МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1987

УДК 531.1

К ПОСТРОЕНИЮ ОБЩИХ РЕШЕНИЙ ВЕКТОРНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВРАЩЕНИЯ

ПАНОВ А. П.

Целью работы является построение общих решений кинематических дифференциальных уравнений для векторов вращения твердого тела, введенных в [1]. Установлено взаимно однозначное соответствие между формами векторных кинематических уравнений, их общими решениями и формулами сложения конечных вращений, заданных в терминах различных векторов. Показано, что уравнениям, содержащим абсолютные производные векторов вращения, соответствуют формулы сложения вращений, оси которых (или векторы вращения) неподвижны в пространстве, а уравнениям, содержащим относительные производные, соответствуют формулы сложения вращений, оси которых фиксированы в теле. Приведены примеры численных методов определения координат новых векторов вращения (по квазикоординатам) при использовании полученных решений уравнений и формул сложения вращений.

1. Пусть с твердым телом, совершающим произвольное сферическое движение, связан ортонормированный координатный базис $\mathbf{J}$ и его начало O совпадает с началом неподвижного в пространстве ортонормированного базиса $\mathbf{I}$. Положение ортов базиса $\mathbf{J}$ относительно ортов базиса $\mathbf{I}$ будем определять в каждый момент времени t с помощью вектора $\mathbf{x}$ конечного вращения (поворота) тела, рассматривая $\mathbf{x}$ как произвольный вещественный собственный вектор ортогонального оператора $\mathbf{R}$ результирующего рассогласующего конечного вращения базиса $\mathbf{J}$ [1]. Оператор $\mathbf{R}$ задает линейное преобразование вращения $\mathbf{j}_k=\mathbf{R}\mathbf{i}_k$ и переводит орты $\mathbf{i}_k$ базиса $\mathbf{I}$ в одноименные орты $\mathbf{j}_k$ базиса $\mathbf{J}$ $(k=1,2,3)$. Считаем, что в начальном положении базис $\mathbf{J}$ совпадает с базисом $\mathbf{I}$. Введем базис $\mathbf{J}'$, также связанный с твердым телом, и будем считать, что в начальном положении базис $\mathbf{J}'$ не совпадает с базисом $\mathbf{I}$, а в конечном положении, получаемом в результате вращения тела, задаваемого оператором $\mathbf{R}$, базис $\mathbf{J}'$ совмещается с базисом $\mathbf{I}$. В этом случае будем иметь преобразование вращения $\mathbf{i}_k=\mathbf{R}\mathbf{j}_k'$, в котором оператор $\mathbf{R}$ будет уже оператором согласующего вращения. Возможно также представление операции вращения твердого тела с помощью произвольных векторов, не совпадающих с ортами базисов $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}'$ [1]. Соответствующие такому представлению линейные преобразования вращения имеют вид $\mathbf{s}=\mathbf{R}\mathbf{r}_*$, $\mathbf{r}_*=\mathbf{R}\mathbf{s}'$, где $\mathbf{r}^*$ — вектор, неподвижный относительно базиса $\mathbf{I}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}'$ — вектора, фиксированные в базисах $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}'$ или связанные с твердым телом.

Вектор $\mathbf{x}$ конечного вращения представим в виде

$$\mathbf{x}=x\mathbf{n} \tag{1.1}$$

где $x=x(\varphi)$ — модуль, являющийся функцией угла вращения φ, $\mathbf{n}$ — орт оси рассогласующего вращения, и поставим в соответствие вектору $\mathbf{x}$ кососимметрический оператор векторного умножения [2] $\mathbf{X}=x\mathbf{N}$, где $\mathbf{N}$ — кососимметрический оператор, соответствующий орту $\mathbf{n}$. Связь оператора $\mathbf{R}$ с оператором $\mathbf{X}$ определяется выражением [1]:

$$\mathbf{R}=\mathbf{E}+\alpha\mathbf{X}+\beta\mathbf{X}^3$$
$$\alpha=(\sin\varphi)/x,\quad \beta=(1-\cos\varphi)/x^2 \tag{1.2}$$

где $x^2=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})$ — скалярное произведение, $\mathbf{E}$ — единичный оператор.

