МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1987

УДК 521.13

О ДВИЖЕНИЯХ СПУТНИКА, АСИМПТОТИЧЕСКИХ К ЕГО ЭКСЦЕНТРИСИТЕТНЫМ КОЛЕБАНИЯМ

МАРКЕЕВ А. П., ЩЕРБИНА Г. А.

Рассматриваются плоские движения спутника-твердого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на эллиптической орбите. Доказывается существование движений, асимптотических к устойчивым в линейном приближении периодическим колебаниям спутника на орбите малого эксцентриситета. Исследование основано на общем анализе задачи об асимптотических решениях канонической системы дифференциальных уравнений второго порядка, функция Гамильтона которой периодична относительно независимой переменной.

1. Плоские движения спутника-твердого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на эллиптической орбите описываются дифференциальным уравнением второго порядка [1]:

$$(1+e\cos\nu)\,d^2\psi/d\nu^2-2e\sin\nu\, d\psi/d\nu+\alpha\sin\psi\cos\psi=2e\sin\nu \tag{1.1}$$

где ψ — угол между одной из главных центральных осей инерции спутника, лежащих в плоскости орбиты, и радиусом-вектором его центра масс, α — инерционный параметр спутника ($|\alpha|\leqslant 3$), e — эксцентриситет орбиты, ν — истинная аномалия. Достаточно полную библиографию исследований уравнения (1.1) можно найти в [2].

На круговой орбите ($e=0$) уравнение (1.1) допускает частное решение $\psi=0$, отвечающее положению равновесия спутника в орбитальной системе координат; при $\alpha>0$ это равновесие устойчиво. При малых эксцентриситетах равновесие $\psi=0$ переходит в нечетные по ν 2π-периодические колебания, представимые при $\alpha\neq 1$ в виде сходящегося ряда по степеням e:

$$\psi=\psi^*=2e\sin\nu/(\alpha-1)+\ldots \tag{1.2}$$

Движение (1.2) называют эксцентриситетными колебаниями. Они могут быть учтены и приняты в качестве номинальных невозмущенных движений в задачах космодинамики, для которых важна ориентация спутника в пространстве.

Для задач стабилизации и ориентации спутника представляют интерес естественные движения, которые асимптотически при $\nu\to\pm\infty$ стремятся к номинальным движениям в режиме пассивного полета. Эксцентриситет орбиты считается малым, а параметр α положительным и отличным от единицы.

2. Рассмотрим систему уравнений

$$dq/dt=\partial H/\partial p,\qquad dp/dt=-\partial H/\partial q \tag{2.1}$$

Пусть $q=p=0$ — решение этой системы, а функция Гамильтона H представима в достаточно малой окрестности точки $q=p=0$ в виде сходящегося ряда

$$H=\sum_{k=2}^{\infty}H_k(q,p,t) \tag{2.2}$$

где H_k — однородная форма степени k относительно q, p с непрерывными 2π-периодическими по t коэффициентами. Если в характеристическом уравнении линеаризованной системы (2.1):

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0 \tag{2.3}$$

величина $|A|>1$, то характеристичные числа $\pm\varkappa$ линеаризованной системы отличны от нуля, причем

$$\varkappa = (2\pi)^{-1}\ln(|A| + \sqrt{A^2-1}) \tag{2.4}$$

В этом случае, согласно [3—5], система уравнений (2.1) имеет ровно два асимптотических решения $q_j(t)$, $p_j(t)$ $(j=1, 2)$. Одно из них является асимптотическим к началу координат $q=p=0$ при $t\to+\infty$ и представимо в виде ряда по степеням величины $c_1e^{-\varkappa t}$:

$$q_1 = \sum_{k=1}^{\infty} q_1^{(k)}(t)\,(c_1e^{-\varkappa t})^k, \qquad p_1 = \sum_{k=1}^{\infty} p_1^{(k)}(t)\,(c_1e^{-\varkappa t})^k \tag{2.5}$$

а другое — асимптотическое к началу координат при $t\to-\infty$, оно представимо в виде ряда по степеням величины $c_2e^{\varkappa t}$:

$$q_2 = \sum_{k=1}^{\infty} q_2^{(k)}(t)\,(c_2e^{\varkappa t})^k, \qquad p_2 = \sum_{k=1}^{\infty} p_2^{(k)}(t)\,(c_2e^{\varkappa t})^k \tag{2.6}$$

В (2.5), (2.6) величины c_1, c_2 — произвольные постоянные. Ряды (2.5), (2.6) абсолютно сходятся, если величины $|c_1|$, $|c_2|$ достаточно малы. Коэффициенты $q_j^{(k)}$, $p_j^{(k)}$ рядов (2.5), (2.6) 2π-периодичны по t.

