МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1987

УДК 531.8

О КОРРЕКТНОСТИ ИДЕАЛИЗАЦИИ В ВИДЕ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИХ СВЯЗЕЙ

ДОБРОСЛАВСКИЙ С. В., НАГАЕВ Р. Ф.

Рассматривается класс динамических систем, идеализирующих в общем виде движение привода машин обрабатывающего или добывающего типа, а также роботов-манипуляторов. Наряду с ними исследуются упрощенные модели, отличающиеся тем, что несколько первоначально податливых связей полагаются абсолютно жесткими.

Показано, что условия устойчивости стационарных движений основной и упрощенной моделей не эквивалентны друг другу даже в том случае, когда податливости вышеупомянутых связей стремятся к нулю. В этом случае следует говорить о том, что идеализация в виде абсолютно жестких связей некорректна. Условия корректности идеализации в виде абсолютно жесткого тела, полученные в общем виде, проиллюстрированы на двух частных примерах, представляющих и самостоятельный интерес.

Более общая задача о близости классов движений основной и упрощенной систем и построение соответствующих асимптотических разложений рассматривались ранее в ряде работ (см., например, [1, 2]).

1. Рассмотрим динамическую систему, механические координаты которой $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ определяются из уравнения

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\varphi}^{\cdot\cdot}+\mathbf{H}\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}^{\cdot}, \mathbf{x}) \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\varphi}=\operatorname{col}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\mathbf{I}$ — симметричная положительно-определенная «инерционная» $(n\times n)$-матрица с постоянными коэффициентами, $(n\times n)$-матрица позиционных сил $\mathbf{H}$ также постоянна и в общем случае несимметричная, а вектор-функция $\mathbf{F}$ зависит от компонент $\boldsymbol{\varphi}^{\cdot}$ и некоторого $(k\times 1)$-вектора $\mathbf{x}$. Считается, что на движение системы оказывают влияние как потенциальные, так и неконсервативные позиционные (псевдогироскопические) силы [3]. Что же касается правых частей уравнения (1.1), то они характеризуют приток и убыль внешней энергии в систему. Компоненты вектора $\mathbf{x}$, также необходимые для описания мгновенного динамического состояния системы, обычно имеют немеханический (электрический, гидравлический и т. д.) смысл и определяются из векторного уравнения

$$\mathbf{T}\mathbf{x}^{\cdot}+\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}^{\cdot})\mathbf{x}=\mathbf{M}(\boldsymbol{\varphi}^{\cdot}) \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{T}=\operatorname{diag}(T_1, \ldots, T_k)$ — положительно-определенная $(k\times k)$-матрица, а компоненты невырожденной $(k\times k)$-матрицы $\mathbf{A}$ и $(k\times 1)$-вектора $\mathbf{M}$ зависят от $\boldsymbol{\varphi}^{\cdot}$. Отметим, что в форме (1.2) могут быть записаны, например, уравнения изменения тока в обмотках асинхронного электродвигателя [4] или же уравнения изменения давления гидравлического двигателя [5].

Сделаем еще ряд допущений относительно структуры матрицы позиционных сил $\mathbf{H}$. Прежде всего предположим, что она может быть разбита на две существенно различные по величинам коэффициентов составляющие: $\mathbf{H}=\mu^{-1}\mathbf{C}+\mathbf{K}$, где μ — малый параметр $(0<\mu<\mu_0)$. Допустим, кроме того, что вековая $(n\times n)$-матрица $\mathbf{C}-\varkappa\mathbf{I}$ имеет l-кратный нулевой корень $(\varkappa=0)$ с простыми элементарными делителями $(\operatorname{rang}\mathbf{C}=n-l)$ и $(n-l)$ простых корней $\varkappa_1, \ldots \varkappa_{n-l}$. В силу этого существуют нетривиальные $(n\times l)$-матрица $\mathbf{U}$ и $(n\times 1)$-векторы $\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_{n-l}$, такие, что

$$\mathbf{C}\mathbf{U}=0, \qquad (\mathbf{C}-\varkappa_i\mathbf{I})\mathbf{U}_i=0 \qquad (i=1, \ldots, n-l) \tag{1.3}$$

Введем также сопряженные $(l \times n)$-матрицу $\mathbf{U}^*$ и $(1 \times n)$-векторы $\mathbf{U}_1^*, \ldots, \mathbf{U}_{n-l}^*$, определяемые из уравнений

$$\mathbf{U}^*\mathbf{C}=0, \quad \mathbf{U}_i^*(\mathbf{C}-\varkappa_i\mathbf{I})=0 \quad (i=1, \ldots, n-l) \tag{1.4}$$

