МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1987

УДК 531.384

ЧАСТОТНАЯ НЕВЫРОЖДЕННОСТЬ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА И УРАВНОВЕШЕННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

ТАТАРИНОВ Я. В.

Доказана так называемая трехчастотность движения каждого конкретного волчка Лагранжа (если центр масс не совпадает с точкой подвеса) и конкретного гироскопа (с ненулевыми массами колец). Основой доказательства являются разложения частот вблизи устойчивых относительных равновесий (регулярных прецессий).

1. Рассмотрим интегралы движения гироскопа и волчка. Допустим, что осесимметричный гироскоп поворачивается на угол φ вокруг одной из главных центральных осей внутренней рамки. Рамка поворачивается на угол θ вокруг другой своей главной оси (всегда горизонтальной) относительно внешней рамки, которая в свою очередь поворачивается на угол ψ вокруг неподвижной вертикали. Считаем, что все оси вращения пересекаются в одной точке, а при $\theta=\pi k$ ось симметрии гироскопа вертикальна. Кинетическая энергия системы определяется выражением

$$2T=A\theta^{\cdot 2}+C\varphi^{\cdot 2}+2C\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}\cos\theta+(D\cos^2\theta+B\sin^2\theta)\psi^{\cdot 2} \tag{1.1}$$

где C — осевой момент инерции гироскопа, A — сумма его экваториального момента и одного из моментов внутренней рамки, D и B — некоторые суммы моментов инерции всех трех тел [1, 2]. Потенциальная энергия $V=\Pi\cos\theta$, где Π — произведение веса гироскопа на расстояние от его центра масс до неподвижной точки. Функция Лагранжа $L=T-V$ не зависит от ψ, φ, t, так что имеют место интегралы

$$\begin{gathered}(D\cos^2\theta+B\sin^2\theta)\psi^{\cdot}+C\cos\theta\varphi^{\cdot}=F\\ C\varphi^{\cdot}+C\psi^{\cdot}\cos\theta=G,\qquad T+V=H\end{gathered} \tag{1.2}$$

При невесомых рамках $D=C$, $B=A$ и из (1.1), (1.2) формально получаются тождества для классического волчка Лагранжа. Некоторая тонкость состоит в том, что многообразие положений гироскопа в кардановом подвесе есть трехмерный тор $\mathbf{T}^3$ ($\theta \bmod 2\pi$, $\psi \bmod 2\pi$, $\varphi \bmod 2\pi$), тогда как многообразие положений тела с неподвижной точкой есть группа $SO(3)$: здесь углы ψ и φ определены лишь при $0<\theta<\pi$. Чисто формальное рассмотрение задачи Лагранжа на $\mathbf{T}^3$ некорректно, так как при $D=C$, $B=A$ кинетическая энергия (1.1) теряет положительную определенность в точках с $\theta=\pi k$. Однако эту особенность можно отстранить потребовав, чтобы $F\neq\pm G$. Тогда $\theta\neq\pi k$, так как величины F, G имеют смысл проекций кинетического момента волчка на вертикаль и ось симметрии.

