

УДК 534.014

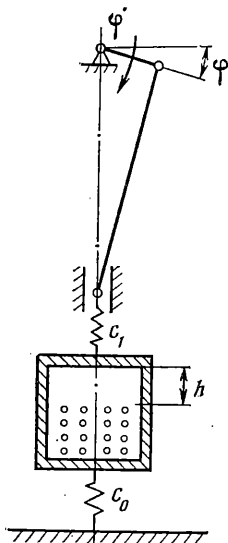
## ОСОБЕННОСТИ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЕМКОСТЯМИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫМИ СЫПУЧИМИ СРЕДАМИ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ НЕИДЕАЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ

БРИСКИН Е. С.

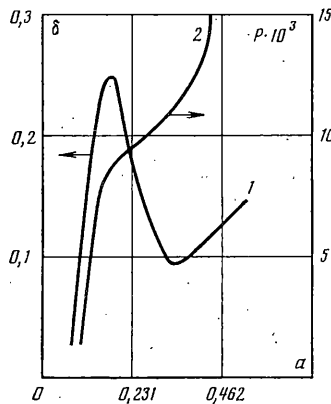
Развивающаяся вибрационная технология требует оптимального проектирования вибрационных машин и, в частности, ставит задачу о рациональном выборе мощности двигателя, обеспечивающего необходимый уровень колебаний рабочего органа вибромашины. У многих типов вибромашин, например грохотов, рабочим органом является емкость, а загрузкой — заполняющая ее сыпучая среда. В этих случаях необходимым условием решения поставленной задачи является одновременный учет взаимодействия источника энергии с рабочим органом и рабочего органа с сыпучей средой, особенно если используются резонансные вибромашин. Несмотря на многообразие типов источников энергии, учет их взаимодействия с рабочим органом возможен на основе предварительно заданного способа возбуждения вибраций и так называемой статической характеристики двигателя, представляющей собой зависимость момента  $L(\varphi^*)$  на его валу от угловой скорости вращения ротора  $\varphi^*$ . Известно [1], что этого оказывается достаточно при исследовании стационарных и близких к стационарным режимов движения. С другой стороны, при аналитическом исследовании взаимодействия рабочего органа с загрузкой опираются на какую-либо модель сыпучей среды. Так, например, в [2, 3] используются упруговязкая и упруговязкопластичная модели. Дифференциальные уравнения составляются отдельно для этапов совместного движения загрузки с рабочим органом и свободного падения сыпучей среды. В результате численного решения или с помощью моделирования на аналоговых вычислительных машинах получены практически важные результаты.

В публикуемой работе предпринята попытка аналитического решения поставленной задачи на основе теории колебаний механических систем с ограниченным возбуждением [1] и экспериментально установленных свойств механических систем с жестко присоединенными емкостями, частично заполненными сыпучими средами, совершающих колебания под действием вынуждающей гармонической силы [4].

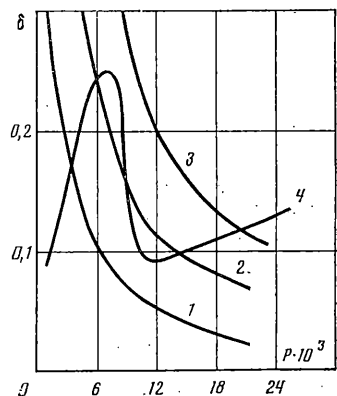
1. Рассматриваются колебания линейной механической системы с одной степенью свободы с жестко присоединенной емкостью, частично заполненной сыпучей средой (фиг. 1), возбуждаемые неидеальным источником энергии с известной статической характеристикой  $L=L(\varphi^*)$ , которая, как правило, является убывающей функцией угловой скорости  $\varphi^*$  двигателя. Подобная механическая система в отсутствие сыпучей среды изучалась в [1], где показано, что наиболее активное взаимодействие колебательной системы с источником энергии происходит в окрестности резонанса. Поэтому и здесь изучаются околорезонансные режимы, когда разность между частотой  $k$  собственных колебаний системы и частотой вынуждающей силы  $\varphi^*$  мала. Учитывается [4], что при малой массе  $m$  сыпучей среды, не превышающей 10% приведенной к точке крепления емкости массы  $M$  механической системы, движение последней близко к гармоническому, а амплитуды вынужденных околорезонансных колебаний при наличии сыпучей среды значительно уменьшаются. Причем максимумы они достигают независимо от амплитуды вибрационного воздействия при частоте, примерно равной  $k=\sqrt{c/(M+m)}$ , где  $c$  — жесткость упругой связи механической системы, рассматриваемой как системы с одной степенью свободы. По имеющимся в литературе данным отмеченные закономерности сохраняются и при большей величине массы сыпучей среды [5, 6].