Допустим также, что $\operatorname{rang} \mathbf{H}=n-1$. Вследствие этого сопряженные линейные системы

$$(\mathbf{C}+\mu\mathbf{K})\mathbf{u}=0, \quad \mathbf{u}^*(\mathbf{C}+\mu\mathbf{K})=0 \tag{1.5}$$

должны допускать нетривиальные решения с точностью до одного произвольного множителя. Неизвестные $(n \times 1)$-вектор $\mathbf{u}$ и $(1 \times n)$-вектор $\mathbf{u}^*$ можно искать в виде рядов

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\mu\mathbf{u}_1+\mu^2\ldots, \quad \mathbf{u}^*=\mathbf{u}_0^*+\mu\mathbf{u}_1^*+\mu^2\ldots \tag{1.6}$$

Подстановка (1.6) в (1.5) дает

$$\mathbf{C}\mathbf{u}_0=0, \quad \mathbf{u}_0^*\mathbf{C}=0, \quad \mathbf{C}\mathbf{u}_1+\mathbf{K}\mathbf{u}_0=0, \quad \mathbf{u}_1^*\mathbf{C}+\mathbf{u}_0^*\mathbf{K}=0 \tag{1.7}$$

Из первых двух уравнений (1.7) в силу (1.3), (1.4) имеем

$$\mathbf{u}_0=\mathbf{U}\mathbf{a}, \quad \mathbf{u}_0^*=\mathbf{a}^*\mathbf{U}^* \tag{1.8}$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}^*$ — соответственно $(l \times 1)$- и $(1 \times l)$-векторы с произвольными компонентами. Тогда условия совместности последних двух уравнений (1.7) при учете первых уравнений (1.3), (1.4) и (1.8) будут $\mathbf{U}^*\mathbf{K}\mathbf{U}\mathbf{a}=0$, $\mathbf{a}^*\mathbf{U}^*\mathbf{K}\mathbf{U}=0$. Следовательно, для того, чтобы $\operatorname{rang} H=n-1$, необходимо выполнение равенства $\operatorname{rang} \mathbf{U}^*\mathbf{K}\mathbf{U}=n-1$. В противном случае разложение (1.6) не единственно.

Обращение малого параметра μ в нуль соответствует наложению на механическую подсистему (1.1) $(n-l)$ голономных кинематических связей. Реакции этих связей при $\mu=0$ по-прежнему должны оставаться конечными. Поэтому компоненты $(n \times 1)$-вектора этих реакций $\mathbf{R}$ должны определяться предельным равенством

$$\mathbf{R}=\lim_{\mu\to 0}\mu^{-1}\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi} \tag{1.9}$$

Отметим, что согласно (1.4) компоненты $\mathbf{R}$ удовлетворяют следующему $(l \times 1)$-векторному соотношению $\mathbf{U}^*\mathbf{R}=0$. $\mathbf{U}^*$ $(l \times 1)$-вектор механических координат $\boldsymbol{\theta}$ системы с абсолютно жесткими связями следует выбирать так, чтобы удовлетворялось равенство (1.9). Отсюда при учете (1.3) имеем $\lim_{\mu\to 0}\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{U}\boldsymbol{\theta}$.

Непосредственно переходя к пределу $\mu\to 0$ в системе (1.1), получим $\mathbf{I}\mathbf{U}\boldsymbol{\theta}^{\cdot\cdot}+\mathbf{R}+\mathbf{K}\mathbf{U}\boldsymbol{\theta}=\mathbf{F}(\mathbf{U}\boldsymbol{\theta}^{\cdot}, \mathbf{x})$. Умножим это уравнение на $\mathbf{U}^*$. В результате при учете соотношения $\mathbf{U}^*\mathbf{R}=0$ получим уравнения движения упрощенной системы с абсолютно жесткими связями в форме $\mathbf{U}^*\mathbf{I}\mathbf{U}\boldsymbol{\theta}^{\cdot\cdot}+\mathbf{U}^*\mathbf{K}\mathbf{U}\boldsymbol{\theta}=\mathbf{U}^*\mathbf{F}(\mathbf{U}\boldsymbol{\theta}^{\cdot}, \mathbf{x})$, $\mathbf{T}\mathbf{x}^{\cdot}+\mathbf{A}(\mathbf{U}\boldsymbol{\theta}^{\cdot})\mathbf{x}=\mathbf{M}(\mathbf{U}\boldsymbol{\theta}^{\cdot})$.

Итак, осуществлен переход от первоначальной системы с n механическими степенями свободы к упрощенной системе с l степенями свободы $(l<n)$.

Основная цель последующего исследования состоит в сопоставлении условий устойчивости в малом стационарных решений определенного вида исходной и упрощенной систем.