Положив в (1.1) $x=\vartheta=2\,\mathrm{tg}\,(\varphi/2)$, зададим вращение тела вектором $\mathbf{x}=\boldsymbol{\vartheta}$ (вектором конечного поворота [3]). Кинематические дифференциальные уравнения для этого вектора имеют вид [1, 3]:

$$\boldsymbol{\vartheta}^{\cdot}=\boldsymbol{\omega}-{}^1/_2\boldsymbol{\vartheta}\times\boldsymbol{\omega}+{}^1/_4(\boldsymbol{\vartheta}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\vartheta} \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{\vartheta}^{*}=\boldsymbol{\omega}+{}^1/_2\boldsymbol{\vartheta}\times\boldsymbol{\omega}+{}^1/_4(\boldsymbol{\vartheta}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\vartheta} \tag{1.4}$$

где $\boldsymbol{\vartheta}^{\cdot}$, $\boldsymbol{\vartheta}^{*}$ — абсолютная и относительная (локальная) производные по времени вектора $\boldsymbol{\vartheta}$, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости сферического движения тела, $\boldsymbol{\vartheta}\times\boldsymbol{\omega}$ — векторное произведение.

Пусть вектор $\boldsymbol{\omega}$, являясь непрерывной функцией времени, определен на интервале (t_1, t). Тогда общие решения уравнений (1.3), (1.4) могут быть записаны в форме Коши [4, 6]:

$$\boldsymbol{\vartheta}=[1-{}^1/_4(\boldsymbol{\vartheta}_1\cdot\boldsymbol{\vartheta}_t)]^{-1}(\boldsymbol{\vartheta}_1+\boldsymbol{\vartheta}_t-{}^1/_2\boldsymbol{\vartheta}_1\times\boldsymbol{\vartheta}_t) \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{\vartheta}_*=[1-{}^1/_4(\boldsymbol{\vartheta}_{1*}\cdot\boldsymbol{\vartheta}_{t*})]^{-1}(\boldsymbol{\vartheta}_{1*}+\boldsymbol{\vartheta}_{t*}+{}^1/_2\boldsymbol{\vartheta}_{1*}\times\boldsymbol{\vartheta}_{t*}) \tag{1.6}$$

где $\boldsymbol{\vartheta}_1$, $\boldsymbol{\vartheta}_{1*}$ — произвольные постоянные векторы, определяющие начальные условия $\boldsymbol{\vartheta}(t_1)$, $\boldsymbol{\vartheta}_*(t_1)$; $\boldsymbol{\vartheta}_t=\boldsymbol{\vartheta}(t)$, $\boldsymbol{\vartheta}_{t*}=\boldsymbol{\vartheta}_*(t)$ — частные решения при нулевых начальных условиях $\boldsymbol{\vartheta}(t_1)=0$, $\boldsymbol{\vartheta}_*(t_1)=0$.

Пусть в некоторый момент времени $t_2>t_1$ частные решения $\boldsymbol{\vartheta}_t$, $\boldsymbol{\vartheta}_{t*}$ определяются векторами $\boldsymbol{\vartheta}_2$, $\boldsymbol{\vartheta}_{2*}$. Рассматривая векторы $\boldsymbol{\vartheta}_1$ и $\boldsymbol{\vartheta}_2$ как векторы первого и второго конечных вращений твердого тела, запишем в соответствии с решением (1.5) формулу сложения вращений, заданных векторами $\boldsymbol{\vartheta}_1$, $\boldsymbol{\vartheta}_2$, в виде

$$\boldsymbol{\vartheta}_{1,2}=[1-{}^1/_4(\boldsymbol{\vartheta}_1\cdot\boldsymbol{\vartheta}_2)]^{-1}(\boldsymbol{\vartheta}_1+\boldsymbol{\vartheta}_2-{}^1/_2\boldsymbol{\vartheta}_1\times\boldsymbol{\vartheta}_2) \tag{1.7}$$

где $\boldsymbol{\vartheta}_{1,2}$ — вектор результирующего конечного вращения. Аналогичным образом из решения (1.6) получаем формулу

$$\boldsymbol{\vartheta}_{1,2*}=[1-{}^1/_4(\boldsymbol{\vartheta}_{1*}\cdot\boldsymbol{\vartheta}_{2*})]^{-1}(\boldsymbol{\vartheta}_{1*}+\boldsymbol{\vartheta}_{2*}+{}^1/_2\boldsymbol{\vartheta}_{1*}\boldsymbol{\vartheta}_{2*}) \tag{1.8}$$

где $\boldsymbol{\vartheta}_{1*}$, $\boldsymbol{\vartheta}_{2*}$, $\boldsymbol{\vartheta}_{1,2*}$ — соответственно векторы первого, второго и результирующего вращений.

