МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1987

УДК 531.383

ВОЗМУЩАЮЩИЕ МОМЕНТЫ В ПОПЛАВКОВОМ ГИРОСКОПЕ С УПРУГИМ КОРПУСОМ ПОПЛАВКА НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ

АНДРЕЙЧЕНКО К. П., МОГИЛЕВИЧ Л. И.

Исследуется влияние упругих деформаций корпуса поплавка в гироскопе на вибрирующем основании с гидростатическим подвесом гироузла на вибрационный возмущающий момент. Учитываются силы инерции движения слоя вязкой несжимаемой жидкости, окружающей поплавок, и упругой оболочки корпуса поплавка. Найденные главный вектор и главный момент, действующие на абсолютно жесткую рамку поплавка, показывают значительность влияния на них упругих деформаций и перемещений корпуса поплавка при установившейся вибрации в широком диапазоне частот вибрации.

1. Рассмотрим поплавковый гироскоп, условно представленный на фиг. 1. Корпус *1* поплавка является замкнутой упругой цилиндрической оболочкой толщины h_0 с радиусом срединной поверхности $R \gg h_0$ и длины $2l_1$. На торцах оболочка *1* соединяется жесткой заделкой с торцевыми дисками абсолютно жесткой рамки *2*. Ротор гиромотора *3* и корпус прибора *4* являются абсолютно жесткими. Опоры гиромотора *5* обладают упругой податливостью. Малый зазор между стенками поплавка и камеры радиусов R_1 и R_0 полностью заполнен вязкой несжимаемой жидкостью для разгрузки опор поплавка. Наружная поверхность корпуса поплавка и поверхность камеры образуют цилиндр в цилиндре длины $2l_1$ и $2l_0$ соответственно. Радиальный зазор цилиндрической щели $\delta = R_0 - R_1 \ll R_1$. Торцевые зазоры выполнены так, что отсутствует перетекание жидкости из цилиндрической щели в торцевые. В случае абсолютно жесткого корпуса поплавка подобная задача рассматривалась в [1].

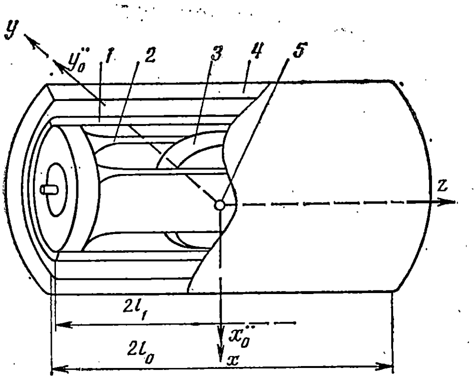
Пусть система координат $Oxyz$ связана с основанием прибора (фиг. 2), система $O_1x_1y_1z_1$ — с рамкой поплавка, а $O_2x_2y_2z_2$ — с ротором гиромотора. При этом точка O совпадает с геометрическим центром камеры, O_1 — с геометрическим центром и центром масс рамки поплавка, а O_2 — с центром масс ротора гиромотора.

Корпус прибора (основание) совершает переносное поступательное движение относительно инерциальной системы координат с ускорением, имеющим проекции $\ddot{x}_0(t)$, $\ddot{y}_0(t)$, 0 на оси декартовой системы координат $Oxyz$. Здесь точка означает дифференцирование по времени t, сила притяжения Земли опускается.

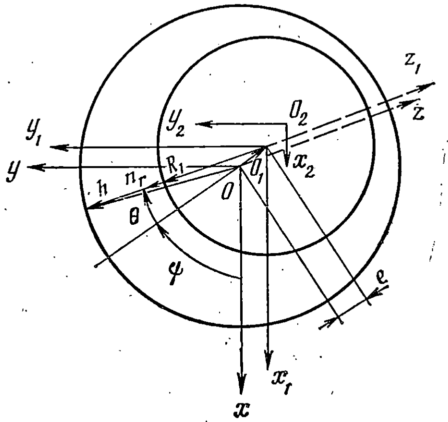
Через x, y обозначим перемещения центра масс рамки поплавка относительно камеры, а через x_1, y_1 — перемещения центра масс ротора гиромотора относительно рамки поплавка. Перемещения вдоль Oz рамки поплавка и вдоль O_1z_1 ротора гиромотора отсутствуют.

Амплитуда колебаний рамки поплавка относительно камеры и амплитуда прогиба корпуса поплавка как упругой оболочки значительно меньше δ.