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Таким образом, основное воздействие сыпучей среды на механическую систему проявляется в увеличении ее массы и появлении нелинейных сил неупругого сопротивления. В качестве меры сил неупругого сопротивления может служить логарифмический декремент  $\delta$ .

На фиг. 3 (кривая 1) представлен типичный, экспериментально полученный график зависимости логарифмического декремента от амплитуды колебаний  $a$  емкости для механической системы с собственной частотой  $k=65,6$  Гц. В качестве сыпучей среды использовались свинцовые шарики диаметром  $2,25 \cdot 10^{-3}$  м; зазор  $h$  между свободной поверхностью сыпучей среды и верхним основанием цилиндрической емкости составлял  $1,2 \cdot 10^{-3}$  м. Характерной особенностью графика является наличие «падающего» участка, что и является источником некоторых своеобразных свойств колебаний механических систем, возбуждаемых неидеальным источником энергии.

Дифференциальные уравнения, описывающие движение рассматриваемой системы, имеют вид

$$\begin{aligned} (M+m)x'' + f(x, x') + (c_0 + c_1)x &= c_1 r \sin \varphi \\ I\varphi'' + R(\varphi') &= L(\varphi') + c_1 r (\dot{x} - r \sin \varphi) \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $c_0, c_1$  — жесткости соответствующих упругих связей,  $I$  — приведенный к оси вала двигателя момент инерции вращающихся масс,  $r$  — радиус кривошипа,  $R(\varphi')$  — момент сил сопротивления вращению ротора,  $f(x, x')$  — сила неупругого сопротивления, обусловленная действием сыпучей среды на рабочий орган,  $x$  — абсолютное перемещение рабочего органа (емкости). При исследовании близких к стационарным режимов движения, малой величине вынуждающей силы  $c_1 r \sin \varphi$  и силы неупругого сопротивления  $f(x, x')$  уравнения (1.1) допускают представление в форме, содержащей малый параметр

$$\begin{aligned} (M+m)x'' + (c_0 + c_1)x &= \varepsilon \Phi(x, x') + \varepsilon q \sin \varphi \\ \varphi'' &= \varepsilon [M_1(\varphi') + q_1(x - r \sin \varphi) \cos \varphi] \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon q &= c_1 r, & \varepsilon \Phi(x, x') &= f(x, x') \\ \varepsilon q_1 &= c_1 r / I, & \varepsilon M_1 &= [L(\varphi') - R(\varphi')] / I \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (1.2) будем искать в форме [7]:

$$x = a \cos(\varphi + \theta), \quad \varphi' = \omega \quad (1.3)$$

а амплитуда  $a$  и фаза  $\theta$  определяются из системы уравнений.

$$\begin{aligned}
 a^* &= \frac{\varepsilon}{2\pi k(M+m)} \int_0^{2\pi} \Phi_0(a, \psi) \sin \psi d\psi - \frac{\varepsilon q \cos \theta}{2k(M+m)} \\
 \theta^* &= k - \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi ka(M+m)} \int_0^{2\pi} \Phi_0(a, \psi) \cos \psi d\psi + \frac{\varepsilon q \sin \theta}{2ka(M+m)} \\
 \Phi_0(a, \psi) &= \Phi(a \cos \psi, -ka \sin \psi)
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

С учетом обозначений, имеющих физический смысл интегралов, характерных для процедуры метода эквивалентной линеаризации [7, 8], уравнения (1.4), записываются в виде

$$\begin{aligned}
 a^* &= -\frac{\delta(a)ka}{2\pi} + \frac{\varepsilon q \cos \theta}{2k(M+m)} = Q_1(a, \theta, \omega) \\
 \theta^* &= k(a) - \omega + \frac{\varepsilon q \sin \theta}{2ka(M+m)} = Q_2(a, \theta, \omega)
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

где  $\delta(a)$  — эквивалентный логарифмический декремент колебаний, который для исследуемой системы определяется экспериментально,  $k(a)$  — эквивалентная частота собственных колебаний, равная с точностью до малой величины порядка  $\varepsilon$  частоте  $k$ . Второе уравнение (уравнение частоты) системы (1.2) с учетом (1.3) усредняется по быстрой переменной  $\varphi$ :

$$\omega^* = \varepsilon [M_1(\omega) + {}^1/2 q_1 a \cos \theta] = Q_3(a, \theta, \omega) \tag{1.6}$$