Формула (1.7) и, следовательно, решение (1.5) определяют правило сложения вращений твердого тела в случае, когда векторы вращений (или оси вращений) неподвижны в пространстве (базисе $\mathbf{I}$) [3, 4], а формула (1.8) или решение (1.6) определяют правило сложения вращений тела вокруг осей, связанных с телом [4, 6]. Покажем справедливость последнего утверждения способом, отличным от способа, использованного в [4].

Предположим, что вектор $\boldsymbol{\vartheta}_2'$ связан с телом и переходит в результате первого вращения в вектор $\boldsymbol{\vartheta}_{2+}$, который задает последующее второе вращение тела. В соответствии с рассмотренным выше преобразованием вращения $\mathbf{r}_*=\mathbf{RS}'$ запишем операцию преобразования вектора $\boldsymbol{\vartheta}_2'$ в вектор $\boldsymbol{\vartheta}_{2+}$ в виде [4]:

$$\boldsymbol{\vartheta}_{2+}=\mathbf{R}_1\boldsymbol{\vartheta}_2',\quad \mathbf{R}_1=\mathbf{E}+(1+{}^1/_4\vartheta_1^2)^{-1}(\boldsymbol{\theta}_1+{}^1/_2\boldsymbol{\theta}_1^2) \tag{1.9}$$

где $\boldsymbol{\theta}_1$ — кососимметрический оператор, соответствующий вектору $\boldsymbol{\vartheta}_1$ первого вращения. Результирующий вектор вращения $\boldsymbol{\vartheta}_{1,2+}$ найдем в соответствии с (1.7) по формуле

$$\boldsymbol{\vartheta}_{1,2+}=[1-{}^1/_4(\boldsymbol{\vartheta}_1\cdot\boldsymbol{\vartheta}_{2+})]^{-1}(\boldsymbol{\vartheta}_1+\boldsymbol{\vartheta}_{2+}-{}^1/_2\boldsymbol{\vartheta}_1\times\boldsymbol{\vartheta}_{2+}) \tag{1.10}$$

Умножив (1.9) скалярно на вектор $\boldsymbol{\vartheta}_1$, получим равенство $(\boldsymbol{\vartheta}_1\cdot\boldsymbol{\vartheta}_{2+})=(\boldsymbol{\vartheta}_1\cdot\boldsymbol{\vartheta}_2')$. Подставив это равенство и соотношение (1.9) в (1.10), получаем после преобразований формулу

$$\boldsymbol{\vartheta}_{1,2+}=[1-{}^1/_4(\boldsymbol{\vartheta}_1\cdot\boldsymbol{\vartheta}_2')]^{-1}(\boldsymbol{\vartheta}_1+\boldsymbol{\vartheta}_2'+{}^1/_2\boldsymbol{\vartheta}_1\times\boldsymbol{\vartheta}_2') \tag{1.11}$$

которая с точностью до обозначений совпадает с формулой (1.8) и отличается от формулы (1.10) только знаком перед векторным произведением $\boldsymbol{\vartheta}_1\times\boldsymbol{\vartheta}_2'$. В полученной формуле (1.11) вектор $\boldsymbol{\vartheta}_1$ можно считать (как и вектор $\boldsymbol{\vartheta}_2'$) связанным с телом, поскольку он, являясь собственным вектором оператора $\mathbf{R}_1$, не меняет своего положения относительно тела при его первом вращении. Тогда приходим к заключению, что формула (1.11) и, следовательно, формула (1.8) или решение (1.6) задают правило сложения двух последовательных конечных вращений твердого тела, оси которых фиксированы в теле.