Если $|A|\leqslant 1$, то характеристичные числа линеаризованной системы (2.1) равны нулю и теория асимптотических решений Ляпунова [3] и Пуанкаре [4] неприменима. Асимптотические решения системы (2.1), когда $|A|=1$, рассматривались в [6] в связи с исследованием устойчивости решения $q=p=0$. В дальнейшем будет рассматриваться случай $|A|<1$.

При $|A|<1$ корни уравнения (2.3) различны и имеют модули, равные единице; характеристические показатели $\pm i\lambda$ чисто мнимые, причем величины λ и 2λ не будут целыми числами, т. е. в системе (2.1) нет резонансов до второго порядка включительно.

Пусть в системе (2.1) нет резонансов до порядка $2n$, т. е. число $k\lambda$ не будет целым при $k=1, 2, \ldots, 2n$. Тогда при соответствующем выборе переменных q, p (осуществляемом, например, при помощи преобразования Биркгофа [7]) функция Гамильтона (2.2) может быть записана в виде

$$H = \lambda r + c_2r^2 + \ldots + c_nr^n + H'(q, p, t) \tag{2.7}$$

где $c_2, \ldots, c_n$ — постоянные коэффициенты, $2r=q^2+p^2$, а ряд H' начинается с членов не ниже $(2n+1)$-й степени.

Общим эллиптическим случаем называют случай, когда в (2.7) хотя бы одна из постоянных $c_2, \ldots, c_n$ отлична от нуля.

Теорема 1. В общем эллиптическом случае у системы (2.1) не существует решений, асимптотических к началу координат $q=p=0$.

Эта теорема непосредственно следует из теоремы Мозера об инвариантных кривых [8]. Действительно, согласно теореме Мозера, в общем эллиптическом случае в любой сколь угодно малой окрестности точки $q=p=0$ существуют инвариантные кривые, окружающие эту точку. Отсюда и из единственности решения задачи Коши для системы (2.1) вытекает теорема 1.

Дальше асимптотические решения системы (2.1) рассматриваются для резонансных случаев, когда число $k\lambda$ — целое при $k\geqslant 3$.

3. Пусть $3\lambda=N$, где N — целое число. При соответствующем выборе переменных q, p функцию Гамильтона (2.2) можно [9] записать в виде

$$H={}^1/_2\lambda(q^2+p^2)+2u(q^3-3qp^2)+2v(p^3-3pq^2)+H'(q,\ p,\ t) \qquad (3.1)$$

где разложение H' начинается с членов не ниже четвертой степени по q и p, а функции u и v определяются равенствами (α_1 и β_1 — постоянные) $u=\alpha_1\cos Nt-\beta_1\sin Nt$, $v=\alpha_1\sin Nt+\beta_1\cos Nt$. Считая, что $\alpha_1^2+\beta_1^2\neq 0$, сделаем каноническую замену переменных q, $p\to x$, y по формулам

$$\begin{gathered} q={}^1/_6[x\cos(\lambda t-\alpha)+y\sin(\lambda t-\alpha)]/\delta_1 \\ p=-{}^1/_6[x\sin(\lambda t-\alpha)-y\cos(\lambda t-\alpha)]/\delta_1 \\ \sin 3\alpha=\alpha_1/\delta_1, \quad \cos 3\alpha=\beta_1/\delta_1, \quad \delta_1=(\alpha_1^2+\beta_1^2)^{1/2} \end{gathered} \qquad (3.2)$$

В переменных x, y уравнения движения

$$dx/dt=\partial H/\partial y, \quad dy/dt=-\partial H/\partial x \qquad (3.3)$$

задаются функцией Гамильтона вида

$$H={}^1/_3(y^3-3x^2y)+H'(x,\ y,\ t) \qquad (3.4)$$

где H' 6π-периодична по t и аналитична по x, y, причем ее разложение в ряд начинается с членов не ниже четвертой степени.

