \pi/2$, если $\varepsilon > 1$. Для случая $\varepsilon < 0$ всюду на $[0; \pi]$ имеем $r'(\theta) < 0$, причем $\theta_{**} > \pi/2$, если $-1 < \varepsilon < 0$, и $\theta_{**} < \pi/2$, если $\varepsilon < -1$, где θ_{**} — корень уравнения $r(\theta) = 0$. Функция $q(\theta)$ имеет свойства производной $r(\theta)$, умноженной на δ . Отметим, что при условии $\varepsilon = 0$ функции $r(\theta)$ и $q(\theta)$ в $\theta = \pi$ принимают конечные значения, что является необходимым условием падения диска на горизонтальную плоскость. Аналогично, для достижения переменной θ значения, равного нулю, необходимо в (1.8) положить $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$ [9].

2. Полученные свойства решений (1.4) используем для изучения на отрезке $[0; \pi]$ пределов, в которых может изменяться угол θ при различных наборах (p_0, q_0, r_0) или (p_0, λ, μ) . Для этого, полагая сначала $p_0 = 0$, перепишем интеграл (1.3) в виде

$$A_1 p^2 + U(\theta) = 0, \quad U(\theta, \theta_0, r_0, q_0) = \\ = -C_1(r^2 - r_0^2) + A(q^2 - q_0^2) + 2mag(\sin \theta - \sin \theta_0) \quad (2.1)$$

Таким образом, $U(\theta)$ — всегда гладкая функция на $(0; \pi)$. Пусть $D \subset [0; \pi]$ — область, возможно, состоящая из нескольких непересекающихся отрезков, в которой выполнено неравенство $U(\theta) \leq 0$. Угол θ может принимать значения только в одном таком отрезке, содержащем θ_0 . С учетом первого уравнения в (1.2) из (2.1) следует, что $\theta^* = (-U(\theta)/A_1)^{1/2}$, $p^* = -1/2 U'(\theta)/A_1$.

Как известно, если корни θ_0, θ_1 уравнения $U(\theta) = 0$, принадлежащие одному отрезку области D , простые, то угол θ совершает либрацию между θ_0 и θ_1 , а функции $\theta(t), p(t), q(t), r(t)$ — периодические. Кратный корень θ_0 соответствует стационарным качениям диска, при которых $\theta = \theta_0, p = 0, q = q_0, r = r_0$. Для устойчивости таких качений необходимо и достаточно, чтобы первая ненулевая производная функции $U(\theta)$ при $\theta = \theta_0$ была четной и положительной. В частности, достаточно $U''(\theta_0) = -2A_1 p^{**}/p > 0$.

Продифференцировав первое уравнение в (1.2), перепишем последнее неравенство в виде [4, 2]

$$L = A_1 p^{**}/p = mag \sin \theta_0 + (2C + C_1) g_0 r_0 \text{ctg } \theta_0 - \\ - C_1 C r_0^2/A - q_0^2 (ma^2 + 2A \text{ctg}^2 \theta_0 + A/\sin \theta_0) < 0 \quad (2.2)$$

Из (1.2), при условии $p^* = 0$, следует, что в случае стационарного качения должно выполняться соотношение

$$r_0 = (A/C_1) \text{ctg } \theta_0 q_0 - mag \cos \theta_0 / (C_1 q_0) \quad (2.3)$$

Подставив (2.3) в (2.2), получим окончательное условие устойчивости стационарных качений

$$L = mag(\sin \theta_0 - \cos \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_0) - \frac{C}{C_1 A q_0^2} (mag \cos \theta_0)^2 - \\ - q_0^2 [A(1/\sin^2 \theta_0 + (1 - C/C_1) \operatorname{ctg}^2 \theta_0) + ma^2] < 0$$

Отсюда, в частности, следует, что при $\theta_0 \in (0; \pi/4]$ любое такое качение устойчиво.