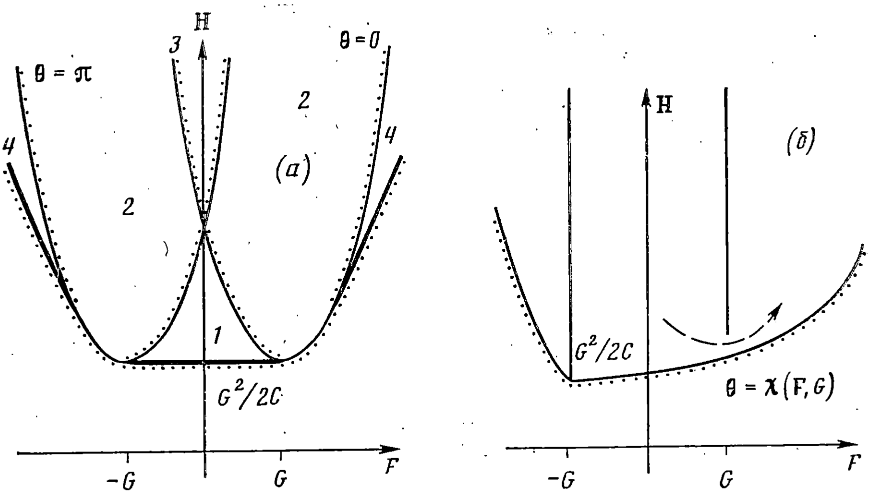
Функция Гамильтона задачи имеет вид

$$H=\frac{p_\theta^2}{2A}+\frac{p_\varphi^2}{2C}+\frac{(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)^2}{2((D-C)\cos^2\theta+B\sin^2\theta)}+\Pi\cos\theta \tag{1.3}$$

Заметим, что всегда $D-C\geqslant 0$, $B-A\geqslant 0$. Будем считать также, что $D-C<B$ (что выполняется для обычной конструкции гироскопа [1]). Из (1.3) получаем

$$\psi^{\cdot}=\partial H/\partial p_\psi=(F-G\cos\theta)/[(D-C)\cos^2\theta+B\sin^2\theta] \tag{1.4}$$

$$\varphi^{\cdot}=\partial H/\partial p_\varphi=G/C-\cos\theta\,\partial H/\partial p_\psi \tag{1.5}$$



Область возможности движения при заданных $p_\psi = F$, $p_\varphi = G$, H определяется неравенством

$$V_{FG}(\theta) = \frac{G^2}{2C} + \frac{(F - G\cos\theta)^2}{2((D-C)\cos^2\theta + B\sin^2\theta)} + \Pi\cos\theta \leqslant H \qquad (1.6)$$

Четность приведенного потенциала $V_{FG}(\theta)$ позволяет искать его критические точки только на отрезке $[0, \pi]$. Крайние точки — всегда критические (или особые при $C=D$), а если существует критическая точка $\theta = \chi(F, G)$ внутри этого отрезка, то это обязательно минимум, которому отвечает устойчивая регулярная прецессия с $\dot\psi$, $\dot\varphi$, определяемыми из (1.4), (1.5) и энергией $H_\chi = V_{FG}(\chi)$. Для близких к прецессии движений величину $h = H - H_\chi$ назовем энергией нутации. Аналогично будем поступать и в случаях, когда точкой минимума окажется $\theta = 0$ или π.

Приведем бифуркационную диаграмму (по Смейлу [3]) для V_{FG} при фиксированном $G>0$ для случая уравновешенного гироскопа $\Pi=0$ (фигура). Кривые, отвечающие минимумам и максимумам, помечены на ней точками снизу и сверху соответственно. При $|F|<G$ критической является точка, для которой $\cos\chi = F/G$, когда второе слагаемое в (1.6) обращается в нуль. Возможны также минимумы, для которых $\cos\chi = GB/ /[F(B-D+C)]$, когда величина F позволяет решить последнее уравнение. Если взять $\Pi>0$, то правая парабола ($\theta=0$) поднимается на Π вверх, а левая ($\theta=\pi$) на столько же опустится; кривые, отвечающие χ, деформируются. При дальнейшем росте Π произойдет слияние среднего и правого участков существования χ, а соответствующая кривая на диаграмме будет лежать ниже правой параболы. Если устремить $D\to C$, то ветви парабол сближаются и стремятся к вертикальным полупрямым $F=\pm G$, $H \geqslant {}^1/_2 G^2/C \pm \Pi$. Диаграмма для волчка Лагранжа в предположении, что $\Pi > {}^1/_2 G^2/A$, дана на фигуре.

В силу компактности многообразия положений построенные диаграммы, полностью описывая случаи функциональной зависимости имеющихся первых интегралов, не содержат дополнительных кривых. В трехмерном пространстве F, G, H возникают связные области 1—4 (см. фигуру), для каждой из которых доказательство невырожденности надо проводить отдельно. Для области 4 оно проводиться не будет, так как соответствующие движения практически неинтересны, а выкладки громоздки. Области 1—3 указывают на три качественно различных типа движения на фазовой плоскости задачи о гиростате [1, 2].