При изучении стационарных режимов движения правые части уравнений (1.5) и (1.6) приравниваются нулю. Тогда амплитуда  $a$  и частота  $\omega$  колебаний определяются из уравнений

$$\begin{aligned}
 4k^2(k-\omega)^2 + k^4\delta^2(a)/\pi^2 &= H^2/a^2 \\
 l(\omega) - r(\omega) - \delta(a)a^2 &= 0 \\
 H &= c_1 r / (M+m), \quad l(\omega) = 2\pi L(\omega) / k^2 (M+m) \\
 r(\omega) &= 2\pi R(\omega) / k^2 (M+m)
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

С целью получения наглядного результата система уравнений (1.7) решается графическим способом. Для этого на основании имеющегося графика  $\delta = \delta(a)$  предварительно строится график функции  $P(a) = \delta(a)a^2$  (фиг. 2, кривая 2), а затем  $\delta = \delta(P)$  (фиг. 3, кривая 4). Здесь следует обратить внимание на характер зависимости  $P$  от амплитуды колебаний  $a$ . Не исключая возможности существования убывающих участков функции  $P = P(a)$  (если  $\delta = \delta(a)$  будет убывать быстрее, чем функция  $\delta = \text{const}/a^2$ ), в дальнейшем рассматриваются как более типичные случаи соответствующие возрастающему характеру зависимости  $P$  от  $a$  во всем диапазоне возможных амплитуд колебаний. Для построения графика зависимости  $P = P(\omega)$  первое уравнение системы (1.7) преобразуется к виду

$$\omega_{1,2} = k \pm \Delta, \quad \Delta = k \{ \delta(P) [ \lambda^2/P - \delta(P) ] \}^{1/2} / (2\pi) \tag{1.8}$$

в котором функция  $\delta = \delta(a)$  заменена функцией  $\delta = \delta(P)$ , а  $\lambda = H\pi/k^2$ .

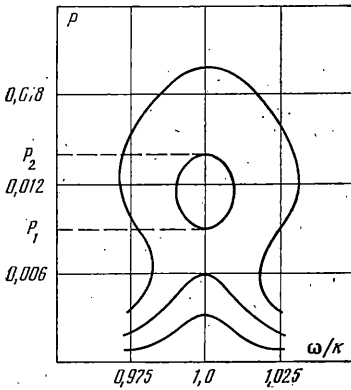
Теперь для построения графика зависимости  $P = P(\omega)$  сначала строится прямая  $\omega = k$ , а затем на каждом уровне параметра  $P$  влево и вправо по горизонтали откладываются отрезки  $\Delta$ . Критическими точками на построенном графике, в которых он пересекается с прямой  $\omega = k$ , соответствуют такие значения параметра  $P$ , при которых  $\Delta$  обращается в нуль. Это приводит к нелинейному алгебраическому уравнению для определения критических значений  $P$ :

$$\lambda^2/P - \delta(P) = 0 \tag{1.9}$$

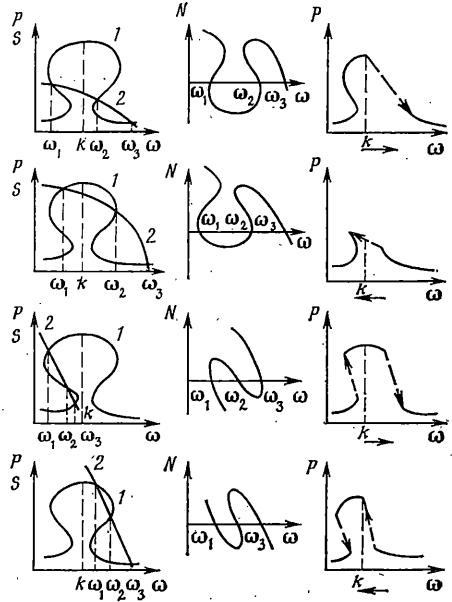
Уравнение (1.9) может иметь одно или три решения, что соответствует количеству точек пересечения графиков  $\delta = \lambda^2/P$  и  $\delta = \delta(P)$  (фиг. 3). Так, если график функции  $\delta(P)$  будет иметь одну точку пересечения с графиком  $\delta = \lambda^2/P$  и соответствовать кривой  $I$  (фиг. 3), то зависимости  $P = P(\omega)$  будет соответствовать кривая  $I$  (фиг. 4), принципиально ничем не отличающаяся от кривой, построенной для случая  $\delta(a) = \text{const}$ . При возрастании параметра  $\lambda$  (фиг. 3, кривая 2) график функции  $\delta = \lambda^2/P$  имеет три точки пересечения с графиком  $\delta = \delta(P)$ , а график зависимости