Если θ_0 — простой корень уравнения $U(\theta_0) = 0$, а θ_1 — кратный, то движение диска асимптотически стремится к неустойчивому стационарному качению, соответствующему θ_1 . Рассмотрим такие движения подробнее. Для этого представим $U(\theta)$ в виде

$$U(\theta) = f(\theta) - E(\theta), \quad E(\theta) = C_1(r_0^2 - r^2(\theta)) + A(q_0^2 - q^2(\theta)) \\ f(\theta) = 2mag(\sin \theta - \sin \theta_0) \quad (2.4)$$

Здесь в реальном движении $E(\theta) \geq f(\theta)$ и при $\theta = \theta_0$ имеем точное равенство. Укажем некоторые важные свойства функции $E(\theta, \theta_0, \lambda, \mu)$ (все необходимые доказательства даны в п. 5). Наряду с λ, μ будем пользоваться параметрами $\varepsilon = \lambda/\mu, \mu$. Тогда при фиксированном ε корни уравнения $E(\theta) = 0$ неизменны и имеет место равенство $E(\theta, \varepsilon, \mu) = \mu^2 E(\theta, \varepsilon, 1)$, причем если $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$, то всегда существуют ровно два простых корня (первым в силу (2.4) является θ_0 , а второй обозначим θ_2) и в одном исключительном случае (когда $q_0 = 0$) один кратный корень θ_0 . При том же условии находим, что $E(\theta = 0) = -\infty, E(\theta = \pi) = -\infty$.

Независимо от значения ε уравнение $E'(\theta) = 0$ имеет единственный простой корень θ_e (максимум функции $E(\theta)$), причем $\theta_e < \pi/2$ при $|\varepsilon| > 1, \theta_e > \pi/2$ при $|\varepsilon| < 1, \theta_e = \pi$ при $\varepsilon = 0$ и $\theta_e = 0$ при $\mu = 0, \lambda \neq 0$. В случае $|\varepsilon| = 1$ имеется симметрия $E(\theta) = E(\pi - \theta)$ и $\theta_2 = \pi - \theta_0$. Кроме того, при $|\varepsilon| > 1$ всегда $\theta_2 < \pi - \theta_0$ и, наоборот, $\theta_2 > \pi - \theta_0$, если $|\varepsilon| < 1$.

Пусть $W1$ представляет область $[0; \pi/2] \cap [0; \theta_e]$, а $W2$ — область $[\pi/2; \pi] \cap [\theta_e; \pi]$. Тогда в $W1 \cup W2$ всегда выполняется неравенство $E''(\theta) < 0$, а в $W1$ и $W2$ справедливо соответственно $E'''(\theta) > 0$ и $E'''(\theta) < 0$.

С учетом приведенных свойств функции $E(\theta, \lambda, \mu)$ можно сделать следующие выводы.

1. Необходимое условие $\mu = 0$ для падения диска на горизонтальную плоскость является также и достаточным, поскольку при этом всюду в области $[0; \theta_0]$ будет $E(\theta) > f(\theta)$. На фиг. 1 кривые 1 и 2 соответствуют функциям $E(\theta)$ и $f(\theta)$ при $\mu = 0$.

2. Предположим, что $|\varepsilon| < 1$ и для некоторого $\mu_* > 0$ удовлетворяются условия $U'(\theta_0) = 0, U''(\theta_0) > 0$, определяющие устойчивое стационарное качение. Тогда при неизменном ε найдется такое $\mu_{**} > \mu_*$, что

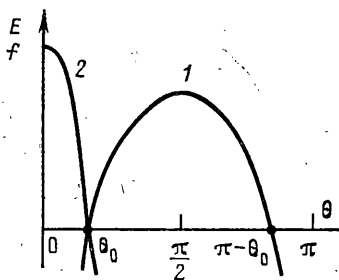
$$E(\theta_1) = f(\theta_1), \quad E'(\theta_1) = f'(\theta_1) \\ E(\theta) > f(\theta) \quad \text{при } \theta \in (\theta_0; \theta_1) \quad (2.5)$$

и движение диска будет асимптотическим. Такая ситуация проиллюстрирована на фиг. 2, где кривые 1, 2, 3 представляют соответственно графики $f(\theta), E(\theta, \mu_*)$ и $E(\theta, \mu_{**})$.