2. Исходная система (1.1), (1.2) в силу (1.5) допускает решение, отвечающее линейному нарастанию механических координат

$$\boldsymbol{\varphi}=\omega\mathbf{u}t+\boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{x}=\boldsymbol{\beta} \tag{2.1}$$

Здесь компоненты $(n \times 1)$-вектора $\boldsymbol{\alpha}$ и $(k \times 1)$-вектора $\boldsymbol{\beta}$, а также величина ω постоянны. Уравнения для определения всех этих величин с точностью до величин высшего порядка малости в силу (1.5) и (1.8) имеют вид

$$(\mathbf{C}+\mu\mathbf{K})\boldsymbol{\alpha}=\mu\mathbf{F}(\mathbf{U}\mathbf{a}\omega, \boldsymbol{\beta})+\mu^2\ldots, \quad \mathbf{A}(\mathbf{U}\mathbf{a}\omega)\boldsymbol{\beta}=\mathbf{M}(\mathbf{U}\mathbf{a}\omega)+\mu\ldots \tag{2.2}$$

Величину $\boldsymbol{\alpha}$ удобно исключить при помощи второго равенства (1.5). Если попутно исключить и величину $\boldsymbol{\beta}$, то в результате при учете выражения для $\mathbf{u}_0^*$ (см. (1.8)) придем к следующему скалярному уравнению для определения ω:

$$\mathbf{a}^*\mathbf{U}^*\mathbf{F}[\mathbf{U}\mathbf{a}\omega,\quad \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{U}\mathbf{a}\omega)\mathbf{M}(\mathbf{U}\mathbf{a}\omega)]+\mu\ldots=0 \tag{2.3}$$

Отметим, что построенное решение при $\mu\to0$ переходит в следующее решение системы с абсолютно жесткими связями: $\theta=\mathbf{a}\omega_0t+\gamma$, $\mathbf{x}=\beta_0$, где $\mathbf{U}\gamma=\alpha_0$, а ω_0, α_0 и β_0 определяются из (2.2), (2.3) при $\mu\to0$. Обычно решение (2.1) отвечает установившемуся рабочему движению рассматриваемой системы.

Устойчивость этого режима в малом будем, как и обычно, исследовать на основе уравнений в вариациях

$$\begin{gathered}\mathbf{I}\delta\varphi^{\cdot\cdot}+[\mu^{-1}\mathbf{C}+\mathbf{K}]\delta\varphi=(\partial\mathbf{F}/\partial\varphi^{\cdot})\delta\varphi^{\cdot}+(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x})\delta\mathbf{x}+\mu\ldots\\ \mathbf{T}\delta\mathbf{x}^{\cdot}+(\partial\mathbf{A}\mathbf{x}/\partial\varphi^{\cdot})\delta\varphi^{\cdot}+(\mathbf{A})\delta\mathbf{x}=(\partial\mathbf{M}/\partial\varphi^{\cdot})\delta\varphi^{\cdot}+\mu\ldots\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь выражения в круглых скобках — соответствующие матрицы Якоби, вычисляемые при $\varphi^{\cdot}=\mathbf{U}\mathbf{a}\omega_0$ и $\mathbf{x}=\beta_0$. Частные решения системы (2.4) ищутся в виде

$$\delta\varphi=\mathbf{\Phi}e^{\lambda t},\qquad \delta\mathbf{x}=\mathbf{X}e^{\lambda t} \tag{2.5}$$

Подстановка (2.5) в (2.4) приводит к линейной однородной системе для определения компонент $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{X}$:

$$\begin{gathered}[\mathbf{I}\lambda^2-\lambda(\partial\mathbf{F}/\partial\varphi^{\cdot})+\mu^{-1}\mathbf{C}+\mathbf{K}]\mathbf{\Phi}-(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x})\mathbf{X}+\mu\ldots=0\\ [\mathbf{T}\lambda+(\mathbf{A})]\mathbf{X}+\lambda[(\partial\mathbf{A}\mathbf{x}/\partial\varphi^{\cdot})-(\partial\mathbf{M}/\partial\varphi^{\cdot})]\mathbf{\Phi}+\mu\ldots=0\end{gathered} \tag{2.6}$$

Определим условия, когда система (2.6) при $\mu\to0$ допускает решения, аналитические по μ:

$$\mathbf{\Phi}=\mathbf{\Phi}_0+\mu\mathbf{\Phi}_1+\mu^2\ldots,\qquad \mathbf{X}=\mathbf{X}_0+\mu\mathbf{X}_1+\mu^2\ldots,\qquad \lambda=\lambda_0+\mu\lambda_1+\mu^2\ldots \tag{2.7}$$

