МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1987

УДК 531.3

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВРАЩЕНИЙ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА ОСНОВЕ ПОНЯТИЯ ВАРИАЦИИ ВЕКТОРА

КУЗНЕЦОВ В. В.

С привлечением понятия вариации вектора выводится представление для ортов произвольно ориентированного трехгранника в зависимости от вектора поворота. Приведен пример использования полученных соотношений в механике твердого деформируемого тела.

1. Вопрос об описании вращений в трехмерном пространстве обсуждается в соответствующих разделах теоретической механики, механики твердого и твердого деформируемого тела. Математически описание вращений связано с определением параметров, которыми характеризуется положение ортогонального трехгранника в пространстве. Особый интерес к этому вопросу связан с постановкой и решением нелинейных задач для твердых деформируемых тел. Хотя деформированное состояние тела может быть определено без введения понятия вращения, оно (вращение) является неотъемлемым атрибутом деформации в общем случае. Наиболее употребительный способ описания вращений с помощью трех углов Эйлера — Крылова представляется неудобным, поскольку представляет зависимость конечного положения трехгранника от последовательности вращений на углы Эйлера — Крылова. Ниже, используя понятие вариации вектора, выводится представление для ортов произвольно ориентированного трехгранника, свободное от указанных недостатков и удобное при решении задач механики вариационными методами.

Вариация единичного вектора $\mathbf{e}_i$, входящего в состав ортогональной связки трех векторов, может быть записана в виде

$$\delta\mathbf{e}_i=\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_i \quad (i=1,2,3) \tag{1.1}$$

где $\delta\boldsymbol{\omega}=\delta\omega_i\mathbf{e}_i$ — некоторый произвольный вектор с проекциями $\delta\omega_i$ на орты $\mathbf{e}_i$. Здесь и дальше используется правило суммирования по повторяющемуся индексу. Вектор $\delta\boldsymbol{\omega}$ является вектором поворота [1, 2]. Если модуль вектора поворота $\delta\omega=(\delta\omega_i^2)^{1/2}$ мал, то новое положение ортов $\mathbf{e}_i^*$ может быть вычислено по формуле $\mathbf{e}_i^*\approx\mathbf{e}_i+\delta\mathbf{e}_i$. В этом случае проекции вектора поворота $\delta\omega_i$ можно отождествить с углами поворота трехгранника вокруг ортов $\mathbf{e}_i$. В дальнейшем вектор поворота будем считать независимым. Это значит, что величины $\delta\omega_i$ могут принимать любые значения, причем при вычислении вариации высших порядков они остаются неизменными и могут рассматриваться как некоторые числа.

Варьируя равенства (1.1), вычислим вторую вариацию от ортов $\delta^2\mathbf{e}_i=\delta\boldsymbol{\omega}\times\delta\mathbf{e}_i$, или

$$\delta^2\mathbf{e}_i=\delta\boldsymbol{\omega}\times(\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_i) \tag{1.2}$$

Начиная с третьей вариации наблюдается рекурсия следующего вида:

$$\delta^{2k+1}\mathbf{e}_i=(-1)^k\delta\omega^{2k}\delta e_i,\quad \delta^{2k+2}\mathbf{e}_i=(-1)^k\delta\omega^{2k}\delta^2\mathbf{e}_i \quad (k=1,2,\ldots)$$

т. е. вариации нечетного порядка выражаются через первую, а четного — через вторую вариации. Формула для вычисления вариаций от единичных ортов трехгранника имеет самостоятельное значение при применении вариационных методов в механике твердого тела. Имея выражения для вариаций любого порядка от ортов, можно записать разложение (ряд Тейлора) ортов $\mathbf{e}_i^*$ трехгранника в новом положении по вариациям ортов e_i:

$$\mathbf{e}_i^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \delta^k \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i + a_1 \delta \mathbf{e}_i + a_2 \delta^2 \mathbf{e}_i \qquad (i=1, 2, 3)$$

$$a_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \delta^{2k}\omega, \qquad a_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+2)!} \delta\omega^{2k} \tag{1.3}$$

Полученные ряды сходятся при любой величине $\delta\omega$, а именно:

$$a_1 = \sin\delta\omega/\delta\omega, \qquad a_2 = (1-\cos\delta\omega)/\delta\omega^2 \tag{1.4}$$

Используя формулы (1.1), (1.2), (1.4), запишем выражения (1.3) в виде

$$\mathbf{e}_i^* = \mathbf{e}_i + \delta\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{\sin\delta\omega}{\delta\omega} e_i + \frac{1-\cos\delta\omega}{\delta\omega^2} \delta\omega \times e_i \right) \tag{1.5}$$

Раскладывая орты e_i^* по ортам e_i, получим $\mathbf{e}_i^* = \lambda_{ij}\mathbf{e}_j$, где λ_{ij} — косинус угла между ортом $\mathbf{e}_i^*$ и ортом $\mathbf{e}_j$

$$\lambda_{ii} = 1 - \frac{1-\cos\delta\omega}{\delta\omega^2}(\delta\omega_j^2 + \delta\omega_k^2) \qquad (i=1, 2, 3)$$

$$\lambda_{ij} = \frac{\sin\delta\omega}{\delta\omega}\delta\omega_k + \frac{1-\cos\delta\omega}{\delta\omega^2}\delta\omega_i\delta\omega_j \qquad (j=2, 3, 1) \tag{1.6}$$

$$\lambda_{ik} = -\frac{\sin\delta\omega}{\delta\omega}\delta\omega_j + \frac{1-\cos\delta\omega}{\delta\omega^2}\delta\omega_i\delta\omega_k \qquad (k=3, 1, 2)$$

Выражения для направляющих косинусов всех ортов получаются по формулам (1.6), путем циклической перестановки индексов i, j, k. Непосредственной проверкой можно убедиться, что для трехгранника в новом положении выполняются условия (δ_{ij} — символ Кронекера) $e_i^* \cdot e_j^* = \delta_{ij}$.