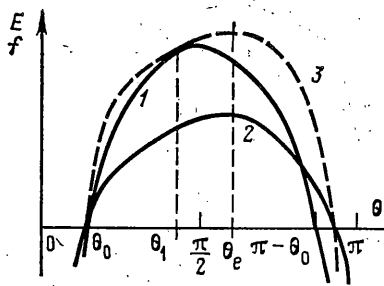
При дальнейшем возрастании μ значение θ_1 изменится скачком и будет принадлежать области $(\pi - \theta_0, \pi)$, т. е. при переходе параметра μ через μ_{**} произойдет бифуркация корней уравнения $U(\theta) = 0$.

На фиг. 3 изображены графики функций $f'(\theta)$ и $E'(\theta, \mu_{**})$ (кривые 1 и 2). Отметим, что для выполнения условий (2.5) необходимо, чтобы эти графики пересекались в области $[\theta_0, \theta_e]$ как минимум дважды, что и имеет место.

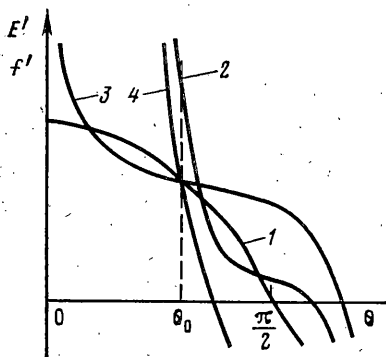
Обратимся теперь к случаю неустойчивого стационарного качения, когда $U'(\theta_0) = 0, U''(\theta_0) < 0$ (кривая 3 на фиг. 3). Здесь по-прежнему $|\varepsilon| < 1$. Будем варьировать значение μ , оставляя неизменным ε . Тогда при любом μ в области $[\theta_0; \theta_e]$ или $[0; \theta_0]$ графики функций $f'(\theta)$ и $E'(\theta)$ пересекаются не более одного раза, поскольку, как было показано ранее, в $W1$ функция $E'(\theta)$ всегда вогнутая, а $f'(\theta)$ — выпуклая, в $W2$ соответственно



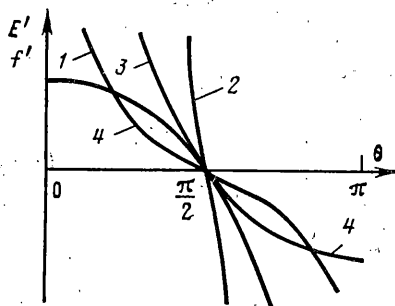
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

наоборот. Поэтому условия (2.5) не могут удовлетворяться и асимптотическое движение невозможно.

Кривая 4 на фиг. 3 соответствует устойчивому стационарному качению при $|\varepsilon| > 1$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что и здесь при произвольном изменении μ нельзя удовлетворить условиям (2.5). Кроме того, поскольку $\theta_0 < \pi/2$ и $E'(\theta_0) = f'(\theta_0)$, то при любом $|\varepsilon| > 1$ верно $E''(\theta_0) < f''(\theta_0)$ и стационарное качение устойчиво.

Из свойств $f'(\theta)$ и $E'(\theta)$ вытекает также, что в критическом случае $U''(\theta_0) = 0$ будет $f'''(\theta_0) < 0$, $E'''(\theta_0) > 0$ и имеет место неустойчивость.

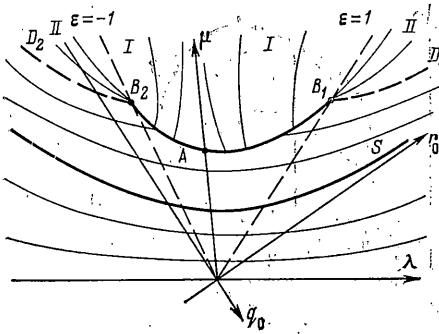
3. Для любого ε может существовать не более одного значения $\mu_{**}(\varepsilon)$, задающего асимптотическое движение, так как в противном случае в одной из областей $W1, W2$ графики $E'(\theta)$ и $f'(\theta)$ пересекались бы как минимум трижды, что невозможно в силу указанных свойств $E'(\theta)$.