После подстановки (2.7) в (2.6) баланс слагаемых с множителем μ^{-1} дает $\mathbf{C}\mathbf{\Phi}_0=0$. Отсюда в силу (1.3) получим $\mathbf{\Phi}_0=\mathbf{U}\mathbf{b}$. Компоненты $(l\times1)$-вектора $\mathbf{b}$ определяются из уравнений следующего приближения:

$$\begin{gathered}[\mathbf{I}\lambda_0^2-\lambda_0(\partial\mathbf{F}/\partial\varphi^{\cdot})+\mathbf{K}]\mathbf{U}\mathbf{b}+\mathbf{C}\mathbf{\Phi}_1-(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x})\mathbf{X}_0=0\\ [\mathbf{T}\lambda_0+(\mathbf{A})]\mathbf{X}_0+\lambda_0[(\partial\mathbf{A}\mathbf{x}/\partial\varphi^{\cdot})-(\partial\mathbf{M}/\partial\varphi^{\cdot})]\mathbf{U}\mathbf{b}=0\end{gathered} \tag{2.8}$$

Если теперь первое уравнение (2.8) помножить слева на $\mathbf{U}^*$ (см. (1.4)), то в результате получим

$$\mathbf{U}^*[\mathbf{I}\lambda_0^2-\lambda_0(\partial\mathbf{F}/\partial\varphi^{\cdot})+\mathbf{K}]\mathbf{U}\mathbf{b}-\mathbf{U}^*(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x})\mathbf{X}_0=0 \tag{2.9}$$

Второе уравнение (2.8) и уравнение (2.9) образуют замкнутую систему $(l+k)$-уравнений относительно компонент векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{X}_0$. Определитель этой системы дает вековое уравнение порядка $(2l+k)$ относительно первого приближения к характеристическому показателю $\lambda_0=\lim_{\mu\to0}\lambda$. Соответствующие критерии устойчивости режима ($\mathrm{Re}\,\lambda_0<0$), как можно видеть, полностью отвечают системе с абсолютно жесткими связями. Отметим, что один из корней этого уравнения в силу автономности исходной и абсолютно жесткой систем равен нулю.

3. Полученные абсолютно жесткие критерии являются необходимыми, но недостаточными. Действительно, общий порядок исходной системы равен $(2n+k)$. Поэтому существуют еще $2(n-l)$ нетривиальных значений λ, которые, очевидно, не аналитичны по μ. Решения системы (2.6), соответствующие этим значениям, будем искать в виде рядов по степеням $\mu^{1/2}$:

$$\begin{gathered}\mathbf{\Phi}=\mathbf{\Phi}_0+\mu^{1/2}\mathbf{\Phi}_1+\mu\mathbf{\Phi}_2+\mu^{3/2}\mathbf{\Phi}_3+\mu^2\ldots,\qquad \mathbf{X}=\mathbf{X}_0+\mu^{1/2}\mathbf{X}_1+\mu\mathbf{X}_2+\mu^{3/2}\mathbf{X}_3+\mu^2\ldots\\ \lambda=\mu^{-1/2}\lambda_0+\lambda_1+\mu^{1/2}\lambda_2+\mu\lambda_3+\mu^{3/2}\ldots\end{gathered} \tag{3.1}$$

Подстановка (3.1) в (2.6) в исходном приближении дает

$$(\mathbf{I}\lambda_0^2+\mathbf{C})\mathbf{\Phi}_0=0 \tag{3.2}$$

Отсюда в силу (1.3) имеем $(n-l)$ нетривиальных решений $\Phi_0=U_i$, $\lambda_0^2=-\varkappa_i$ $(i=1,\ldots,n-l)$. Иными словами, получаем $2(n-l)$ значений $\lambda_0=\pm\sqrt{-\varkappa_i}$. Это означает, что для устойчивости необходима положительность собственных значений $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{n-l}$. Тогда $\operatorname{Re}\lambda_0=0$ и окончательное суждение об устойчивости может быть получено после анализа уравнения следующего приближения:

$$(\mathbf{C}-\varkappa_i\mathbf{I})\,\boldsymbol{\Phi}_1\pm\sqrt{-\varkappa_i}\,[2\lambda_1\mathbf{I}-(\partial\mathbf{F}/\partial\boldsymbol{\varphi}^{\cdot})]\,\mathbf{U}_i=0 \tag{3.3}$$

Помножим уравнение (3.3) слева на $\mathbf{U}_i^*$. Полученные в силу (1.4) соотношения в разрешенном относительно λ_1 виде запишутся в форме

$$\lambda_1={}^1/_2\mathbf{U}_i^*(\partial\mathbf{F}/\partial\boldsymbol{\varphi}^{\cdot})\mathbf{U}_i \quad (i=1,\ldots,n-l) \tag{3.4}$$