$P=P(\omega)$  будет иметь изолированную ветвь (фиг. 4, кривая 2), ограниченную по оси ординат координатами  $P_1, P_2$ . Причем в околорезонансной зоне существует возможность реализации трех режимов движения, отличающихся величиной параметра  $P$ . При дальнейшем возрастании  $\lambda$ , когда график функции  $\delta=\delta(P)$  имеет одну точку пересечения с графиком функции  $\delta=\delta(P)$  (фиг. 3, кривая 3), изолированная ветвь кривой  $P=P(\omega)$  исчезает (фиг. 4, кривая 3), но по-прежнему сохраняется возможность существования трех режимов движения.

Теперь для определения частоты  $\omega$  вынужденных колебаний строится график  $S(\omega)=l(\omega)-r(\omega)$  характеристики источника энергии и моментов сил сопротивления вращению ротора в зависимости от частоты  $\omega$ . Абсциссы точек пересечения графиков  $S(\omega)$  и  $P(\omega)$  являются корнями второго уравнения (1.7) и определяют возможные значения частот. Независимо от типа кривой  $P=P(\omega)$  для каждой характеристики  $S=S(\omega)$  существует одна или три точки пересечения с кривой  $P=P(\omega)$ . В случае существования одной точки ее абсцисса и



Фиг. 4



Фиг. 5

определяет искомую частоту, при наличии трех точек пересечения возникает задача однозначного определения частоты колебаний  $\omega$ . Ее решение возможно на основе анализа устойчивости соответствующих режимов движения.

2. Для определения характера полученных режимов составляются уравнения в вариациях для усредненных уравнений (1.5) и (1.6):

$$(\delta a)' = b_{11}\delta a + b_{12}\delta\theta + b_{13}\delta\omega \quad (2.1)$$

$$(\delta\theta)' = b_{21}\delta a + b_{22}\delta\theta + b_{23}\delta\omega, \quad (\delta\omega)' = b_{31}\delta a + b_{32}\delta\theta + b_{33}\delta\omega$$

Здесь  $\delta a, \delta\theta, \delta\omega$  — малые отклонения переменных от стационарных значений;  $b_{ij}$  — коэффициенты, вычисляемые как частные производные в окрестности стационарных значений  $a, \theta, \omega$  от правых частей уравнений (1.5) и (1.6) по  $a, \theta$  и  $\omega$ :

$$\begin{aligned} b_{11} &= \partial Q_1 / \partial a = -k[\delta(a) + a\delta\delta(a)/\partial a] / 2\pi \\ b_{12} &= \partial Q_1 / \partial \theta = (\omega - k)a, \quad b_{13} = \partial Q_1 / \partial \omega = 0 \\ b_{21} &= \partial Q_2 / \partial a = (k - \omega)/a, \quad b_{22} = \partial Q_2 / \partial \theta = -\delta(a)k / 2\pi \\ b_{23} &= \partial Q_2 / \partial \omega = -1, \quad b_{31} = \partial Q_3 / \partial a = -q_1\delta(a)k^2 a / (M + m) 2\pi q \\ b_{32} &= \partial Q_3 / \partial \theta = kq_1 a^2 (M + m)(k - \omega) / q, \quad b_{33} = \partial Q_3 / \partial \omega = \varepsilon \delta M_1(\omega) / \partial \omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

Как известно [8], условиями устойчивости периодических режимов движения невозмущенной системы усредненных уравнений (1.5), (1.6) могут служить критерии Рауса — Гурвица, определяющие область параметров, где характеристическое уравнение системы (2.1) имеет корни с отрицательными вещественными частями. Эти условия накладывают ограничения на коэффициенты  $b_{ij}$ , среди которых существенным в рассматриваемом случае и обладающим наглядностью является неравенство [1]:

$$(b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22})dQ_3/d\omega > 0 \quad (2.3)$$

$$Q_3 = k^2(M + m)N(\omega) / 2\pi I, \quad N(\omega) = S(\omega) - P(\omega)$$

где выражение в скобках с учетом (2.2) и малого отличия  $\omega$  от собственной частоты  $k$  аналогично [1] приводится к виду  $b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22} = -(k - \omega) \times d\omega/dP \cdot dP/da$ . Если рассматриваются лишь случаи, соответствующие возрастающему характеру зависимости  $P = P(a)$ , когда  $dP/da > 0$ , окончательно вместо (2.3) имеет место следующее условие устойчивости периодических режимов движения:

$$(\omega - k) d\omega/dP \cdot dN/d\omega > 0 \quad (2.4)$$

где производные вычисляются при  $\omega = \omega_i$ ,  $P = P(\omega_i)$ ,  $N = N(\omega_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Если существует только одна точка пересечения графиков  $P = P(\omega)$  и  $S = S(\omega)$ , то вычисление производится при значениях перечисленных параметров, соответствующих этой точке.