4. Специальная ситуация, когда $\varepsilon = 1$ и $\theta_0 = \pi/2$, представлена на фиг. 4. Здесь $q(t) = q_0 = 0$ и движение диска есть вертикальное качение по прямой. Графики 1 и 2 для $E'(\theta)$ соответствуют случаям неустойчивого и устойчивого качения. Кривая 4 есть график $f'(\theta)$.

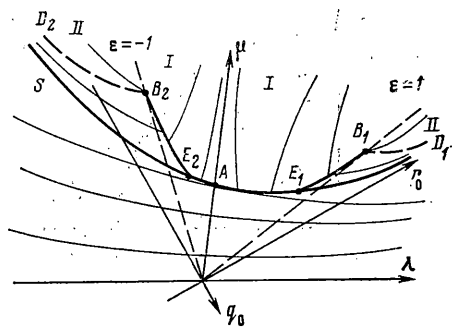
Критический случай $U''(\pi/2) = 0$, при котором, согласно (2.2), имеет место равенство $r_0^2 = \text{tag } A / (C_1 C)$, изображен кривой 3 на фиг. 4. Здесь $\theta_0 = \pi/2$ — точка перегиба функций $E'(\theta)$ и $f'(\theta)$, но $E^{(IV)}(\theta_0) < 0$, $f^{(IV)}(\theta_0) > 0$. Поэтому в силу (2.4) справедливо $U^{(IV)}(\theta_0) > 0$ и критический случай относится к устойчивым качениям. В [1, 2] подобный вывод был сделан на основе четырехкратного дифференцирования функции $U(\theta)$.

Если $\varepsilon = -1$, $\theta_0 = \pi/2$, то имеет место перманентное вращение диска вокруг вертикальной оси y , которое, как показывается аналогичным образом, также устойчиво в критическом случае.

3. Полученные результаты изобразим в виде бифуркационной диаграммы — пространства $Q = (\theta_0, q_0, r_0)$ с областями в нем, соответствующими различным типам движения диска. Будем рассматривать в Q двумерные сечения $\theta_0 = \text{const}$ с системами координат (q_0, r_0) и (λ, μ) , связанными между собой линейным невырожденным преобразованием (1.9), зависящим от θ_0 . Как было отмечено ранее, достаточно рассмотреть случаи $\mu > 0$, $0 < \theta_0 \leq \pi/2$.



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 5 представлена полуплоскость (λ, μ) для случая, когда все стационарные качения устойчивы (если, например, берется сечение $\theta_0 = \text{const} \leq \pi/4$). Здесь множество таких качений образует кривую S — одну из ветвей гиперболы, задаваемой уравнением (2.3). В областях, лежащих выше и ниже кривой S , имеем соответственно $p_0 > 0$ (плоскость диска поднимается) и $p_0 < 0$ (опускается). На самой оси λ ($\mu = 0$) начальные значения обуславливают падение диска на плоскость за конечное время (θ достигает нуля).

Перепишем условия (2.5) в развернутом виде

$$\begin{aligned} & \mu^2 [C_1((\varepsilon R_{10} + R_{20})^2 - (\varepsilon R_{11} + R_{21})^2) + A\delta^2((\varepsilon R_{10}' + R_{20}')^2 - \\ & \quad - (\varepsilon R_{11}' + R_{21}')^2)] = 2 \operatorname{mag}(\sin \theta_1 - \sin \theta_0) \quad (3.4) \\ & - \mu^2 (\varepsilon R_{11}' + R_{21}') [C_1(\varepsilon R_{11} + R_{21}) + A\delta^2(\varepsilon R_{11}'' + R_{21}'')] = \\ & = \operatorname{mag} \cos \theta_1, \quad R_{i0}^{(n)} = R_i^{(n)}(\theta_0), \quad R_{i0}^{(n)} = R_i^{(n)}(\theta_1) \\ & (i=1, 2) \quad E(\theta) > f(\theta) \quad \text{при} \quad \theta \in (\theta_0; \theta_1) \end{aligned}$$

Данные соотношения неявно задают в координатах (ε, μ) подмножество начальных значений, определяющих изученные выше асимптотические движения (кривая B_2AB_1 на фиг. 5).