Здесь и далее предполагается выполненным нормировочное соотношение

$$\mathbf{U}_i^*\mathbf{I}\mathbf{U}_i=1 \tag{3.5}$$

Таким образом, достаточные условия устойчивости стационарного режима в случае «устойчивой» матрицы $\mathbf{C}$ $(\varkappa_i>0)$ выполняются, если справедливы следующие, не зависящие от малого параметра μ неравенства:

$$\mathbf{U}_i^*(\partial\mathbf{F}/\partial\boldsymbol{\varphi}^{\cdot})\mathbf{U}_i<0 \quad (i=1,\ldots,n-l) \tag{3.6}$$

Если матрица $\mathbf{C}$ симметрична, то вектор-строка $\mathbf{U}_i^*$ получается транспонированием вектор-столбца $\mathbf{U}_i$. Поэтому $(n-l)$ неравенств (3.6) заведомо выполняются, если квадратичная форма с матрицей $(\partial\mathbf{F}/\partial\boldsymbol{\varphi}^{\cdot})$ является отрицательно-определенной.

Интересен также случай, когда из вектор-функции $\mathbf{F}$ может быть выделена составляющая, характеризующая рассеивание энергии по [6]:

$$\mathbf{F}=-f\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}^{\cdot}+\mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}^{\cdot},\mathbf{x}) \tag{3.7}$$

Здесь f — постоянный коэффициент демпфирования $(f>0)$. Подстановка (3.7) в (3.6) в силу (1.3) и (3.5) приводит к следующим дополнительным ограничениям на величины $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{n-l}$:

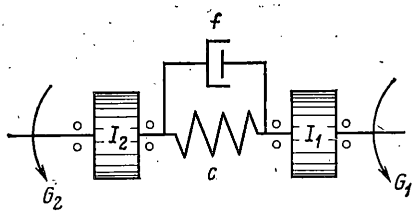
$$\varkappa_i>f^{-1}\mathbf{U}_i^*(\partial\mathbf{G}/\partial\boldsymbol{\varphi}^{\cdot})\mathbf{U}_i \tag{3.8}$$

Итак, условия устойчивости стационарного режима в системе с абсолютно жесткими связями существенно уже, чем аналогичные условия в системе со связями сколь угодно малой, но конечной, податливостью. При этом дополнительными условиями являются как положительность значений $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{n-l}$, так и выполнение неравенств (3.6) или (3.8). Появление отрицательных или комплексных значений $\varkappa_i$ возможно при наличии в системе неконсервативных позиционных сил и свидетельствует о сильной (порядка $\mu^{-1/2}$) неустойчивости режима соответственно апериодического или колебательного типа. Нарушение неравенств (3.6) приводит к более медленному (порядка единицы) нарастанию возмущений и возможно даже при отсутствии неконсервативных позиционных сил. В любом случае, если дополнительные критерии устойчивости не выполняются, можно утверждать, что идеализация соответствующих связей в виде абсолютно твердых тел является некорректной, как бы мала ни была их податливость.

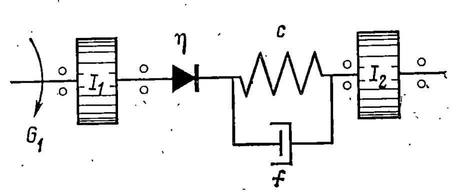
Отметим, что неравенства (3.6) справедливы только, если компоненты диагональной матрицы постоянных времени $\mathbf{T}$ удовлетворяют следующим оценочным соотношениям:

$$T_s\gg O(\mu^{1/2}) \quad (s=1,\ldots,k) \tag{3.9}$$

При этом компоненты $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}^{\cdot})$ и $\mathbf{M}(\boldsymbol{\varphi}^{\cdot})$ в окрестности стационарного движения должны иметь порядок единицы. В противном случае $(T_s=0(\mu^{1/2}))$ разложения (3.1) неприменимы. В крайнем случае $(T_s=0)$ соответствующая компонента $\mathbf{x}$ является замкнутой функцией остальных компонент $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\varphi}^{\cdot}$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассмотрим вырожденный случай, когда $(n\times1)$-вектор — функция $\mathbf{F}$, не зависит от компонент $\varphi^{\cdot}$ ($\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\partial\mathbf{F}/\partial\varphi^{\cdot}\equiv\mathbf{0}$). Тогда, очевидно, согласно (3.3) и (3.4) имеем $\lambda_1=0$ и $\Phi_1=0$ и вопрос об устойчивости решается в процессе рассмотрения уравнений высших приближений:

$$\begin{gathered}\mathbf{T}\mathbf{X}_0+[(\partial\mathbf{A}\mathbf{x}/\partial\varphi^{\cdot})-(\partial\mathbf{M}/\partial\varphi^{\cdot})]\mathbf{U}_i=\mathbf{0}\\ (2\lambda_0\lambda_2\mathbf{I}+\mathbf{K})\mathbf{U}_i+(\mathbf{C}-\varkappa_i\mathbf{I})\mathbf{\Phi}_2-(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x})\mathbf{X}_0=\mathbf{0}\\ 2\lambda_0\lambda_3\mathbf{I}\mathbf{U}_i+(\mathbf{C}-\varkappa_i\mathbf{I})\mathbf{\Phi}_3-(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x})\mathbf{X}_1=\mathbf{0}\\ (\mathbf{A})\mathbf{X}_0+\lambda_0\mathbf{T}\mathbf{X}_1=\mathbf{0}\end{gathered}\tag{3.10}$$

Умножим теперь второе и третье уравнения (3.10) справа на $\mathbf{U}_i^*$. В результате при учете (1.4) и (3.5) придем к следующим не зависящим от $\mathbf{\Phi}_2$ и $\mathbf{\Phi}_3$ скалярным соотношениям:

$$\mathbf{U}_i^*(2\lambda_0\lambda_2\mathbf{I}+\mathbf{K})\mathbf{U}_i=\mathbf{U}_i^*(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x})\mathbf{X}_0,\qquad 2\lambda_0\lambda_3=\mathbf{U}_i^*(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x})\mathbf{X}_1\tag{3.11}$$

Поскольку $\operatorname{Re}\lambda_0=0$, поправка λ_2, определяемая из первого равенства (3.11), является также чисто мнимой. Следовательно, вопрос об устойчивости решается после определения следующей поправки λ_3. Она согласно второму равенству (3.11) является вещественной и при учете первого и четвертого равенства (3.10) может быть представлена в следующем явном виде:

$$\lambda_3=1/2\varkappa_i\mathbf{U}_i^*(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x})\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A})\mathbf{T}^{-1}[(\partial\mathbf{M}/\partial\varphi^{\cdot})-(\partial\mathbf{A}\mathbf{x}/\partial\varphi^{\cdot})]\mathbf{U}_i\tag{3.12}$$

Отметим, что в рассматриваемом случае при $\lambda_3<0$ возмущения убывают медленно (как $\exp(\mu\lambda_3 t)$).

4. Рассмотрим два примера, иллюстрирующих применение полученных выше общих результатов.

1. Показанная на фиг. 1 динамическая система является простейшей идеализацией обрабатывающей или добывающей машины. Уравнения ее движения относятся к типу (1.1) и имеют вид

$$\begin{gathered}I_1\varphi_1^{\cdot\cdot}+c(\varphi_1-\varphi_2)=-f(\varphi_1^{\cdot}-\varphi_2^{\cdot})+G_1\\ I_2\varphi_2^{\cdot\cdot}+c(\varphi_2-\varphi_1)=-f(\varphi_2^{\cdot}-\varphi_1^{\cdot})+G_2\end{gathered}\tag{4.1}$$

Здесь I_1 и I_2 — приведенные моменты инерции соответственно привода и исполнительного органа, c и f — приведенные коэффициенты жесткости и эквивалентного вязкого трения трансмиссии, G_1, G_2 — соответственно моменты двигателя и сопротивления ($G_1>0$, $G_2<0$). Движущий момент, вообще говоря, вводится при помощи вспомогательной системы дифференциальных уравнений. Например, в случае асинхронного электродвигателя следует использовать его электрические уравнения с коэффициентами, зависящими от $\varphi_1^{\cdot}$. С другой стороны, момент сопротивления обычно зависит как от $\varphi_2^{\cdot}$, так и других переменных величин, например скорости поступательного перемещения (подачи) машины. В этом случае необходимо выписать также дифференциальные уравнения привода подачи. Все эти дополнительные уравнения относятся к типу (1.2). Будем, однако, предполагать, что для всех этих дополнительных уравнений оказываются справедливыми сильные неравенства, противоположные (3.9). Это означает, что приводы вращения и подачи являются, в определенном смысле, безынерционными и позволяют в дальнейшем использовать статические характеристики $G_1=G_d(\varphi_1^{\cdot})$, $G_2=-G_c(\varphi_2^{\cdot})$. Отметим, наконец, что податливость трансмиссии предполагается достаточно малой, так что $c=\mu^{-1}$.