Если ввести единичный орт $\mathbf{c} = \delta\omega/\delta\omega = c_i \mathbf{e}_i$, по направлению совпадающий с вектором $\delta\boldsymbol{\omega}$, где c_i — направляющие косинусы орта, то формула (1.5) примет вид

$$\mathbf{e}_i^* = \mathbf{e}_i + \sin\delta\omega\,\mathbf{c}\times\mathbf{e}_i + (1-\cos\delta\omega)\,\mathbf{c}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{e}_i) \tag{1.7}$$

Соотношения (1.5), (1.7) приводятся к форме Родрига через коллинеарный $\delta\boldsymbol{\omega}$ вектор Θ [2]. Для практических приложений представляется удобной форма (1.5), поскольку вектор $\delta\omega$ имеет ясный физический смысл. Часто выражение (1.7) используется как основание для введения четырех параметров (кватернионов), связанных определенным соотношением и характеризующих ось вращения и угол поворота [3]. Кватернионы имеют некоторое преимущество при решении обратной задачи: по заданной матрице направляющих косинусов определить параметры, соответствующие данному положению трехгранника.

Покажем, что обращение может быть выполнено также относительно трех параметров $\delta\omega_i$. Из выражений (1.6) вытекают следующие формулы для направляющих косинусов орта $\mathbf{c}$

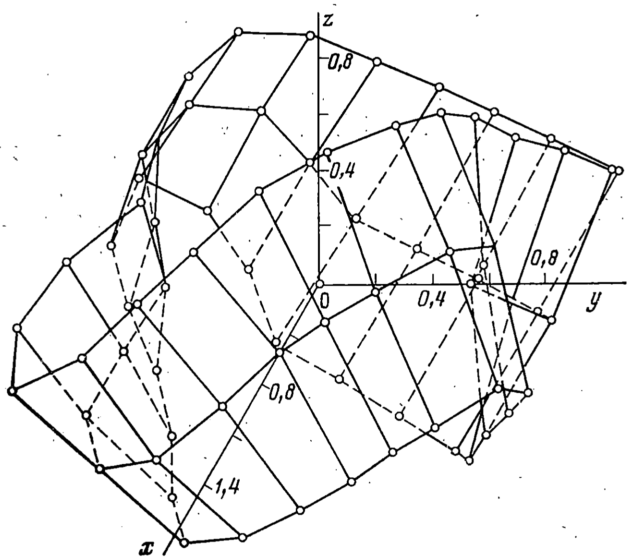
$$c_i = \varphi_i/\sin\delta\omega, \quad \varphi_i = {}^1/_2(\lambda_{kj} - \lambda_{jk}) \quad (i=1, 2, 3) \tag{1.8}$$

Вычисляя след матрицы направляющих косинусов, получим

$$\cos\delta\omega = {}^1/_2(\lambda_{ii} - 1) \tag{1.9}$$

Главное значение $\delta\boldsymbol{\omega}$ находится в интервале $0 \leqslant \delta\boldsymbol{\omega} \leqslant \pi$. Подставляя выражения (1.8) в равенство $c_i^2 = 1$, найдем

$$\sin\delta\omega = (\varphi_i^2)^{1/2} \tag{1.10}$$



Для главного значения $\delta\omega$ квадратный корень определяется в смысле арифметического значения. Замечая, что $\delta\omega_i = \delta\omega c_i$, из (1.8) получим $\delta\omega_i = \delta\omega\varphi_i / (\varphi_k^2)^{1/2}$. Для малых значений модуля $\delta\omega$ удобной является формула $\delta\omega_i = \varphi_i \delta\omega / \sin \delta\omega$, имеющая известный предел при $\delta\omega \to 0$.

2. Рассмотренный здесь подход к описанию вращений был применен в решении задач о деформации упругих тел при больших перемещениях и поворотах. На фигуре приведена диметрическая проекция короткой цилиндрической оболочки, деформированной с помощью четырех, симметрично расположенных нитей. Проекция получена линейной интерполяцией по расчетным точкам. Для описания деформированного состояния применялся метод конечных элементов. В каждом узле расчетной схемы помещался подвижный трехгранник, связанный с деформирующейся поверхностью. Равновесное состояние находилось из условия минимума потенциальной энергии деформации П:

$$\delta\Pi = 0 \tag{2.1}$$

При вычислении вариации потенциальной энергии непосредственно применялись формулы (1.1), (1.2) варьирования единичных ортов. Из уравнения (2.1) определялись перемещения узлов элементов и параметры $\delta\omega_i$, характеризующие положения трехгранников. Ввиду нелинейности уравнения (2.1) относительно искомых неизвестных применялся итерационный процесс Ньютона с построением на каждой итерации новых трехгранников по формуле (1.5). Описанная выше схема применения понятия вариации вектора к выводу соотношения (1.5) может быть использована в решении и других сходных вопросов [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю., Борзов В. И., Степаненко Н. П.* Лекции по теории гироскопов. М.: Изд-во МГУ. 1983. 244 с.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
3. *Виттенбург И.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир. 1980. 290 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
11.III.1985

---

[1] Примеры такого рода в приложении к механике упругих оболочек даны в работе: *Кузнецов В. В.* Элементарный анализ геометрии поверхностей и метод конечных элементов в механике упругих оболочек при произвольных перемещениях. Новосибирск, 1984. 138 с.— Деп. в ВИМИ 1.02.84; № Д06203.