Условия (3.1) можно представить явно в параметрической форме зависимостями ε и μ от θ_1 . Для этого, пользуясь первым уравнением (3.1), выразим μ^2 через ε и θ_1 , затем подставим во второе уравнение той же системы. Тогда для ε будем иметь квадратное уравнение с коэффициентами, зависящими от θ_0, θ_1 . В случае, когда его дискриминант положителен, найдем два решения $\varepsilon(\theta_0, \theta_1)$. Как можно показать, одно из них всегда будет удовлетворять неравенству в (3.1), а другое нет. Таким образом, исследуемое подмножество в полуплоскости (λ, μ) представляется связной параметризованной кривой без особых точек, которая, как следует из дополнительного анализа, является также гладкой.

Кроме того, при любом θ_0 кривая B_2AB_1 пересекает лучи $\varepsilon = \text{const}$ трансверсально, за исключением $\varepsilon = -1, \varepsilon = 1$; эта кривая всегда выпуклая и обращена своей выпуклостью к центру координатной системы (λ, μ) , граничные точки B_1 и B_2 соответствуют асимптотическому движению диска с $\theta_1 = \pi/2$.

Точка A на луче $\varepsilon = 0$ с координатой μ_{**} , вычисляемой путем подстановки $\varepsilon = 0$ в (3.1), относится к специальному асимптотическому движению, где $\theta_0 < \theta_1 < \pi/2$, такому, что при любом $\mu > \mu_{**}$ справедливо $\theta_1 = \pi$ (плоскость диска переходит через вертикальное положение и затем диск падает).

В общем случае определено отображение полуплоскости (λ, μ) в интервал $(0; \pi)$ со значениями угла θ_1 . Назовем полный прообраз в (λ, μ) некоторого θ_1 «изоклиной» для этого θ_1 .

Переписав уравнение $U(\theta_1)=0$ в виде

$$\begin{aligned} & (C_1(R_{10}^2-R_1^2)+A\delta^2(R_{10}'^2-R_1'^2))\lambda^2+2(C_1(R_{10}R_{20}-R_1R_2)+ \\ & +A\delta^2(R_{10}'R_{20}'-R_1'R_2'))\lambda\mu+(C_1(R_{20}^2-R_2^2)+A\delta^2(R_{20}'^2-R_2'^2))\mu^2= \\ & =2\text{mag}(\sin\theta_1-\sin\theta_0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$R_i=R_i(\theta_1), R_i'=R_i'(\theta_1) \quad (i=1, 2)$$

и полагая $\theta_1=\text{const}$, получим уравнения «изоклин» в координатах (λ, μ) . Они определяют кривые второго порядка, причем коэффициенты квадратичной формы, стоящей в левой части (3.2), таковы, что при любых θ_0, θ_1 изоклины являются участками гипербол (тонкие кривые на фиг. 5). Они терпят разрыв в точках бифуркационной кривой B_2AB_1 . Их асимптоты являются лучами $\varepsilon=\text{const}$. На фиг. 5 выделенные штриховые участки гипербол B_1D_1 и B_2D_2 суть изоклины для $\theta_1=\pi/2$. Последние, а также лучи $\varepsilon=-1$ и $\varepsilon=1$ ограничивают область II, где $\pi/2<\theta_1<\pi-\theta_0$. Для участков названных лучей, расположенных выше точек B_1, B_2 , справедливо $\theta_1=\pi-\theta_0$.

В области I, ограниченной теми же лучами и кривой B_1AB_2 , будет $\pi-\theta_0<\theta_1\leq\pi$. Наконец, для остальных областей выполняются неравенства $0<\theta_1<\pi/2$.

Типы движения диска, соответствующие точкам B_1 и B_2 , отличаются сильной структурной неустойчивостью: при сколь угодно малом изменении начальных значений (q_0, r_0) может быть получена любая величина угла θ_1 в отрезке $[\pi/2; \pi-\theta_0]$.

Отметим, что факт устойчивости всех стационарных качений геометрически выражается на фиг. 5 в том, что изоклины для угла θ_1 , близкого к θ_0 , прилегают к кривой S , не пересекаясь с ней.