Не останавливаясь на промежуточных достаточно очевидных выкладках, выпишем прежде всего единственное уравнение движения системы с абсолютно жесткой связью

$$(I_1+I_2)\theta^{\cdot\cdot}=G_d(\theta^{\cdot})-G_c(\theta^{\cdot}),\quad(\mathbf{U}=\operatorname{col}(1,1),\quad\varphi_1=\varphi_2=\theta)\tag{4.2}$$

Рабочий стационарный режим отвечает равномерному вращению с частотой ω:

$$\theta_i=\omega t+\alpha_i\quad(i=1,2),\quad c(\alpha_1-\alpha_2)=G_d(\omega)=G_c(\omega)\tag{4.3}$$

Устойчивость равномерного вращения в абсолютно жесткой схеме согласно (2.8) и (2.9) обеспечена, если выполняется неравенство

$$g_d - g_c < 0 \tag{4.4}$$

где $g_d = dG_d(\omega)/d\omega$ и $g_c = dG_c(\omega)/d\omega$ – коэффициенты крутизны соответствующих характеристик. Существенно, что в реальных приводах обычно $g_d < 0$. В то же время момент сопротивления часто имеет падающую характеристику, вследствие чего $g_c < 0$.

Неконсервативные позиционные силы в данной системе отсутствуют. Поэтому единственное собственное значение $\varkappa$ является положительным (см. (1.3)) и равно $\varkappa = I_1^{-1} + I_2^{-1}$. Теперь можно непосредственно в явном виде выписать условие корректности динамической модели с абсолютно жесткой связью, которое здесь имеет вид (3.8):

$$f > (g_d I_2^2 - g_c I_1^2)/(I_1 + I_2)^2 \tag{4.5}$$

Отметим, что неравенство (4.5) не является следствием (4.4) и нарушается, если $f \to 0$ и $I_2 \to 0$.

В рассматриваемой упрощенной модели можно получить и более сильный результат, прямо не вытекающий из предыдущего. Для этого прежде всего выпишем характеристическое уравнение системы (4.1) вблизи решения (4.3):

$$\begin{gathered} I_1 I_2 \lambda^4 + [f(I_1+I_2) - I_2 g_d + I_2 g_c]\lambda^3 + \\ + [c(I_1+I_2) - f(g_d - g_c) - g_d g_c]\lambda^2 - c(g_d - g_c)\lambda = 0 \end{gathered} \tag{4.6}$$

Если выполнено неравенство (4.4), то двойной нулевой корень уравнения (4.6) невозможен. Поэтому на границе устойчивости это уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\lambda = \pm\chi\sqrt{-1}$ ($\mathrm{Jm}\,\chi = 0$). Подставим это значение в (4.6) и полученные равенства разрешим относительно c:

$$c = c_*, \quad c_* = [f(g_d - g_c) + g_d g_c]\,\frac{f(I_1+I_2) - I_2 g_d + I_1 g_c}{f(I_1+I_2)^2 - I_2^2 g_d + I_1^2 g_c} \tag{4.7}$$

Видно, что при выполнении неравенств (4.4) и (4.5) величина c_* согласно (4.7) всегда положительна. Таким образом, равномерное вращение машины устойчиво, если приведенная жесткость трансмиссии превышает критическое значение, равное c_*.

2. Представленная на фиг. 2 динамическая модель в определенном смысле является усложненным вариантом только что изученной. Прежде всего полагается, что момент асинхронного электродвигателя определяется из дифференциального уравнения первого порядка

$$T G_1^{\bullet} + G_1 = G_d(\varphi_1^{\bullet}) \tag{4.8}$$

где постоянная времени T характеризует электромагнитную инерцию асинхронного электродвигателя. Упрощенные уравнения типа (4.8) были предложены для приближенного описания электромагнитных процессов в двигателе в [7].

С другой стороны, допустим, что трансмиссия включает самотормозящуюся передачу, например червячную или клиновую. Тогда механические уравнения движения в отличие от (4.1) имеют вид

$$\begin{gathered} I_1 \varphi_1^{\bullet\bullet} + \eta c(\varphi_1 - \varphi_2) = -f\eta(\varphi_1^{\bullet} - \varphi_2^{\bullet}) + G_1 \\ I_2 \varphi_2^{\bullet\bullet} + c(\varphi_2 - \varphi_1) = -f(\varphi_2^{\bullet} - \varphi_1^{\bullet}) \end{gathered} \tag{4.9}$$

Здесь величина η зависит от знака передаваемого момента $M_{12} = c(\varphi_1 - \varphi_2) + f(\varphi_1^{\bullet} - \varphi_2^{\bullet})$. При прямом ходе, когда $M_{12} > 0$, значение $\eta = \eta_n^{-1}$ положительно, в то время как в режиме оттормаживания ($M_{12} < 0$), наоборот, $\eta = -\eta_0 < 0$. Здесь η_n – коэффициент полезного действия прямого хода, а η_0 – коэффициент оттормаживания [7]. Остальные обозначения те же, что и в первом примере, в частности $c = \mu^{-1} \gg 1$. Отметим, наконец, что согласно (4.9) момент сопротивления $G_2 = 0$.