Пусть центр масс рамки O_1, двигаясь относительно камеры $Oxyz$, совпадает в данный момент времени с фиксированным относительно $Oxyz$ полюсом O_1^* (e, ψ, 0) цилиндрической системы координат r, θ, z. За полярную ось примем прямую, проходящую через O и O_1^*, наклоненную под углом ψ к оси Ox. Эксцентриситет OO_1^* обозначим через e (фиг. 2). Радиальный зазор между стенкой камеры и корпусом поплавка на абсолютно жестких торцевых дисках определяется с точностью до $(e/R_0) \ll 1$ формулой $h = \delta + e\cos\theta$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Закон движения основания (корпуса прибора) относительно инерциальной системы координат имеет вид (разложение в ряд Фурье; суммирование здесь и далее по n от 1 до ∞):

$$x_0(t)=x_{m0}f_{0c}(\omega t),\ y_0(t)=y_{m0}f_{0s}(\omega t),\ z_0(t)\equiv 0$$

$$f_{0c}(\omega t)=\sum(a_{n0c}\sin n\omega t-b_{n0c}\cos n\omega t) \qquad (1.1)$$

$$f_{0s}(\omega t)=\sum(a_{n0s}\sin n\omega t-b_{n0s}\cos n\omega t)$$

а закон движения центра масс рамки поплавка относительно камеры запишется в виде

$$x=x_mf_c(\omega t),\ y=y_mf_s(\omega t),\ z\equiv 0$$

$$f_c(\omega t)=\sum(a_{nc}\sin n\omega t-b_{nc}\cos n\omega t) \qquad (1.2)$$

$$f_s(\omega t)=\sum(a_{ns}\sin n\omega t-b_{ns}\cos n\omega t)$$

Здесь x_{m0}, y_{m0}, x_m, y_m — амплитуды колебаний корпуса прибора и рамки поплавка, ω — частота колебаний.

Линейные уравнения движения абсолютно жесткой рамки поплавка и ротора гиромотора в случае внешнего источника вибрации (переносное ускорение) согласно второму закону Ньютона имеют вид

$$\begin{aligned}
m_1[x_0^{\cdot\cdot}(t)+x^{\cdot\cdot}(t)]&=-n_0x(t)+k_xx_1^{\cdot}(t)+n_xx_1(t)+N_{0x}\\
m_1[y_0^{\cdot\cdot}(t)+y^{\cdot\cdot}(t)]&=-n_0y(t)+k_yy_1^{\cdot}(t)+n_yy_1(t)+N_{0y}\\
m_2[x_0^{\cdot\cdot}(t)+x^{\cdot\cdot}(t)+x_1^{\cdot\cdot}(t)]&=-k_xx_1^{\cdot}(t)-n_xx_1(t)\\
m_2[y_0^{\cdot\cdot}(t)+y^{\cdot\cdot}(t)+y_1^{\cdot\cdot}(t)]&=-k_yy_1^{\cdot}(t)-n_yy_1(t)
\end{aligned} \qquad (1.3)$$

Здесь введены конструктивные параметры гироузла: m_1, m_2 — массы рамки поплавка и ротора гиромотора соответственно; k_x, k_y — удельные коэффициенты демпфирования колебаний ротора в опорах в направлениях O_1x_1 и O_1y_1; n_x, n_y — коэффициенты, характеризующие упругую жесткость опор ротора в направлениях O_1x_1 и O_1y_1; n_0 — упругая жесткость устройств, центрирующих поплавок относительно камеры; N_{0x}, N_{0y} — компоненты главного вектора, действующего на абсолютно жесткую рамку со стороны упругого корпуса поплавка в направлениях O_1x_1 и O_1y_1. При этом в силу (1.1), (1.2) закон движения ротора относительно рамки поплавка представляется в виде

$$x_1=x_{m1}f_{1c}(\omega t),\ y_1=y_{m1}f_{1s}(\omega t),\ z_1\equiv 0 \qquad (1.4)$$

$$f_{1c}(\omega t)=\sum(a_{n1c}\sin n\omega t-b_{n1c}\cos n\omega t)$$

$$f_{1s}(\omega t)=\sum(a_{n1s}\sin n\omega t-b_{n1s}\cos n\omega t)$$

Здесь x_{m1}, y_{m1} — амплитуды колебаний ротора. Следует отметить, что в формулах (1.1), (1.2), (1.4) опущена постоянная составляющая, которая не оказывает влияния на постоянную составляющую вибрационного возмущающего момента, являющуюся объектом исследования.

Введем безразмерные переменные

$$
\begin{gathered}
\xi=(l-R_1)/\delta,\ \theta=\theta,\ \zeta=z/l,\ \tau=\omega t\\
v_r=e\omega u_\xi,\ v_\theta=e\omega(R_1/\delta)u_\theta,\ v_z=e\omega(l_1/\delta)u_\zeta\\
p=p_0-\rho R_1\omega^2[1+(\delta/R_1)\xi][x_{m0}f_{0c}''(\tau)\cos(\theta+\psi)+\\
+y_{m0}f_{0s}''(\tau)\sin(\theta+\psi)]+\rho\nu e\omega R_1^2\delta^{-3}P\\
u=u_mW_1,\ v=v_mW_2,\ w=w_mW_3,\ a^2=h_0^2/(12R^2)\\
\varepsilon=(\delta/R_1)\ll 1,\ \lambda=(e/\delta)\ll 1,\ \mathrm{Re}=\delta^2\omega/\nu,\ c^2=E/[\rho_0(1-\mu^2)]
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

Здесь r, θ, z — цилиндрические координаты (см. фиг. 2), v_r, v_θ, v_z — проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат, p — давление жидкости, p_0 — уровень отсчета давления, ρ — плотность жидкости, ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости, u, v, w — перемещения корпуса-оболочки в направлении осей $-z$, θ, r соответственно, $s^*=-z$, θ, r — локальные координаты в срединной поверхности оболочки и по нормали к ней, причем ось s^* противоположна оси z, чтобы тройка s^*, θ, r была правой, ρ_0 — плотность материала оболочки, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона материала оболочки; штрих означает дифференцирование по τ.