Случай, когда имеются неустойчивые стационарные качения, проиллюстрирован с сохранением всех обозначений на фиг. 6. Здесь точки E_1 и E_2 ограничивают на кривой S область неустойчивости, где выполняется неравенство $L>0$. Бифуркационная кривая, сохраняя все свои свойства, теперь «вклинивается» в эту область, разделяет при этом изоклины для $\theta_0<\theta_1<\pi/2$ и сама разделяется на две связанные части.

В каждой точке участка $(E_1; E_2)$ кривой S изоклины пересекаются с последней трансверсально, что геометрически свидетельствует о неустойчивости.

В рассматриваемой ситуации для падения диска на плоскость $\theta=\pi$ теперь необходимо и достаточно

$$\varepsilon=0, p_0'=-\text{mag}\cos\theta_0/A_1+q_0(q_0\text{ctg}\theta_0-C_1r_0/A_1)>0$$

Сечения $\theta_0=\text{const}$, изображенные на фиг. 5 и 6, переходят друг в друга при непрерывном изменении θ_0 . Можно показать, что когда для некоторого θ^* бифуркационная кривая и кривая S имеют только одну общую точку это будет точка A , принадлежащая лучу $\varepsilon=0$.

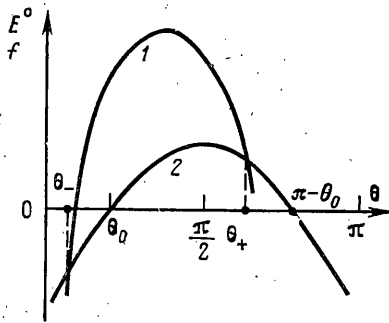
Наконец, в случае $\theta_0=\pi/2$ кривая S вырождается в координатные оси $r_0=0, q_0=0$. Бифуркационная кривая стягивается в пары точек на S , ограничивающие области неустойчивости и устойчивости стационарных качений. Здесь уже не может быть асимптотических движений, а для падения диска на горизонтальную плоскость теперь необходимо и достаточно $\lambda=0$ или $\mu=0$.

4. Откажемся от ограничения $p_0=0$. При этом интеграл (1.3) записывается в виде $A_1(p^2-p_0^2)+U(\theta, \theta_0, q_0, r_0)=0$. Значение угла θ может принадлежать одному отрезку области $D\subset[0; \pi]$, в которой выполняется неравенство $U(\theta)<p_0^2$. Последнее можно представить в форме $E^\circ(\theta)>f(\theta)$, где $E^\circ(\theta)=E(\theta)+p_0^2$.

Используя $E^\circ(\theta)$ в соотношениях (2.4), (2.5) вместо $E(\theta)$, анализ общего случая можно свести к изложенному выше для $p_0=0$.

На фиг. 7 кривыми 1 и 2 представлены графики $E^\circ(\theta)$ и $f(\theta)$. Здесь θ_- и θ_+ ($\theta_-<\theta_0<\theta_+$) — корни уравнения $E^\circ(\theta)=f(\theta)$.

При каждых фиксированных p_0 и θ_0 аналогичными методами можно построить две диаграммы, подобные изображенным на фиг. 5 или 6, на



Фиг. 7

одной из которых будут иметься изоклины для θ_- , а на другой — для θ_+ , причем бифуркационные кривые будут присутствовать только на последней из них.

5. Определим критические точки функции $E(\theta)$ при различных значениях параметра ε . Для этого продифференцируем выражение для $E(\theta)$ в (2.4) и, учитывая (1.5), получим $E'(\theta) = -2q(ma^2r + A\delta r')$. Это можно переписать так же в виде

$$E'(\theta) = -2q(\theta)H(\theta), \quad H(\theta) = C_1r - A \operatorname{ctg} \theta q \quad (5.1)$$

При $\varepsilon \geq 0$ в силу найденных свойств функций $r(\theta)$ и $q(\theta)$ будет справедливо $r > 0$, $r' > 0$, поэтому выражение в скобках в (1) всюду на отрезке $[0; \pi]$ положительно. При этом $q(\theta)$ — монотонная функция, единственный раз обращающаяся в нуль с аргументом θ_* , значение которого зависит от ε указанным выше образом. В случае $\varepsilon < 0$ всюду на $[0; \pi]$ имеем $q(\theta) < 0$, а уравнение $H(\theta) = 0$ обладает единственным корнем. Для доказательства последнего продифференцируем функцию $H(\theta)$ по θ :

$$H'(\theta) = [A(\operatorname{ctg}^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta) + ma^2]q - C \operatorname{ctg} \theta r$$