Уравнения движения системы с абсолютно жесткой связью имеют вид

$$\begin{gathered} (I_1 + \eta I_2)\theta^{\bullet\bullet} = G_1, \quad T G_1^{\bullet} + G_1 = G_d(\theta^{\bullet}) \\ (\mathrm{U} = \mathrm{col}\,(1,1),\ \mathrm{U}^* = (1;\ \eta),\ \varphi_1 = \varphi_2 = \theta) \end{gathered} \tag{4.10}$$

Характеристическим уравнением системы (4.10) согласно (2.8) и (2.9) является

$$\lambda[T\lambda^2(I_1 + \eta I_2) + \lambda(I_1 + \eta I_2) - g_d] = 0$$

где g_d – то же, что и в первом примере. Учитывая, что для реальных двигателей $g_d < 0$, получаем условие устойчивости равномерного вращения в абсолютно жесткой схеме: $I_1 + \eta I_2 > 0$. Это условие выполняется для любого режима движения (прямой ход или режим оттормаживания передачи, если $I_1 > \eta_0 I_2$. Рассмотрим случай $\mu \ll 1$. Матрица c системы (4.9) при $\eta \neq 1$ является несимметричной, поэтому в системе присутствуют неконсервативные позиционные силы. Условия корректности динамической модели с абсолютно жесткой связью имеют вид (см. (1.3) и (3.6)):

$$\varkappa_1 = (I_1 + \eta I_2)/(I_1 I_2) > 0, \quad f(I_1^{-1}\eta + I_2^{-1}) > 0 \tag{4.11}$$

Здесь учтено, что вектора $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_1^*$, удовлетворяющие условию нормировки (3.5), соответственно равны:

$$\mathbf{U}_1=\mathrm{col}\left(1,\ -\frac{I_1}{\eta I_2}\right),\qquad \mathbf{U}_1^*=\left[\frac{\eta I_2}{I_1(I_1+\eta I_2)},\ -\frac{\eta}{I_1+\eta I_2}\right]$$

Очевидно, что неравенства (4.11) выполняются, если выполнены условия $I_1+\eta I_2>$ >0 или $I_1>\eta_0 I_2$. Таким образом, динамическая модель с абсолютно жесткой связью корректна.

Допустим, что $f=0$ (силы вязкого трения в связи не учитываются). Условие устойчивости $\lambda_3<0$ (см. (3.12)) дает $\eta g_d T^{-2} I_2/[I_1(I_1+\eta I_2)]<0$. Это неравенство нарушается, когда передача работает в режиме оттормаживания ($\eta=-\eta_0<0$), и, следовательно, в данном случае имеет место неустойчивость установившегося движения. Так как второе условие (4.11) выполняется при любом сколь угодно малом f, то, следовательно, расчетная схема привода с двигателем и самотормозящейся передачей, не учитывающая диссипативные свойства связи, является неправомерной. Отметим, что описанная ситуация имеет место только в том случае, когда передача расположена между двигателем и упругим элементом.

В случае статической характеристики двигателя ($T=0$) из (4.8) имеем $G_1=G_d(\varphi_1^\bullet)$. Подставляя это значение в (4.9) и применяя к полученной системе условие устойчивости (3.6) или (3.8), получим $f(I_1+\eta I_2)^2-\eta g_d I_2^2>0$. Это условие выполнено для любого режима движения, если

$$f>f_*=-\eta_0 I_2^2 g_d/(I_1-\eta_0 I_2)^2 \tag{4.12}$$

Таким образом, в случае статической характеристики двигателя равномерное вращение привода устойчиво, если коэффициент вязкого трения связи больше f_*. Отметим, что из (4.12) следует, что f_* уменьшается с увеличением I_1. Следовательно, рассматриваемую систему можно стабилизировать увеличением момента инерции ведущего звена. При $f=0$ неравенство (4.12) нарушается и, таким образом, установившееся движение будет неустойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31. № 3. С. 575—586.
2. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1983. 352 с.
3. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука. 1976. 319 с.
4. *Соколов М. М., Петров Л. Б., Масандилов Л. Б., Ладензон В. А.* Электромагнитные переходные процессы в асинхронном электроприводе. М.: Энергия. 1967. 201 с.
5. *Хаймович Е. М.* Гидроприводы и гидроавтоматика станков. Киев; М.: Машгиз, 1959. 555 с.
6. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М.: Гостехиздат. 1958. 628 с.
7. *Вейц В. Л.* Динамика машинных агрегатов. Л.: Машиностроение. 1969. 368 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 3.VI.1985