В дальнейшем будем считать, что кинематические уравнения, содержащие абсолютную и относительную производные векторов вращения, описывают одно и то же движение твердого тела.

Рассматривая далее случай равных начальных условий в решениях (1.5), (1.6), будем полагать $\vartheta_1=\vartheta_{1*}$ и использовать запись решения (1.6) в виде

$$\vartheta=\vartheta_*=[1-{}^1/_4(\vartheta_1\cdot\vartheta_{t*})]^{-1}(\vartheta_1+\vartheta_{t*}+{}^1/_2\vartheta_1\times\vartheta_{t*}] \qquad (1.12)$$

С помощью решений (1.5), (1.12) можно получить соответствующие общие решения кинематических уравнений или формулы сложения вращений, записанных в терминах любых других векторов вращения, отличных от вектора ϑ. При этом достаточно использовать получаемые на основе соотношения (1.1) формулы взаимосвязи между рассматриваемыми векторами вращения.

2. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{\lambda}=\lambda\mathbf{n}$, где $\lambda=\sin(\varphi/2)$. Кинематические дифференциальные уравнения для этого вектора могут быть получены из обобщенных векторных кинематических уравнений вращения [1] и записаны в виде

$$\lambda^{\cdot}={}^1/_2(\mu\omega-\lambda\times\omega),\ \lambda^*={}^1/_2(\mu\omega+\lambda\times\omega) \qquad (2.1)$$

где $\mu=[1-(\lambda\cdot\lambda)]^{1/2}=\cos(\varphi/2)$, $\lambda^{\cdot}$, λ^* — абсолютная и относительная производные вектора λ. Координаты вектора λ в базисах $\mathbf{I}$ или $\mathbf{J}$ и параметр μ представляют собой параметры Родрига — Гамильтона, являющиеся компонентами кватерниона вращения [5].

Общие решения уравнений (2.1) следуют из решений (1.5), (1.12) в результате введения в последних замен вида $\vartheta=\lambda/\mu$ и могут быть записаны в виде

$$\lambda=\mu_t\lambda_1+\mu_1\lambda_t-\lambda_1\times\lambda_t \qquad (2.2)$$

$$\lambda=\lambda_*=\mu_{t*}\lambda_1+\mu_1\lambda_{t*}+\lambda_1\times\lambda_{t*} \qquad (2.3)$$

где $\lambda_1=\lambda_{1*}$ — произвольный постоянный вектор, определяющий начальное условие $\lambda(t_1)=\lambda_*(t_1)$, $\lambda_t=\lambda(t)$, $\lambda_{t*}=\lambda_*(t)$ — частные решения при нулевых начальных условиях: $\lambda(t_1)=0$, $\lambda_*(t_1)=0$, $\mu_1=[1-(\lambda_1\cdot\lambda_1)]^{1/2}$, $\mu_t=[1-(\lambda_t\cdot\lambda_t)]^{1/2}=\mu_{t*}=[1-(\lambda_{t*}\cdot\lambda_{t*})]^{1/2}$. Одновременно с решениями (2.2), (2.3) получаем решение

$$\mu=\mu_1\mu_t-(\lambda_1\cdot\lambda_t)=\mu_1\mu_{t*}-(\lambda_1\cdot\lambda_{t*}) \qquad (2.4)$$

скалярного уравнения [5] $\mu^{\cdot}=-{}^1/_2(\omega\cdot\lambda)$. Из общих решений (2.2)—(2.3) следуют соответствующие формулы сложения вращений, заданных векторами λ_1, λ_2 и λ_1, λ_{2*} (обозначения введены по аналогии с векторами из п. 1). При этом общее решение (2.2) определяет правило сложения векторов λ_1, λ_2 неподвижных относительно базиса $\mathbf{I}$, а общее решение (2.3) определяет правило сложения векторов λ_1, λ_{2*}, связанных с телом. Из решений (2.2)—(2.4) следуют также известные формулы умножения кватернионов [5]. В частности, общему решению (2.3) (в преобразуемом базисе $\mathbf{J}$) и решению (2.4) отвечают формулы умножения так называемых собственных кватернионов вращения.