2. Частоты условно-периодического движения возникают, когда гамильтонова система $\dot p = -\partial H/\partial q$, $\dot q = \partial H/\partial p$, $H = H(p, q)$ обладает n независимыми первыми интегралами в инволюции $F_1(p, q), \ldots, F_n(p, q)$. Тогда связные компактные уровни

$$\Sigma_c = \{F_1(p, q) = c_1, \ldots, F_n(p, q) = c_n\} \subset \mathbf{R}^{2n}\{p, q\}$$

являются n-мерными торами. Более того, существуют канонические переменные «действие — угол» ρ_i, $\sigma_i \bmod 2\pi$, в которых $H=H(\rho)$, так что движение является условно-периодическим: $\rho_i=\mathrm{const}$, $\sigma_i=\omega_i(\rho)t+\sigma_i^0$ с частотами $\omega_i=\partial H/\partial\rho_i$. Система называется невырожденной, если

$$\det[\partial\omega_i/\partial\rho_j]\neq 0 \tag{2.1}$$

Например, случай Эйлера вырожден, но приобретает невырожденность после приведения — понижения порядка с помощью интеграла площадей [4]. Недавно доказана невырожденность приведенной задачи Ковалевской с использованием асимптотик тэта-функций, возникающих при интегрировании этой задачи [5]. Предлагаемая далее методика более элементарна, но не требует использования деталей интегрируемости в квадратурах.

Согласно схеме введения переменных действие — угол, приведенной в [6], ρ_i выбираются как независимые функции только c_j. Вычисление ρ_i на практике громоздко и потому желательно искать непосредственно $\omega_i(c)$, а вместо (2.1) доказывать, что

$$\det[\partial\omega_i/\partial c_j]\neq 0 \tag{2.2}$$

Лемма 1. Пусть в гамильтониане H переменные $q_2,\ldots,q_n(\bmod 2\pi)$ являются игнорируемыми, а $S(c_1,\ldots,c_n,\ q_1)$ — решение уравнения Гамильтона — Якоби $H(\partial S/\partial q_1,\ c_2,\ldots,c_n,\ q_1)=h(c_1)$. Тогда в число переменных действие — угол входят $\rho_k=p_k$, $\sigma_k=q_k+\partial S/\partial c_k$ $(k=2,\ldots,n)$, а соответствующие частоты

$$\omega_k(c_1,\ldots,c_n)=\langle\partial H/\partial p_k\rangle \tag{2.3}$$

где $\langle\Phi\rangle$ означает среднее значение функции $\Phi(p_1,\ q_1,\ c_2,\ldots,c_n)$ за период движения $q_1(t)$ в приведенной системе с гамильтонианом $H(p_1,\ c_2,\ldots$ $\ldots,c_n,\ q_1)$ при значении энергии $H=h(c_1)$.

Это почти очевидное утверждение отчетливо в известной автору литературе не формулировалось. Для вычисления еще одной частоты и средних значений впоследствии будет привлекаться следующая лемма.

Лемма 2. Пусть имеется система с гамильтонианом $H=y^2/2m+V(x)$, где $V={}^1/_2(1+\alpha x+\beta x^2+O(x^3))kx^2$. Будем вычислять среднее от функции $\Phi(y,\ x)$ по фазовой кривой с энергией H. Пусть $\{V(x)\leqslant H\}=[x_-(H),$ $x_+(H)]$. Тогда размах и частота колебаний определяются равенствами

$$\Delta x(H)=x_+-x_-=2(2H/k)^{1/2}[1+{}^1/_4(5\alpha^2-4\beta)H/k]+O(H^{5/2}) \tag{2.4}$$

$$\omega(H)=\pi\left[\int\limits_{x_-(H)}^{x_+(H)}\frac{dx}{[2(H-V(x))/m]^{1/2}}\right]^{-1}=\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}\left[1-\frac{3}{8}(5\alpha^2-4\beta)\frac{H}{k}\right]+O(H^2) \tag{2.5}$$