Для тонкого слоя жидкости в цилиндрической щели (с точностью до ε) получим уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости [2, 3] в переменных (1.5):

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial P}{\partial\xi}=0,\qquad \mathrm{Re}\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial\tau}+\lambda\left(u_\xi\frac{\partial u_\theta}{\partial\xi}+u_\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_\zeta\frac{\partial u_\theta}{\partial\zeta}\right)\right]=\\
=-\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{\partial^2u_\theta}{\partial\xi^2},\qquad \mathrm{Re}\left[\frac{\partial u_\zeta}{\partial\tau}+\lambda\left(u_\xi\frac{\partial u_\zeta}{\partial\xi}+u_\theta\frac{\partial u_\zeta}{\partial\theta}+u_\zeta\frac{\partial u_\zeta}{\partial\xi}\right)\right]=\\
=-\left(\frac{R_1}{l_1}\right)^2\frac{\partial P}{\partial\zeta}+\frac{\partial^2u_\zeta}{\partial\xi^2},\qquad \frac{\partial u_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\zeta}{\partial\zeta}=0
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

и уравнения динамики оболочки-корпуса поплавка [2, 4]:

$$
\begin{gathered}
\frac{c^2}{R^2\omega^2}\left(L_1W_1+\frac{v_m}{u_m}L_{12}W_2+\frac{w_m}{u_m}L_{13}W_3\right)-\frac{\partial^2W_1}{\partial\tau^2}=\\
=\frac{\rho R_1e}{\rho_0h_0\,\mathrm{Re}\,u_m}\left(\frac{l_1}{R_1}\frac{\partial u_\zeta}{\partial\xi}+\frac{R_1}{l_1}\lambda\frac{w_m}{e}\frac{\partial W_3}{\partial\zeta}Q\right)\Bigg|_{\xi=\lambda\frac{w_m}{e}W_3}\\
\frac{c^2}{R^2\omega^2}\left(\frac{u_m}{v_m}L_{21}W_1+L_{22}W_2+\frac{w_m}{u_m}L_{23}W_3\right)-\frac{\partial^2W_2}{\partial\tau^2}=-\left[\frac{x_{m0}}{v_m}f_{0c}''(\tau)+\frac{x_m}{v_m}f_c''(\tau)\right]\sin(\theta+\psi)+\\
+\left[\frac{y_{m0}}{v_m}f_{0s}''(\tau)+\frac{y_m}{v_m}f_s''(\tau)\right]\cos(\theta+\psi)-\frac{\rho R_1e}{\rho_0h_0\mathrm{Re}\,v_m}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\xi}+\lambda\frac{w_m}{e}\frac{\partial W_3}{\partial\theta}Q\right)\Bigg|_{\xi=\lambda\frac{w_m}{e}W_3}\\
\frac{c^2}{R^2\omega^2}\left(\frac{u_m}{w_m}L_{31}W_1+\frac{v_m}{w_m}L_{32}W_2+L_{33}W_3\right)+\frac{\partial^2W_3}{\partial\tau^2}=\\
=-\left[\frac{x_{m0}}{w_m}f_{0c}''(\tau)+\frac{x_m}{w_m}f_c''(\tau)\right]\cos(\theta+\psi)-\\
-\left[\frac{y_{m0}}{w_m}f_{0s}''(\tau)+\frac{y_m}{w_m}f_s''(\tau)\right]\sin(\theta+\psi)-\frac{\rho R_1e}{\rho_0h_0\,\mathrm{Re}\,w_m\varepsilon}Q
\end{gathered}
\tag{1.7}
$$

$$
Q=\frac{\varepsilon^2}{\rho\nu\lambda\omega}p_0+P+\varepsilon\,\mathrm{Re}\left[\frac{x_{m0}}{e}f_{0c}''(\tau)\cos(\theta+\psi)+\frac{y_{m0}}{e}f_{0s}''(\tau)\sin(\theta+\psi)\right]
$$

$$L_{11}=\left(\frac{R}{l_1}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},\qquad L_{12}=L_{21}=-\frac{1+\mu}{2}\frac{R}{l_1}\frac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial\theta},$$

$$L_{13}=L_{31}=-\mu\frac{R}{l_1}\frac{\partial}{\partial\zeta},\qquad L_{22}=\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{R}{l_1}\right)^2(1+4a^2)\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+(1+a^2)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$L_{23}=L_{32}=\frac{\partial}{\partial\theta}-a^2\left[(2-\mu)\left(\frac{R}{l_1}\right)^2\frac{\partial^3}{\partial\zeta^2\,\partial\theta}+\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\right]$$

$$L_{33}=1+a^2\left[\left(\frac{R}{l_1}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]^2,\qquad \varepsilon\ll 1$$