В [5] отмечено, что формулы умножения собственных кватернионов не имеют векторного смысла. Это утверждение справедливо только в том случае, если рассматривать такие формулы в проекциях на неподвижный базис $\mathbf{I}$. В то же время по отношению к подвижному базису $\mathbf{J}$ векторный смысл этих формул сохраняется, так как компоненты собственных кватернионов вращения являются координатами в базисе $\mathbf{J}$ слагаемых векторов λ_1, λ_{2*}, фиксированных в этом же базисе.

С помощью решений (2.2)—(2.4) получим далее общие решения кинематических уравнений для некоторых новых векторов вращения [1, 6].

3. Возможности применения рассмотренного в п. 1 вектора ϑ и соответствующих ему правил сложения вращений твердого тела ограничены диапазоном изменения угла результирующего вращения $0 \leqslant \varphi < \pi$. При $\varphi=\pi$ модуль вектора $\boldsymbol{\vartheta}$ вырождается, обращаясь в бесконечность. В то же время для определения углового положения твердого тела при изменении угла φ в диапазоне $0<\varphi<2\pi$ могут быть использованы векторы [1, 6] $\boldsymbol{\tau}=\tau\mathbf{n}$, где $\tau=k_\tau \operatorname{tg}(\varphi/4)$, k_τ – вещественные положительные числа. При изменении угла φ в диапазоне $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ модули τ изменяются в пределах $0 \leqslant \tau \leqslant k_\tau$. Далее будем полагать $k_\tau=1$ и использовать обозначение $\mathbf{y}=\operatorname{tg}(\varphi/4)\mathbf{n}$.

Поставив в соответствие вектору $\mathbf{y}$ кососимметрический оператор $\mathbf{Y}$, запишем связь оператора вращения $\mathbf{R}$ (см. (1.2)) с оператором $\mathbf{Y}$ в форме [6]: $\mathbf{R}=\mathbf{E}+4(1+y^2)^{-2}((1-y^2)\mathbf{Y}+2\mathbf{Y}^2)$, где $y^2=(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})$. Это выражение показывает, что матрица оператора $\mathbf{R}$ (матрица направляющих косинусов [3–5]) может быть однозначно выражена через координаты вектора $\mathbf{y}$ в базисах $\mathbf{I}$ или $\mathbf{J}$.

Кинематические дифференциальные уравнения для вектора $\mathbf{y}$ имеют вид [1]:

$$\mathbf{y}^{\boldsymbol{\cdot}}={}^1/_4(1-y^2)\boldsymbol{\omega}-{}^1/_2\mathbf{y}\times\boldsymbol{\omega}+{}^1/_2(\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{y} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{y}^*={}^1/_4(1-y^2)\boldsymbol{\omega}+{}^1/_2\mathbf{y}\times\boldsymbol{\omega}+{}^1/_2(\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{y} \tag{3.2}$$

где $\mathbf{y}^{\boldsymbol{\cdot}}$, $\mathbf{y}^*$ – абсолютная и относительная производные вектора $\mathbf{y}$.

Найдем общие решения кинематических уравнений (3.1), (3.2). Предварительно выразим связь вектора $\mathbf{y}$ с вектором $\boldsymbol{\lambda}$ и параметром μ соотношением

$$\mathbf{y}=(1+\mu)^{-1}\boldsymbol{\lambda} \tag{3.3}$$

а выражения $\boldsymbol{\lambda}$, μ через $\mathbf{y}$ запишем в виде

$$\boldsymbol{\lambda}=2(1+y^2)^{-1}\mathbf{y}, \quad \mu=(1+y^2)^{-1}(1-y^2) \tag{3.4}$$