Кроме того, если $\Psi(x)=\lambda x+\mu x^2+O(x^3)$, то

$$\langle\Psi\rangle=\int\limits_{x_-(H)}^{x_+(H)}\frac{\Psi(x)\,dx}{[2(H-V(x))]^{1/2}}\left[\int\limits_{x_-(H)}^{x_+(H)}\frac{dx}{[2(H-V(x))]^{1/2}}\right]^{-1}=(-{}^3/_2\alpha\lambda+\mu)H/k+O(H^2) \tag{2.6}$$

Если $\Phi(y,\ x)$ нечетна по y, то $\langle\Phi\rangle\equiv 0$; если $\Phi=y^{2n}\Psi(x)$, то $\langle\Phi\rangle=$ $=(-2m)^n\langle V^n\Psi\rangle+O(H^2)=-mH\Psi(0)+O(H^2)$ при $n=1$, а в остальных случаях $\langle\Phi\rangle$ имеет порядок не ниже H^2.

Формула Линдштедта (2.5) доказана в [6] при помощи замены (метод Вейерштрасса) $x=f(q)=Kq(1+aq+bq^2+O(q^3))$, приводящей потенциал к виду $V(f(q))=q^2/2$, в силу чего $K=k^{-1/2}$, $a=-\alpha/2k^{1/2}$, $b=(5\alpha^2-4\beta)/8k$. Далее, подстановка $q=(2H)^{1/2}\sin\xi$ приводит к равенствам (штрих вверху означает производную по q):

$$\int\limits_{x_-(H)}^{x_+(H)} \Psi(x)\,[2(H-V(x))]^{-1/2}\,dx=\int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2}\Psi(f(\sqrt{2H}\sin\xi))f'(\sqrt{2H}\sin\xi)\,d\xi=$$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2}[(\lambda Kq(1+aq)+\mu K^2q^2)K(1+2aq+3bq^2)+O(q^3)]\,d\xi$$

причем после раскрытия скобок интегралы от нечетных степеней будут равны нулю. Отсюда

$$\int \Psi(x)\,[2(H-V(x))]^{-1/2}\,dx=(3aK^2\lambda+\mu K^3)\pi H+O(H^2)$$

Результат (2.6) можно получить и прямым осреднением по времени с использованием разложений Линдштедта [7].

Для движений с большой энергией применимо следующее утверждение. Пусть имеется система с гамильтонианом $H=\eta^2/2+V(\xi)$, $\xi \bmod 2\pi$. Обозначим через Φ_0 среднее по интервалу $[0,\ 2\pi]$ значение функции $\Phi(\xi)$.

Тогда для движения с $H>\max V(\xi)$ справедливы разложения

$$\omega=(2H)^{1/2}(1-V_0/2H+O(H^{-2}))$$
$$\langle\Phi\rangle=\Phi_0+[(\Phi V)_0-\Phi_0V_0]/2H+O(H^{-2}) \qquad (2.7)$$

Фактически они содержатся в [8] и могут быть продолжены (см. [9]). Можно продолжить и разложения (2.5), (2.6), но громоздкость коэффициентов при высших степенях H очень быстро возрастает.

3. Рассмотрим более подробно применение формул (2.5) и (2.3), (2.6) для вычисления частот вблизи устойчивых относительных равновесий. Положим $q_1\equiv q$ и допустим, что приведенная система имеет гамильтониан $H=p^2/2m+W(c_2,\ldots,c_n,\ q)$, $m=\mathrm{const}$, а $q=\chi(c_2,\ldots,c_n)$ — невырожденный минимум функции $V_c(q)=W(c_2,\ldots,c_n,\ q)$, т. е.

$$\partial W/\partial q|_{q=\chi(c)}\equiv 0,\qquad k=\partial^2W/\partial q^2|_{q=\chi(c)}>0 \qquad (3.1)$$

Представив все частоты в виде $\omega=\omega^0+\omega' h+O(h^2)$, $h=H-W(c,\ \chi(c))$, можно вычислить матрицу их производных по h, $c_2,\ldots,c_n$ и устремить $h\to 0$. Получим матрицу со строками вида ω', $\partial\omega^0/\partial c_2,\ldots,\ \partial\omega^0/\partial c_n$. Ее невырожденность достаточна для выполнения условия (2.2).