Граничные условия, когда расход жидкости при перетекании ее из цилиндрической щели в торцевые пренебрежимо мал по сравнению с расходом в цилиндрической щели, имеют вид

$$\begin{gathered} u_\xi=u_\theta=u_\zeta=0 \text{ при } \xi=1+\lambda\cos\theta \\ u_\xi=(x_m/e)f_c'(\tau)\cos(\theta+\psi)+(y_m/e)f_s'(\tau)\sin(\theta+\psi)+ \\ +(w_m/e)\partial W_3/\partial\tau,\ u_\theta=u_\zeta=0 \text{ при } \xi=\lambda(w_m/e)W_3 \\ \partial P/\partial\zeta=0 \text{ при } \zeta=1,\ \zeta=0 \\ W_1=W_2=W_3=\partial W_3/\partial\zeta=0 \text{ при } \zeta=\pm 1 \\ W_1=\partial W_2/\partial\zeta=\partial W_3/\partial\zeta=\partial^3 W_3/\partial\zeta^3=0 \text{ при } \zeta=0,\ \varepsilon\ll 1 \end{gathered} \tag{1.8}$$

Учитывая симметрию задачи по ζ и считая, что контакт корпуса поплавка на торцах с абсолютно жесткими торцевыми дисками рамки осуществляется по линии соединения диска со срединной поверхностью корпуса, получим компоненты главного вектора вдоль осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 в виде

$$\begin{gathered} N_{0x}=c^2\rho_0h_0\int_0^{2\pi}\left[(1-\mu-2\mu a^2)\frac{R}{l_1}v_m\frac{\partial W_2}{\partial\zeta}\sin(\theta+\psi)+\right. \\ \left.\left.+2a^2\left(\frac{R}{l_1}\right)^3 w_m\frac{\partial^3W_3}{\partial\zeta^3}\cos(\theta+\psi)\right]\right|_{\zeta=1}d\theta \\ N_{0y}=-c^2\rho_0h_0\int_0^{2\pi}\left[(1-\mu-2\mu a^2)\frac{R}{l_1}v_m\frac{\partial W_2}{\partial\zeta}\cos(\theta+\psi)-\right. \\ \left.\left.-2a^2\left(\frac{R}{l_1}\right)^3 w_m\frac{\partial^3w_3}{\partial\zeta^3}\sin(\theta+\psi)\right]\right|_{\zeta=1}d\theta \\ N_{0z}=0 \end{gathered} \tag{1.9}$$

Для главного момента компоненты по осям O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 имеют вид

$$\begin{gathered} L_{0x}=L_{0y}=0 \\ L_{0z}=-c^2\rho_0h_0R\int_0^{2\pi}(1-\mu)(1+4a^2)\frac{R}{l_1}v_m\frac{\partial W_2}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta=1}d\theta \end{gathered} \tag{1.10}$$

Постоянная по времени составляющая главного момента (вибрационного возмущающего момента) определяется формулой

$$\langle L_{0z}\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L_{0z}\,d\tau. \tag{1.11}$$

2. Решим нелинейную связанную задачу упругогидродинамики (1.3), (1.6)–(1.8) методом возмущений. Решение задачи (1.6)–(1.8) ищется в виде асимптотического разложения [1, 2] по степеням малого пара-

метра λ:

$$P=P_0+\lambda P_1+\ldots,\quad u_\xi=u_{\xi 0}+\lambda u_{\xi 1}+\ldots$$
$$u_\theta=u_{\theta 0}+\lambda u_{\theta 1}+\ldots,\quad u_\zeta=u_{\zeta 0}+\lambda u_{\zeta 1}+\ldots$$
$$W_1=W_{10}+\lambda W_{11}+\ldots,\quad W_2=W_{20}+\lambda W_{21}+\ldots$$
$$W_3=W_{30}+\lambda W_{31}+\ldots \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в систему уравнений (1.6), (1.7), относя граничные условия (1.8) на невозмущенные поверхности $\xi=1$ и $\xi=0$, разложением искомых переменных в ряд Тейлора в нулевом приближении по λ получим линейную задачу упругогидродинамики. Учитывая вид граничных условий (1.8) и формулы (1.1), (1.2), решение этой задачи ищем в виде [1]:

$$T_0=\sum[(A_{1nT}\cos\theta+B_{1nT}\sin\theta)\cos n\tau+(C_{1nT}\cos\theta+D_{1nT}\sin\theta)\sin n\tau]$$
$$W_{10}=\zeta(1-\zeta^2)\left\{{}^1/{}_2 a_{1001}+\sum[(a_{11n1}\cos\theta+b_{11n1}\sin\theta)\cos n\tau+\right.$$
$$\left.+(c_{11n1}\cos\theta+d_{11n1}\sin\theta)\sin n\tau]\right\}$$
$$W_{20}=(1-\zeta^2)\sum[(b_{21n1}\cos\theta+a_{21n1}\sin\theta)\cos n\tau+(d_{21n1}\cos\theta+c_{21n1}\sin\theta)\sin n\tau]$$
$$W_{30}=(1-\zeta^2)^2\left\{{}^1/{}_2 a_{3001}+\sum[(a_{31n1}\cos\theta+b_{31n1}\sin\theta)\cos n\tau+\right.$$
$$\left.+(c_{31n1}\cos\theta+d_{31n1}\sin\theta)\sin n\tau]\right\} \tag{2.2}$$