По аналогии с векторами $\boldsymbol{\lambda}_1=\boldsymbol{\lambda}_{1*}$, $\boldsymbol{\lambda}_t$, $\boldsymbol{\lambda}_{t*}$ (см. п. 2) введем векторы $\mathbf{y}_1=\mathbf{y}_{1*}$, $\mathbf{y}_t$, $\mathbf{y}_{t*}$ и представим с помощью соотношений (3.4) решения (2.2)–(2.4) в виде

$$\boldsymbol{\lambda}=2((1+y_1^2)(1+y_t^2))^{-1}((1-y_1^2)\mathbf{y}_t+(1-y_t^2)\mathbf{y}_t-2\mathbf{y}_1\times y_t) \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_*=2((1+y_1^2)(1+y_{t*}^2))^{-1}((1-y_1^2)\mathbf{y}_{t*}+(1-y_{t*}^2)\mathbf{y}_1+2\mathbf{y}_1\times\mathbf{y}_{t*}) \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\mu&=((1+y_1^2)(1+y_t^2))^{-1}((1-y_1^2)(1-y_t^2)-4(\mathbf{y}_1\cdot\mathbf{y}_t))=\\&=((1+y_1^2)(1+y_{t*}^2))^{-1}((1-y_1^2)(1-y_{t*}^2)-4(\mathbf{y}_1\cdot\mathbf{y}_{t*}))\end{aligned} \tag{3.7}$$

Подставив выражения (3.5)–(3.7) в соотношения типа (3.3), получаем после преобразований искомые общие решения

$$\mathbf{y}=(1-2(\mathbf{y}_1\cdot\mathbf{y}_t)+y_1^2y_t^2)^{-1}((1-y_1^2)\mathbf{y}_t+(1-y_t^2)\mathbf{y}_1-2\mathbf{y}_1\times\mathbf{y}_t) \tag{3.8}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{y}_*=(1-2(\mathbf{y}_1\cdot\mathbf{y}_{t*})+y_1^2y_{t*}^2)^{-1}((1-y_1^2)\mathbf{y}_{t*}+(1-y_{t*}^2)\mathbf{y}_1+2\mathbf{y}_1\times\mathbf{y}_{t*}) \tag{3.9}$$

По аналогии с решениями (1.7), (2.2) решение (3.8) определяет соответствующее правило сложения вращений твердого тела, оси которых неподвижны относительно базиса $\mathbf{I}$, а решение (3.9) определяет (согласно решениям (1.12), (2.3)) правило сложения вращений, оси которых связаны с телом.

Решения (3.8), (3.9) можно обобщить на случай использования произвольных векторов $\boldsymbol{\tau}$, вводя замены $\mathbf{y}=(1/k_\tau)\boldsymbol{\tau}$, $y=(1/k_\tau)\tau$. Тогда, например, из решения (3.9) следует общее решение соответствующего вектору $\boldsymbol{\tau}$ кинематического уравнения [1]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}_*&=(k_\tau^2-2(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_{t*})+(\tau_1^2\tau_{t*}^2/k_\tau^2))^{-1}((k_\tau^2-\tau_1^2)\boldsymbol{\tau}_{t*}+\\&+(k_\tau^2-\tau_{t*}^2)\boldsymbol{\tau}_1+2k_\tau\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_{t*})\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{\tau}_1=k_\tau\mathbf{y}_1=k_\tau\mathbf{y}_{1*}, \quad \boldsymbol{\tau}_{t*}=k_\tau\mathbf{y}_{t*}, \quad \tau_1=k_\tau y_1, \quad \tau_{t*}=k_\tau y_{t*}$$

4. Наряду с векторами $\boldsymbol{\tau}=k_\tau \operatorname{tg}(\varphi/4)\mathbf{n}$ представляют интерес векторы [1] $\boldsymbol{\rho}=\rho\mathbf{n}$, где $\rho=k_\rho \operatorname{ctg}(\varphi/4)$, k_ρ — вещественные положительные числа. С помощью векторов $\boldsymbol{\rho}$ также может быть определено угловое положение твердого тела при его конечном вращении на углы $0<\varphi<2\pi$. Если введем угол $\psi=2\pi-\varphi$ и учтем, что $\operatorname{ctg}(\varphi/4)=\operatorname{tg}(\psi/4)$, то получим равенство $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\sigma}$, где $\boldsymbol{\sigma}=k_\rho \operatorname{tg}(\psi/4)\mathbf{n}$. Поэтому все сказанное далее о векторах вида $\boldsymbol{\rho}$ будет справедливо и для векторов вида $\boldsymbol{\sigma}$.