Для частоты ω_1 в силу (2.5) имеем

$$\omega_1'=-{}^3/_8(5\alpha^2-4\beta)(km)^{-1/2},\qquad \partial\omega_1^0/\partial c_i=(km)^{-1/2}\partial k/\partial c_i \qquad (3.2)$$
$$3k(c)\alpha(c)=\partial^3W/\partial q^3|_{q=\chi(c)},\qquad 12k(c)\beta(c)=\partial^4W/\partial q^4|_{q=\chi(c)}$$

Первая строка получена. Положим $q=\chi(c)+x$. Тогда (всюду далее $i,j=2,\ldots,n$):

$$q_i^{\bullet}=\partial W/\partial c_i=\omega_i^0(c)+\lambda_i(c)x+\mu_i(c)x^2+O(x^3)$$

$$\omega_i^0=\partial W/\partial c_i|_{q=\chi(c)},\ \lambda_i=\partial^2W/\partial c_i\partial q|_{q=\chi(c)},\ 2\mu_i=\partial^3W/\partial c_i\partial q^2|_{q=\chi(c)}$$

Прежде чем применить (2.3), получим некоторые тождества. Продифференцировав (3.1), приходим к равенствам

$$\frac{\partial^2W}{\partial c_i\partial q}+\frac{\partial^2W}{\partial q^2}\frac{\partial\chi}{\partial c_i}=\lambda_i+k\frac{\partial\chi}{\partial c_i}\equiv 0$$

$$\frac{\partial k}{\partial c_i}=\frac{\partial^3W}{\partial c_i\,\partial q^2}+\frac{\partial^3W}{\partial q^3}\frac{\partial\chi}{\partial c_i}=2\mu_i+3k\alpha\frac{\partial\chi}{\partial c_i}$$

Следовательно, в силу (2.6)

$$\omega_i'=\frac{1}{k}\left(-\frac{3}{2}\alpha\lambda_i+\mu_i\right)=\frac{1}{2k}\frac{\partial k}{\partial c_i}=\frac{1}{\omega_1^0}\frac{\partial\omega_1^0}{\partial c_i} \qquad (3.3)$$

Таким образом, изменение частот ω_i при малых h порождается частотой малых колебаний ω_1^0.

В реальных задачах гамильтонианы квадратичны по импульсам, так что $W={}^1/_2\sum A_{ij}(q)c_ic_j+V(q)$. Отсюда

$$\frac{\partial\omega_i^0}{\partial c_j}=\frac{\partial^2 W}{\partial c_i\partial c_j}+\frac{\partial^2 W}{\partial c_i\partial q}\frac{\partial\chi}{\partial c_j}=A_{ij}(\chi)-k\frac{\partial\chi}{\partial c_i}\frac{\partial\chi}{\partial c_j}=\Omega_{ij} \qquad (3.4)$$

В силу (3.2)—(3.4) требуется доказать невырожденность симметричной матрицы

$$\begin{bmatrix} -{}^3/_2k(5\alpha^2-4\beta) & \partial k/\partial c_j \\ \partial k/\partial c_i & \Omega_{ij} \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

4. Частоты в случае Лагранжа (всюду далее $\Pi>0$) имеют вид

$$\omega_\psi=\frac{F}{A}\left\langle\frac{1}{\sin^2\theta}\right\rangle-\frac{G}{A}\left\langle\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right\rangle$$

$$\omega_\varphi=-\frac{F}{A}\left\langle\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right\rangle+G\left\langle\frac{1}{A}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{1}{C}\right\rangle$$

$$\omega_\theta=\pi\left[\int\limits_{\theta_2(F,G,H)}^{\theta_1(F,G,H)}\frac{d\theta}{\sqrt{2(H-V_{FG}(\theta))/A}}\right]^{-1}$$