Здесь под T_0 понимается P_0, $u_{\theta 0}$, $u_{\xi 0}$, причем коэффициенты A_{1nT}, B_{1nT}, C_{1nT}, D_{1nT} для P_0 зависят только от ξ, для $u_{\theta 0}$, $u_{\xi 0}$ они зависят от ξ и ζ. Коэффициенты в рядах Фурье для перемещений корпуса поплавка являются постоянными. Выбор зависимости от ζ упругих перемещений корпуса поплавка W_{i0} $(i=1, 2, 3)$ обусловлен удовлетворением граничных условий (1.8). Подставляя (2.2) в соответствующие уравнения и граничные условия нулевого приближения по λ, приравнивая нулю коэффициенты при соответствующих тригонометрических функциях и применяя процедуру метода Бубнова — Галеркина по ζ в первом приближении к уравнениям динамики оболочки, найдем коэффициенты в формулах (2.2).

Найденные решения задачи в нулевом приближении подставляем в формулы (1.9), (1.10) и находим компоненты главного вектора N_{0x}, N_{0y} и главного момента L_{0z}. При этом в силу интегрирования по θ от 0 до 2π получим, что вибрационный возмущающий момент L_{0z} обращается в нуль. Следовательно, для определения главного момента необходимо рассмотреть первое приближение по λ.

Найденные значения N_{0x}, N_{0y} и формулы (1.1), (1.2), (1.4) подставляем в уравнение (1.3), приравниваем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях и находим коэффициенты Фурье рядов (1.2), (1.4) через коэффициенты рядов (1.1).

3. В первом приближении по λ возмущающий момент (1.10) с учетом уравнений (1.7) запишется в виде

$$L_{0z}=L_{0z}{}^0+\lambda L_{0z}{}^1+\ldots,\quad L_{0z}{}^0=0$$
$$\lambda L_{0z}{}^1=-2\pi\rho_0 h_0 R^2\omega^2 v_m\lambda\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 W_{21}}{\partial\tau^2}d\theta\right]l_1\,d\zeta+$$
$$+2\pi R_1\rho\nu\lambda\omega\varepsilon^{-2}e\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left.\frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}d\theta\right]l_1\,d\zeta-$$
$$-2\pi\rho R_1{}^2\omega^2 w_m\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[x_{m0}f_{0c}''(\tau)\cos(\theta+\psi)+\right.$$
$$\left.+y_{m0}f_{0s}''(\tau)\sin(\theta+\psi)]\frac{\partial W_{30}}{\partial\theta}d\theta\right\}l_1\,d\zeta \tag{3.1}$$

Очевидно, что под знаком интеграла по θ в формуле (3.1) остаются только величины, не зависящие от θ, так как все остальные величины обращаются в нуль после вычисления интеграла по θ. Следовательно, в первом приближении по λ необходимо найти не зависящие от θ величины W_{21}, $u_{\theta 1}$. Для них система уравнений (1.6), (1.7) в первом приближении по λ распадается на две линейные системы. Первая система представляет собой второе уравнение (1.6) и второе уравнение (1.7) с соответствующими граничными условиями (1.8) на невозмущенных поверхностях $\xi=0$ и $\xi=1$. Вторая система не содержит искомых функций и не рассматривается.

Решение ищется в виде рядов Фурье по времени τ аналогичных (2.2), но с коэффициентами, не зависящими от θ [1]. Находя это решение теми же методами, что и нулевое приближение по λ, подставляя его, (2.2) и (1.1) в (3.1), переходя к осредненному за период колебания моменту (1.11), учитывая, что

$$e\cos\psi=-x_m\sum(a_{nc}\sin n\tau-b_{nc}\cos n\tau)$$

$$e\sin\psi=-y_m\sum(a_{ns}\sin n\tau-b_{ns}\cos n\tau)$$

и выражая коэффициенты рядов (1.2), (1.4) через коэффициенты рядов (1.1) (см. п. 2), найдем постоянную составляющую вибрационного возмущающего момента, действующего со стороны упругого корпуса поплавка на абсолютно жесткую рамку поплавка ($\varkappa=R_1/l_1$):