Рассмотрим случай $k_\rho=1$, $\boldsymbol{\rho}=\mathbf{z}=\operatorname{ctg}(\varphi/4)\mathbf{n}$. Оператор вращения $\mathbf{R}$ может быть представлен в этом случае разложением $\mathbf{R}=\mathbf{E}+4(1+z^2)^{-2}((1-z^2)\mathbf{Z}+ +2\mathbf{Z}^2)$, где $\mathbf{Z}$ — кососимметрический оператор, соответствующий вектору $\mathbf{z}$, $z^2=(\mathbf{z}\cdot\mathbf{z})$.

Обозначив через $\mathbf{z}^{\bullet}$ и $\mathbf{z}^*$ соответственно абсолютную и относительную производные вектора $\mathbf{z}$, запишем кинематические уравнения для вектора $\mathbf{z}$ в форме [1]:

$$\mathbf{z}^{\bullet}=-{}^1/_4(1-z^2)\boldsymbol{\omega}-{}^1/_2\mathbf{z}\times\boldsymbol{\omega}-{}^1/_2(\mathbf{z}\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{z} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{z}^*=-{}^1/_4(1-z^2)\boldsymbol{\omega}+{}^1/_2\mathbf{z}\times\boldsymbol{\omega}-{}^1/_2(\mathbf{z}\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{z} \tag{4.2}$$

Соответствующие общие решения уравнений (4.1), (4.2) можно получить из решений (3.8), (3.9) путем введения в них замен типа $\mathbf{y}=(1/z^2)\mathbf{z}$ и $y=1/z$. Тогда после выполнения таких замен и последующих преобразований приходим к искомым общим решениям

$$\mathbf{z}=(z_1^2+2(\mathbf{z}_1\cdot\mathbf{z}_t)+z_t^2)^{-1}((z_t^2-1)\mathbf{z}_1+(z_1^2-1)\mathbf{z}_t-2\mathbf{z}\times\mathbf{z}_t) \tag{4.3}$$

$$\mathbf{z}=\mathbf{z}_*=(z_1^2+2(\mathbf{z}_1\mathbf{z}_{t*})+z_{t*}^2)^{-1}((z_{t*}^2-1)\mathbf{z}_1+(z_1^2-1)\mathbf{z}_{t*}+2\mathbf{z}_1\times\mathbf{z}_{t*}) \tag{4.4}$$

Физический смысл решений (4.3), (4.4) аналогичен смыслу решений (3.8), (3.9). Если введем, например, в решении (4.4) замены типа $\mathbf{z}= =(1/k_\rho)\boldsymbol{\rho}$, $z=(1/k_\rho)\rho$, то получим (подобно решению (3.10)) общее решение соответствующего вектору $\boldsymbol{\rho}$ кинематического уравнения [1]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_*=(\rho_1^2+2(\boldsymbol{\rho}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_{t*})+\rho_{t*}^2)^{-1}((\rho_1^2-k_\rho^2)\boldsymbol{\rho}_{t*}+\\ +(\rho_{t*}^2-k_\rho^2)\boldsymbol{\rho}_1+2k_\rho(\boldsymbol{\rho}_1\times\boldsymbol{\rho}_{t*}))\end{aligned} \tag{4.5}$$

Заметим, что решения (3.10), (4.5) удовлетворяют первому интегралу соответствующих им кинематических уравнений $(\boldsymbol{\tau}_*\cdot\boldsymbol{\rho}_*)=k_\rho k_\tau$.

5. Все рассмотренные выше общие решения кинематических уравнений совпадают с точностью до обозначений с соответствующими формулами сложения векторов вращений. Поэтому полученные общие решения (3.8) — (3.10), (4.3) — (4.5) можно рассматривать также как новые формулы сложения вращений твердого тела, заданных векторами, фиксированными соответственно в неподвижном и подвижном базисах. Из этих формул можно получить «комбинированные» формулы сложения вращений, в которых слагаемые вращения заданы векторами с модулями, определяемыми различными тригонометрическими функциями углов вращений. В качестве примеров приведем две формулы сложения векторов вращений

$$\mathbf{y}_{1,2*}=(z_1^2-2(\mathbf{z}_1\cdot\mathbf{y}_{2*})+y_{2*}^2)^{-1}((z_1^2-1)\mathbf{y}_{2*}+(1-y_{2*}^2)\mathbf{z}_1+2\mathbf{z}_1\times\mathbf{y}_{2*}) \tag{5.1}$$

$$\mathbf{z}_{1,2*}=(1+2(\mathbf{z}_1\cdot\mathbf{y}_{2*})+z_1^2y_{2*}^2)^{-1}((z_1^2-1)\mathbf{y}_{2*}+(1-y_{2*}^2)\mathbf{z}_1+2\mathbf{z}_1\times\mathbf{y}_{2*}) \tag{5.2}$$