где $\theta_i(F,G,H)=\arccos u_i(F,G,H)$, а величины $u_j(F,G,H)$ суть корни общеизвестного уравнения третьей степени $f_{FGH}(u)=[(2H/A-G^2/AC)-2\Pi u/A](1-u^2)-(F-Gu)^2/A^2=0$, удовлетворяющие неравенству $-1<u_1<u_2<1<u_3$. Относительное равновесие получается при $u_1=u_2=\chi(F,G)$.

Замена $u=\cos\theta$ приводит к простым эллиптическим интегралам; в итоге получаем

$$\omega_\psi=\frac{1}{2A\mathbf{K}(\varkappa)}\left[\frac{F+G}{1+u_1}\Pi\left(\frac{\pi}{2},-\frac{u_2-u_1}{1+u_1},\varkappa\right)+\frac{F-G}{1-u_1}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{u_2-u_1}{1-u_1},\varkappa\right)\right]$$

$$\omega_\varphi=\frac{1}{2A\mathbf{K}(\varkappa)}\left[\frac{F+G}{1+u_1}\Pi\left(\frac{\pi}{2},-\frac{u_2-u_1}{1+u_1},\varkappa\right)-\frac{F-G}{1-u_1}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{u_2-u_1}{1-u_1},\varkappa\right)\right]+$$
$$+G\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)$$

$$\omega_\theta=\pi(\Pi/2A)^{1/2}(u_3-u_1)^{1/2}/\mathbf{K}(\varkappa),\qquad \varkappa=[(u_2-u_1)/(u_3-u_1)]^{1/2}$$

Из этих формул сразу вытекает невырожденность какой-либо из приведенных по Раусу систем. Например, если зафиксировать F и исключить по Раусу ψ, то у полученной системы с двумя степенями свободы отношение частот не постоянно, так как стремится к бесконечности, когда все $u_i\to1$ [10]. Если зафиксировать также H и выписать уравнения Уиттекера с независимой переменной φ, то доказывается изоэнергетическая невырожденность приведенной системы [11]. Для установления полной невырожденности можно было бы воспользоваться разложениями эллиптических функций в ряд по $u_2-u_1\sim h^{1/2}$ (см. формулу (2.4)). Однако намеченный общий подход яснее и короче.

Критическая точка $\chi(F,G)\in[0,\pi]$ является корнем уравнения, получаемого дифференцированием (1.6):

$$A\Pi\sin^4\chi=FG(1+\cos^2\chi)-(F^2+G^2)\cos\chi \qquad (4.1)$$

Введем параметр $\xi=k/\Pi+\cos\chi$ во вторую производную:

$$\xi A\Pi\sin^4\chi=(F^2+G^2)(1+2\cos^2\chi)-FG(5\cos\chi+\cos^3\chi) \qquad (4.2)$$

Положим $P=FG$, $S=F^2+G^2$. Из системы уравнений (4.1), (4.2) следуют выражения

$$\begin{bmatrix} P \\ S \end{bmatrix}=A\Pi\begin{bmatrix} 1+2\cos^2\chi & \cos\chi \\ 5\cos\chi+\cos^3\chi & 1+\cos^2\chi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \xi \end{bmatrix} \qquad (4.3)$$

Неравенство $S>2|P|$ дает $\xi+\cos\chi>2$. Определитель матрицы Якоби замены (4.3) равен $A^2\Pi^2(\xi+\cos\chi)\sin^3\chi$, так что она невырождена, пока $\chi\in(0, \pi)$. Следовательно, можно выразить ξ, χ через P, S.