$$\begin{gathered}
\langle L_{0z}\rangle=m_4\omega^2x_{m0}y_{m0}/(\varepsilon\,\mathrm{Re})\ \Sigma\langle-(1+{}^1/_2Z_n)M_3K_3+\\
+[{}^4/_{15}+({}^8/_{35}-{}^8/_{15}\varkappa^2+8\varkappa^4-24\varkappa^5\operatorname{cth}\varkappa^{-1}+24\varkappa^6)\,{}^3/_4Z_n](M_sK_4+\\
+M_6K_5)X_{0n}+2K_3(M_5X_n-M_7Y_n)-{}^1/_8\beta^{-1}\{({}^{512}/_{315}-\\
-{}^{512}/_{105}\varkappa^2+{}^{256}/_5\varkappa^4-768\varkappa^6+2304\varkappa^7\operatorname{cth}\varkappa^{-1}-\\
-2304\varkappa^8)D_2M_1[K_1X_{0n}^2-K_5 12\gamma nY_nX_{0n}-K_4(X_nX_{0n}-\\
-2\alpha\beta^2Y_nX_{0n})-K_3(X_n^2-4\alpha\beta^2X_nY_n+4\alpha^2\beta^4Y_n^2+\\
+144\gamma^2n^2Y_n^2)]+{}^{16}/_{15}K_5(M_1M_8-M_2M_9)+\\
+{}^{16}/_{15}K_4(M_1M_9+M_2M_8)+{}^{32}/_{15}K_3(M_1M_{11}+M_2M_{10})\}+\\
+{}^4/_{15}\varepsilon\,\mathrm{Re}\,n^2(2K_1M_8-K_4M_{10}-K_5M_{11})\rangle
\end{gathered}\tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}
K_1=a_{n0c}b_{n0s}-b_{n0c}a_{n0s},\quad K_2=a_{n0c}a_{n0s}+b_{n0c}b_{n0s}\\
K_3=(A_1B_2-A_2B_1)K_2-(A_1B_1+A_2B_2)K_1\\
K_4=(B_2-A_2)K_2-(B_1+A_1)K_1,\quad K_5=(B_1-A_1)K_2+(B_2+A_2)K_1\\
M_1=[12\gamma n(\operatorname{sh}\beta+\sin\beta)+2\alpha\beta^2(\operatorname{sh}\beta-\sin\beta)](\operatorname{ch}\beta+\cos\beta)^{-1}\\
M_2=[12\gamma n(\operatorname{sh}\beta-\sin\beta)-2\alpha\beta^2(\operatorname{sh}\beta+\sin\beta)](\operatorname{ch}\beta+\cos\beta)^{-1}\\
M_3=[12\gamma n(1+\operatorname{ch}\beta\cos\beta)+2\alpha\beta^2\operatorname{sh}\beta\sin\beta](\operatorname{ch}\beta+\cos\beta)^{-2}\\
M_4=[12\gamma n\operatorname{sh}\beta\sin\beta-2\alpha\beta^2(1+\operatorname{ch}\beta\cos\beta)](\operatorname{ch}\beta+\cos\beta)^{-2},\ M_5=M_3D_1-M_4\beta_{33}d_1,\\
M_6=M_3\beta_{33}d_1+M_4D_1\quad M_7=M_3U_1-M_4U_2,\quad M_8=X_{0n}\beta_{33}d_1,\quad M_9=X_{0n}D_1\\
M_{10}=X_n\beta_{33}d_1-Y_nU_2,\quad M_{11}=X_nD_1-Y_nU_1\\
U_1=2\alpha\beta^2D_1-12\gamma n\beta_{33}d_1,\quad U_2=2\alpha\beta^2\beta_{33}d_1+12\gamma nD_1\\
U_3=M\omega^2n^2D_1-K\omega n\beta_{33}d_1,\quad U_4=M\omega^2n^2\beta_{33}d_1+K\omega nD_1\\
U_5=M\omega^2n^2U_1-K\omega nU_2,\quad U_6=M\omega^2n^2U_2+K\omega nU_1\\
X_{0n}=({}^4/_3)R^2\omega^2n^2c^{-2}D_2^{-1}[d_2-0{,}8d_1+0{,}8d_1\rho R_1/(\rho_0h_0)]\\
X_n=({}^4/_3)R^2\omega^2n^2c^{-2}D_2^{-1}(d_2-0{,}8d_1),\quad Y_n=({}^{16}/_{15})R^2\omega^2n^2c^{-2}D_2^{-1}d_1\rho R_1/(\varepsilon\,\mathrm{Re}\,\rho_0h_0)
\end{gathered}$$