и, подставив в полученное выражение условие $H(\theta) = C_1r - A \operatorname{ctg} \theta q = 0$, найдем, что всегда $H'(\theta) < 0$, что не может выполняться, если $H(\theta) = 0$ имеет несколько корней, поскольку $H(\theta)$ — непрерывная функция.

Таким образом, $E'(\theta)$ только один раз обращается в нуль для любого ε . При этом, вследствие того что $E(0) = -\infty$ или $E(\pi) = -\infty$, функция $E(\theta)$ достигает максимума.

Продифференцируем теперь по θ выражение (5.1), используя (1.4) и (1.5). В полученном соотношении все члены в силу свойств $r(\theta)$ и $q(\theta)$ будут отрицательными в области $W1 \cup W2$ при любом ε . Дифференцируя (5.1) дважды и учитывая (1.4), найдем что в области $W1$ будет $E''(\theta) > 0$, а в $W2$ — $E''(\theta) < 0$.

В уравнения изоклин (3.2), бифуркационных кривых (3.1), а также в преобразование (1.9) входят значения гипергеометрической функции $R_1(\theta)$. Коснемся вопроса о вычислении этих значений. Ряд (1.7) можно представить как полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$, где модуль k выражается через x в виде ряда (ограничимся только действительными разложениями):

$$k^2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j \quad (5.2)$$

Для этого перепишем (1.7) в форме

$$F\left(\frac{1}{2} + i\Delta, \frac{1}{2} - i\Delta, 1, x\right) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 P_1 x + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 P_2 x^2 + \dots \quad (5.3)$$

Вычтем из обеих частей (5.4) единицу, поделим на P и приравняем полученное к разложению выражения $(2/\pi)(K(k) - 1)$ в ряд по k^2

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{P_1}{P} x + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{P_2}{P} x^2 + \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \quad (5.4)$$

Подставим в (5.4) вместо k^2 ряд (5.2) и, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , найдем величины a_j . Определенная таким образом функция $k^2(x)$ будет монотонной в отрезке $[0; 1]$. Кроме того, $k^2(1) = 1$, так как в противном случае одна из частей (5.4) при $x=1$ имела бы конечное значение, а другая — бесконечное.

Приравнивание рядов в (5.4) обеспечивает быструю сходимость (5.2) в отличие от приравнивания разложений $F(x)$ и $K(k)$. Окончательно запишем

$$R_1(\theta) = 1 + (2P/\pi)(K(k) - 1), \quad k^2 = k^2(x), \quad x = 1/2 - 1/2 \cos \theta$$

Автор благодарен А. П. Маркееву за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука. 1967. 519 с.
2. *Дувакин А. П.* Об устойчивости движения диска // Инж. журн. 1965. Т. 5. Вып. 1. С. 3-9.
3. *Миндлин И. М.* Об устойчивости диска, несущего гироскоп // Инж. журн. 1964. Т. 4. Вып. 1. С. 100-104.
4. *Красинская Э. М.* К стабилизации стационарных движений механических систем // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 302-309.
5. *Grammel R.* Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen. В.: Springer. 1950. В. 1. 281 S.; В. 2. 268 S.
6. *Levi-Civita T., Amaldi V.* Lezioni di meccanica razionale. V. 2. Pt 2. Bologna: Zanichelli. 1927. 671 p.
7. *Korteweg D.* Sur l'interaction des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal // Rend. del Circol. mat. di Palermo. 1899. V. 14. P. 7-8.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Маттье. М.: Наука. 1973. Т. 1. 294 с.; Т. 2. 295 с.
9. *Appell P.* Traité de Mécanique rationnelle. V. 2. P.: Gauthier-Villars. 1953. 575 p.

Москва

Поступила в редакцию
30.VIII.1983