Формула (5.1) следует из решения (3.9) после введения в нем замен $y_1=1/z_1$, $\mathbf{y}_1=(1/z_1^2)\mathbf{z}_1$, $\mathbf{y}_{t*}=\mathbf{y}_{2*}$, а формула (5.2) — из решения (4.4) после введения замен $z_{t*}=1/y_{2*}$, $\mathbf{z}_{t*}=(1/y_{2*}^2)\mathbf{y}_{2*}$. Формула (5.2) представляет интерес совместно с решением (3.9) в задачах синтеза специализированных рекуррентных методов численного интегрирования уравнений (4.2), (3.2) [6].

Решение (3.9) целесообразно использовать при изменении угла φ в диапазоне $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, а формулу (5.2) — в диапазоне $\pi\leqslant\varphi\leqslant2\pi$. При этом модуль вектора $\mathbf{y}$ будет изменяться в диапазоне $0\leqslant y\leqslant1$, а модуль вектора $\mathbf{z}$ — в диапазоне $0\leqslant z\leqslant1$. Такой диапазон изменения модулей векторов наиболее приемлем при численном интегрировании уравнений (3.2), (4.2) на вычислительных машинах с фиксированной запятой.

Рассмотрим для примера получаемые на основе решения (3.9) и формулы (5.2) рекуррентные методы второго порядка точности для вычислений координат векторов $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ по квазикоординатам [6] $q_{n+1}=\int\omega dt$, $t_n\leqslant t\leqslant t_n+h$, где $\omega=[\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ —

матрица-столбец, составленная из координат вектора ω в базисе J (T — знак транспонирования), h — малый временной шаг вычислений, t_n — момент времени, соответствующий началу $(n+1)$-го шага:

$$y_{n+1}=(1-{}^1/_2 y_n^T q_{n+1}+{}^1/_{16} y_n^2 \overset{2}{q}_{n+1})^{-1}[{}^1/_4(1-y_n^2)q_{n+1}+(1-{}^1/_{16}\overset{2}{q}_{n+1})y_n+{}^1/_2 Y_n q_{n+1}] \tag{5.3}$$

$$z_{n+1}=(1+{}^1/_2 z_n^T q_{n+1}+{}^1/_{16} z_n^2 \overset{2}{q}_{n+1})^{-1}[-{}^1/_4(1-z_n^2)q_{n+1}+(1-{}^1/_{16}\overset{2}{q}_{n+1})z_n+{}^1/_2 Z_n q_{n+1}] \tag{5.4}$$

Здесь $\overset{2}{q}_{n+1}=\overset{T}{q}_{n+1}q_{n+1}$; индексы n, $n+1$ указывают матрицы-столбцы, соответствующие моментам времени t_n и t_n+h; $y_n^2=y_n^T y_n$, $z_n^2=z_n^T z_n$, Y_n, Z_n — кососимметрические матрицы [6] размером 3×3, соответствующие матрицам-столбцам y_n, z_n.

Методы (5.3), (5.4) имеют с точностью до обозначений и знаков один и тот же вид, что позволяет значительно упростить их совместную численную реализацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Панов А. П.* Кинематические дифференциальные уравнения для собственных векторов операторов вращения твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 26–32.
2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука. 1974. 431 с.
3. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз. 1961. 824 с.
4. *Панов А. П.* Об операторных кинематических уравнениях вращения твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 44–50.
5. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука. 1973. 320 с.
6. *Панов А. П.* О выборе кинематических параметров и уравнений вращения для численного интегрирования в ЦВМ // Кибернетика и вычислительная техника. Вып. 62. Киев: Наук. думка. 1984. С. 104–111.

Киев

Поступила в редакцию
10.IX.1985