$$Z_n=X_nD_2[(d_2-0{,}8d_1)R^2l_1^{-2}(1-\mu)(1+4a^2)-0{,}6X_nD_2]^{-1}$$
$$M\omega^2n^2=2\alpha\beta^2m_4\omega^2/(\varepsilon\,\mathrm{Re}),\quad K\omega n=12\gamma nm_4\omega^2/(\varepsilon\,\mathrm{Re})$$
$$m_3=2\pi Rh_02l_1\rho_0,\quad m_4=\pi R_1{}^22l_1\rho$$
$$j_1=m_2\omega^2n^2,\quad j_2=k_x\omega n,\quad j_3=k_y\omega n,\quad j_4=n_x-j_1$$
$$j_5=n_y-j_1,\quad j_x=j_4{}^2+j_2{}^2,\quad j_y=j_5{}^2+j_3{}^2$$
$$M_{c1}=n_0-(m_1+m_3+m_2)\omega^2n^2-j_1{}^2j_4/j_x-M\omega^2n^2+$$
$$+m_3\omega^2n^2X_nD_1(d_3+\beta_{33}{}^2d_1\alpha_{11}D_1{}^{-1}+1{,}6d_2-$$
$$-0{,}64d_1)/[3(d_2-0{,}8d_1)]+16X_nU_3/15-8Y_nU_5/15$$
$$M_{c2}=j_1{}^2j_2/j_x+K\omega n+m_3\omega^2n^2X_n\beta_{33}(d_2-0{,}8d_1)/3-$$
$$-16X_nU_4/15+8Y_nU_6/15,\quad M_{s1}=M_{c1}+j_1{}^2(j_4/j_x-j_5/j_y)$$
$$M_{s2}=M_{c2}-j_1{}^2(j_2/j_x-j_3/j_y),\quad M_{0c1}=(m_4-m_1-m_3-m_2)\omega^2n^2-j_1{}^2j_4/j_x-8m_4\omega^2n^2X_nD_1/15+$$
$$+m_3\omega^2n^2X_nD_1(d_3+\beta_{33}{}^2d_1\alpha_{11}D_1{}^{-1}+1{,}6d_2-0{,}64d_1)/[3(d_2-0{,}8d_1)]+8X_{0n}U_3/15$$
$$M_{0c2}=j_1{}^2j_2/j_x+8m_4\omega^2n^2X_n\beta_{33}d_1/15+m_3\omega^2n^2X_n\beta_{33}(d_2-0{,}8d_1)/3-8X_{0n}U_4/15$$
$$M_{0s1}=M_{0c1}+j_1{}^2(j_4/j_x-j_5/j_y)$$
$$M_{0s2}=M_{0c2}-j_1{}^2(j_2/j_x-j_3/j_y)$$
$$A_1=-(M_{0c1}M_{c1}+M_{0c2}M_{c2})/(M_{c1}{}^2+M_{c2}{}^2)$$
$$A_2=(M_{0c1}M_{c2}-M_{0c2}M_{c1})/(M_{c1}{}^2+M_{c2}{}^2)$$
$$B_1=-(M_{0s1}M_{s1}+M_{0s2}M_{s2})/(M_{s1}{}^2+M_{s2}{}^2)$$
$$B_2=(M_{0s1}M_{s2}-M_{0s2}M_{s1})/(M_{s1}{}^2+M_{s2}{}^2)$$
$$d=\alpha_{22}\alpha_{13}-\alpha_{12}\alpha_{23},\quad d_3=\alpha_{11}\alpha_{33}+\alpha_{13}{}^2$$
$$d_2=\alpha_{12}\alpha_{13}-\alpha_{11}\alpha_{23},\quad d_1=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}{}^2$$
$$D_1=\alpha_{33}d_1-\alpha_{23}d_2+\alpha_{13}d,\quad D_2=D_1{}^2+\beta_{33}{}^2d_1{}^2$$
$$B_0=[R^2\omega^2\rho R_1/(c^2\varepsilon\,\mathrm{Re}\,\rho_0h_0)][-{}^{256}/_{315}+256\varkappa^2/105-$$
$$-128\varkappa^4/5+384\varkappa^6-1152\varkappa^7\,\mathrm{cth}\,\varkappa^{-1}+1152\varkappa^8]$$
$$\alpha_{11}=16R^2\omega^2n^2c^{-2}/15-{}^8/_{15}(R/l_1)^2-8(1-\mu)/105$$
$$\alpha_{12}={}^4/_5(R/l_1)(1+\mu),\quad \alpha_{13}={}^{64}/_{105}(R/l_1)\mu$$
$$\alpha_{22}=16R^2\omega^2n^2c^{-2}/15-{}^4/_3(R/l_1)^2(1-\mu)(1+4a^2)-$$
$$-16(1+a^2)/15,\quad \alpha_{23}=-32(1+a^2)/35-{}^{32}/_{15}(R/l_1)^2(2-\mu)a^2$$
$$\alpha_{33}=-256R^2\omega^2n^2c^{-2}/315+256(1+a^2)/315+$$
$$+{}^{128}/_5(R/l_1)^4a^2+{}^{512}/_{105}(R/l_1)^2a^2+2\alpha\beta^2B_0$$
$$\beta_{33}=-12\gamma nB_0,\quad 2\alpha\beta^2=n\beta^3G_1/(G_1{}^2+G_2{}^2)$$
$$12\gamma=-\beta^3G_2/(G_1{}^2+G_2{}^2),\quad G_1=\beta/2-(\sin\beta+\mathrm{sh}\,\beta)/[2(\cos\beta+\mathrm{ch}\,\beta)]$$
$$G_2=(\sin\beta-\mathrm{sh}\,\beta)/[2(\cos\beta+\mathrm{ch}\,\beta)],\quad \beta=[\mathrm{Re}\,n/2]^{1/2}$$