Для удобства практического использования условия (2.4) на фиг. 5 представлены графики зависимостей  $P = P(\omega)$  третьего типа (фиг. 4, кривая 3) и  $N = N(\omega)$  в зависимости от крутизны и расположения характеристики  $S = S(\omega)$ . Здесь же условно показаны особенности перехода механической системы через резонанс при возрастании и убывании частоты. Анализ приведенных на фиг. 5 случаев показывает, что режимы, соответствующие одной из экстремальных частот  $\omega_1$  или  $\omega_3$ , устойчивы, а соответствующие промежуточной частоте  $\omega_2$ , — неустойчивы. В этом проявляется формальное сходство с поведением механических систем, не имеющих отмеченной специфической зависимости диссипативных свойств от амплитуды колебаний. Основные различия состоят в том, что помимо неустойчивых областей, соответствующих пересечению графиков функций  $P = P(\omega)$  и  $S = S(\omega)$  на ниспадающей ветви кривой  $P(\omega)$  в зарезонансной зоне, последние могут существовать и в дорезонансной. Кроме того, в зависимости от крутизны характеристики  $S = S(\omega)$  в зарезонансной зоне (вблизи резонанса) могут находиться достаточно широкие области, соответствующие устойчивым периодическим режимам движения. Следует подчеркнуть, что это обстоятельство может быть целенаправленно использовано для улучшения стабильности резонансных вибромашин. При прохождении через резонанс механической системы, возбуждаемой источником энергии с крутой характеристикой  $S = S(\omega)$ , происходит два нестационарных перехода. Особенность состоит также в том, что при управлении источником энергии, направленном на увеличение угловой скорости вращения ротора двигателя, существуют такие области, где угловая скорость незначительно уменьшается и, наоборот, при управлении с целью уменьшения угловой скорости в некоторых зонах последняя может незначительно возрастать.

Если графиком зависимости  $P = P(\omega)$  служит кривая второго типа (фиг. 4, кривая 2), то полученные выводы сохраняют свою силу. Следует только иметь в виду, что переход на изолированную ветвь кривой  $P = P(\omega)$  и обратно возможен лишь при наличии дополнительного достаточно интенсивного возмущения, например удара.

График зависимости первого типа (фиг. 4, кривая 1) принципиально не отличается от аналогичной зависимости, построенной для механической системы с  $\delta(a) = \text{const}$ . Поэтому известные результаты [1] исследования подобных систем полностью переносятся на этот случай.

Таким образом, при исследовании колебаний механических систем с емкостями, частично заполненными сыпучими средами, взаимодействующих с источниками энергии ограниченной мощности, необходим учет выявленных характерных особенностей движения, которые могут быть целенаправленно использованы в инженерной практике.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука. 1964. 254 с.
2. Гончаревич И. Ф. Исследование вибрационных транспортирующих машин с ограниченным возбуждением // Нелинейные колебания и переходные процессы в машинах. М.: Наука. 1972. С. 25–39.

3. *Спиваковский А. О., Гончаревич И. Ф., Вуколов Э. А.* Исследование динамики вибрационных питателей-грохотов с двигателем ограниченной мощности под нагрузкой // Динамика машин. М.: Наука. 1969. С. 239–247.
4. *Брискин Е. С.* О демпфировании колебаний механических систем полостями, частично заполненными сыпучими средами // Прикл. механика, 1981, Т. 17, № 2. С. 110–115.
5. *Потураев В. Н., Червоненко А. Г.* Об учете влияния технологической нагрузки при динамическом расчете вибрационных конвейеров и грохотов // Обогащение полезных ископаемых. Техніка. 1967. Вып. 2. С. 81–91.
6. *Николаенко Г. И.* Теория амортизации вибрационных машин // Механика и расчет машин вибрационного типа. М.: Изд-во АН СССР. 1957. С. 60–79.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1974. 503 с.
8. Вибрации в технике: Справочник. Т. 2 / Под ред. И. И. Блехмана. М.: Машиностроение. 1979. 351 с.

Волгоград

Поступила в редакцию  
22.V.1985