Для вычисления определителя матрицы (3.5) нужны производные χ и ξ по F, G. Короткие выражения для них получатся при $\chi=\pi/2$. Действительно

$$\left.\frac{\partial(P,S)}{\partial(\chi,\xi)}\right|_{\chi=\pi/2}=\begin{bmatrix}-\xi & -5\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \frac{\partial(P,S)}{\partial(F,G)}=\begin{bmatrix}G & 2F\\ F & 2G\end{bmatrix}$$

Обратив первую матрицу и умножив на вторую, получим

$$\frac{\partial(\chi,\xi)}{\partial(F,G)}=\frac{1}{A\Pi\xi}\begin{bmatrix}-G & -5F+2\xi G\\ -F & -5G+2\xi F\end{bmatrix}$$

По-прежнему при $\chi=\pi/2$ имеем $\alpha=2/\xi$, $\beta=^2/_3$, а также

$$[A_{ij}]=\begin{bmatrix}1/A & -1/A\\ 1/A & 1/A+1/C\end{bmatrix},\qquad \frac{\partial k}{\partial c_i}=\Pi\frac{\partial\xi}{\partial c_i}+\frac{\partial\chi}{\partial c_i}$$

Все необходимое для вычисления матрицы (3.5) получено. Заметим, что эта матрица будет сохранять непрерывность при $\xi=2$.

Тогда получается $|F|=|G|$. Однако соответствующая точка находится под правой (при $G>0$) полупрямой на бифуркационной диаграмме, в области регулярных значений. Поэтому можно просто положить $\xi=2$.

Примем, что размерно независимые параметры $A=\Pi=1$. Получим $F=G=1$, $k=1$, $\partial k/\partial c_i=-1$, $\alpha=1$, $\beta=^2/_3$, и искомый определитель равен

$$\begin{vmatrix}-^7/_2 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1/C\end{vmatrix}=-\frac{1}{C}\neq 0$$

5. Рассмотрим уравновешенный гироскоп ($\Pi=0$, $D-C>0$). В области 1 бифуркационной диаграммы (возмущенные прецессии) в силу (1.4)—(1.6) имеем

$$\chi=\arccos(F/G),\qquad \omega_\psi{}^0=0,\qquad \omega_\varphi{}^0=G/C$$
$$k=[G/(D-C)]\sin^2\chi[1+\lambda\sin^2\chi]^{-1},\qquad \lambda=(B+C-D)/(D-C)$$

Видно, что искомый определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix}\ldots & \partial k/\partial F & \partial k/\partial F\\ \partial k/\partial F & 0 & 0\\ \partial k/\partial G & 0 & 1/C\end{vmatrix}=-(\partial k/\partial F)^2/C\neq 0$$

Добавим, что выражение $\psi^\cdot\approx\omega_\psi'\cdot h=(^1/_2h/k)\partial k/\partial F=-h\cos\chi/[G\sin^2\chi\times\times(1+\lambda\sin^2\chi)]$, полученное согласно (3.3), есть формула Магнуса [1, 2], переписанная в константах интегралов движения (напомним, что $h=H-^1/_2G^2/2C$). Отметим также, что прямое вычисление частот привело бы к гиперэллиптическим интегралам.

В области 2 всегда $\chi=0$, и $\omega_\psi{}^0=(F-G)/(D-C)$, $\omega_\varphi{}^0=G/C-(F-G)/ /(D-C)$, $k=(F-G)[G-\lambda(F-G)]/(D-C)>0$.

Удобно взять $\omega_{\psi+\varphi}$ вместо ω_ψ, т. е. $c_2=F-G$, $c_3=G$. В силу четности V_{FG} будет $\alpha=0$. Для простоты пусть $D-C=1$. Определитель (3.5) становится таким:

$$\Delta=\begin{vmatrix}6\beta c_2(-\lambda c_2+c_3) & -2\lambda c_2+c_3 & c_2\\ -2\lambda c_2+c_3 & 1 & 0\\ c_2 & 0 & 1/C\end{vmatrix}$$

Возьмем $c_2=^1/_2c_3/\lambda$, $c_3=1$ и придем к $\beta=^1/_6$, $\Delta=^1/_2C-1$. Удобно взять также $c_2\to1/\lambda-0$. Хотя при этом $k\to0$, величина $k\beta\to^1/_4$, а определитель $\Delta\to^1/_2C$.