Вычисления, проведенные по формуле (3.2), показывают, что упругие деформации корпуса поплавка сказываются даже для $\omega=O(1)$. Например, в гироприборе со стальным корпусом поплавка и параметрами $R_1=2\cdot10^{-2}$ м, $2l_1=5{,}7\cdot10^{-2}$ м, $h_0=5\cdot10^{-4}$ м, $E=1{,}961\cdot10^{11}$ Па, $\mu=3\cdot10^{-1}$, $\rho_0=7{,}87\cdot10^3$ кг/м^3, $\delta=1\cdot10^{-4}$ м, $\rho=2\cdot10^3$ кг/м^3, $\nu=2{,}53\cdot10^{-4}$ м^2/с, $m_1=2{,}54\cdot10^{-2}$ кг, $m_2=8{,}96\cdot10^{-2}$ кг, $n_0=0$, $n_x=n_y=3{,}53\cdot10^6$ кг/с^2, $k_x=k_y=112$ кг/с вибрационный возмущающий момент (3.2), учитывающий упругие деформации корпуса поплавка, значительно больше, чем в гироприборе с абсолютно жестким корпусом поплавка, для которого справедлива формула (3.2) при $X_n=Y_n=X_{0n}=0$:

ω	1	101	401	701	1001
η_1	3,9	$3{,}3\cdot10^4$	$2{,}03\cdot10^7$	$2{,}60\cdot10^5$	$4{,}84\cdot10^4$
η_2	1	1	1,09	1,71	$4{,}35\cdot10$
ω	4001	7001	10 001	14 001	18 001
η_1	$1{,}38\cdot10^2$	7,27	1,14	1,71	2,46
η_2	0,904	0,942	1,01	1,15	1,35

Здесь $\eta_1=\langle L_{0z}\rangle/\langle L_{0z}\rangle_\infty$ для стального корпуса поплавка, $\eta_2=\langle L_{0z}\rangle/\langle L_{0z}\rangle_\infty$ для бериллиевого; знак ∞ относится к абсолютно жесткому корпусу поплавка; вибрация круговая; размерность ω в рад/с.

Следует отметить, что влияние упругих деформаций на вибрационный возмущающий момент существенно уменьшается с уменьшением линейных размеров цилиндрического корпуса поплавка, увеличением его толщины и уменьшением плотности материала, а также с увеличением модуля Юнга материала корпуса поплавка. Например, в гироприборе с бериллиевым корпусом поплавка и с параметрами $R_1=1\cdot10^{-2}$ м, $2l_1=3\cdot10^{-2}$ м, $h_0=1{,}25\cdot10^{-3}$ м, $E=2{,}943\cdot10^{11}$ Па, $\mu=1\cdot10^{-2}$, $\rho_0=1{,}84\cdot10^3$ кг/м^3, $\delta=2{,}5\cdot10^{-4}$ м, $\rho=2\cdot10^3$ кг/м^3, $\nu=3{,}25\cdot10^{-4}$ м^2/с, $m_1=4{,}04\cdot10^{-3}$ кг, $m_2=1{,}049\cdot10^{-2}$ кг, $n_0=0$, $n_x=n_y=4{,}137\cdot10^5$ кг/с^2, $k_x=k_y=13{,}2$ кг/с величина η_2 меньше величины η_1 согласно выводу.

Кроме момента (3.2) на рамку поплавка действует обусловленный силами инерции переносного движения момент со стороны ротора гиромотора, перемещающегося в опорах относительно рамки поплавка, компоненты которого по осям O_1z_1, O_1x_1, O_1y_1 имеют вид

$$L_{1z}=m_2[y_1(\ddot{x}_0+\ddot{x}+\ddot{x}_1)-x_1(\ddot{y}_0+\ddot{y}+\ddot{y}_1)]$$

$$L_{1x}=L_{1y}=0$$

Определяя постоянную по времени составляющую этого момента

$$\langle L_{1z}\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_{1z}\,d\tau$$

и используя полученные результаты, можно считать, что на самом моменте $\langle L_{1z}\rangle$ упругие деформации корпуса поплавка сказываются мало во всем диапазоне частот ω вплоть до звукового диапазона как в случае равножестких и равнодемпфированных, так и в случае неравножестких и неравнодемпфированных опор ротора гиромотора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Городецкий О. М., Климов Д. М.* О применимости квазистационарного метода для изучения динамики гироскопа с жидкостным подвесом // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 10–20.
2. *Андрейченко К. П., Могилевич Л. И.* О динамике взаимодействия сдавливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости с упругими стенками // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 2. С. 162–172.
3. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука. 1978. 736 с.
4. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости. М.: Наука. 1979. 320 с.

Саратов

Поступила в редакцию
4.V.1985