В области 3 в силу (2.7), (2.8) требуется знать

$$(\cos\theta[1+\lambda\sin^2\theta]^{-1})_0=0,\qquad M=([1+\lambda\sin^2\theta]^{-1})_0=(1+\lambda)^{-1/2}$$
$$N=(\cos^2\theta[1+\lambda\sin^2\theta]^{-1})_0=[(1+\lambda)^{1/2}+1]^{-1}$$

Положим $\eta=(2H)^{1/2}$. Определитель

$$\frac{\partial(\omega_\theta,\omega_\psi,\omega_\varphi)}{\partial(\eta,F,G)}=\begin{vmatrix}-\eta^{-2}-{}^1/_2(MF^2+NG^2) & 0 & 0\\ 0 & M & 0\\ 0 & 0 & 1/C-N\end{vmatrix}$$

с точностью до слагаемых $O(\eta)$ или $O(\eta^2)$ в каждом элементе. Он порядка $1/\eta^2$ и потому отличен от нуля (при $N=1/C$ надо вычислить его слагаемые порядка $1/\eta$).

6. В заключение отметим, что в лиувиллевых натуральных системах с гамильтонианом

$$H=\Big[\sum_{i=1}^{k}f_i(q_i)\Big]^{-1}\Big[\sum_{i=1}^{k}(p_i^2/2+V_i(q_i))\Big]$$

имеют место помимо H первые интегралы

$$p_i^2/2+V_i(q_i)-Hf_i(q_i)=c_i,\quad \Sigma c_i=0$$

так что утверждения типа леммы 2 могут быть разработаны и для них, а применены, например, к случаю Клебша — Бруна.

Если лиувиллева система зависит от параметров $c_{k+1},\ldots,c_n$, являющихся константами циклических интегралов некоторой исходной системы, то полный набор частот удобно искать не с помощью аналога леммы 1, а вычислением первой строки матрицы, обратной к следующей:

$$\begin{bmatrix}\partial\rho_1/\partial h & \partial\rho_1/\partial c_2 & \ldots & \partial\rho_1/\partial c_k & \partial\rho_1/\partial c_{k+1} & \ldots & \partial\rho_1/\partial c_n\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \partial\rho_k/\partial h & \partial\rho_k/\partial c_2 & \ldots & \partial\rho_k/\partial c_k & \partial\rho_k/\partial c_{k+1} & \ldots & \partial\rho_k/\partial c_n\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix}$$

где ρ_i — переменные «действие» для лиувиллевой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир. 1974. 526 с.
2. *Ишлинский А. Ю., Борзов В. И., Степаненко Н. П.* Лекции по теории гироскопов. М.: Изд-во МГУ. 1983. 245 с.
3. *Смейл С.* Топология и механика // Успехи мат. наук (УМН). 1972. Т. 27. № 2. С. 77—133.
4. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ. 1980. 230 с.
5. *Логачев А. С.* Невырожденность условно-периодических движений тяжелого твердого тела в случае Ковалевской // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1984. Вып. 4. С. 82—85.
6. *Татаринов Я. В.* Лекции по классической динамике. М.: Изд-во МГУ. 1984. 295 с.
7. *Lindstedt A.* Beitrag zur Integration der Differentialgleichugen der Störung theorie // Mem. Acad. Sci. St. Petersbourgh. 1883. Ser. 7. V. 31. No. 4.
8. *Моисеев Н. М.* Асимптотика быстрых вращений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 1. С. 145—158.
9. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ. 1971. 507 с.
10. *Ковалев А. М.* Геометрическое доказательство некоторых теорем о сохранении интегралов движения // Механика твердого тела. Вып. 7. Киев: Наук. думка. 1974. С. 36—40.
11. *Сальникова Т. В.* Неинтегрируемость возмущенной задачи Лагранжа // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1984. № 4. С. 62—66.

Москва

Поступила в редакцию
18.III.1986