Введя еще новые (неканонические) переменные — полярные координаты ρ, θ по формулам $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, получим уравнения движения в виде

$$d\theta/dt=\rho F(\theta)+\Theta(\rho,\ \theta,\ t), \quad d\rho/dt=\rho^2G(\theta)+R(\rho,\ \theta,\ t) \qquad (3.5)$$

$$F(\theta)=\sin 3\theta, \quad G(\theta)=-\cos 3\theta \qquad (3.6)$$

где функции Θ и R аналитичны в окрестности начала координат и их разложения в ряды по степеням ρ начинаются с членов не ниже второй и третьей степени соответственно; Θ и R периодичны по переменным θ, t и при $\rho\to 0$ стремятся к нулю равномерно относительно этих переменных.

К системе (3.5) применимы результаты по исследованию асимптотических траекторий системы дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности особой точки [10—12], где функции Θ и R не зависят явно от t. Однако указанных выше свойств этих функций достаточно для применимости необходимых результатов [10—12], в соответствии с которыми получим, что асимптотические при $t\to\pm\infty$ траектории системы (3.5) могут входить в начало координат только под углами $\theta=\theta_*$, где θ_* — корни уравнения $F(\theta)=0$. Если θ_* — простой корень этого уравнения и при $\theta=\theta_*$ величина $GdF/d\theta$ отрицательна, то у системы (3.5) существует ровно одна асимптотическая траектория, входящая в начало координат при $t\to+\infty$ или $t\to-\infty$ под углом θ_*.

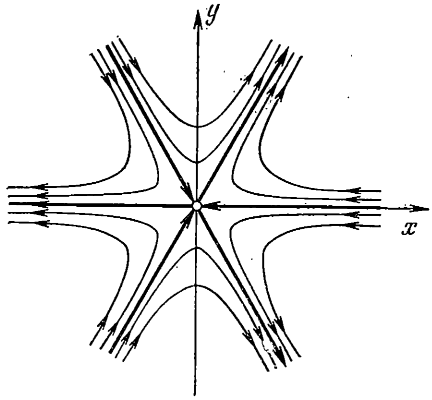
Использовав выражения (3.6) для функций $F(\theta)$ и $G(\theta)$, получим, что асимптотические траектории системы (3.5) входят в начало координат под углами $\theta_k={}^1/_3k\pi$ ($k=0,\ 1,\dots,5$). При этом по каждому из направлений $\theta=\theta_k$ в начало координат входит ровно одна траектория. Асимптотические траектории, отвечающие углам θ_0, θ_2, θ_4 и θ_1, θ_3, θ_5 входят в начало координат при $t\to+\infty$ и $t\to-\infty$ соответственно. Другим путем аналогичный результат получен в [13].

Качественная картина поведения интегральных кривых системы (3.5) в малой окрестности начала координат показана на фиг. 1.

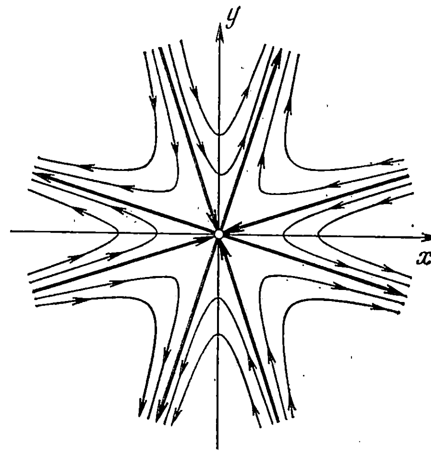
Для получения аналитического представления асимптотических решений при больших значениях $|t|$ воспользуемся следующими сведениями из [14]. Рассмотрим систему

$$\tau\frac{dy_i}{d\tau}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\tau)y_j+a_i(\tau)\tau+Y_i \quad (y_1,\dots,y_n,\tau) \qquad (3.7)$$

$$Y_i=\sum_{m+m_1+\ldots+m_n\geqslant 2}A_i^{(m,m_1,\ldots,m_n)}(\tau)\tau^m y_1^{m_1}\ldots y_n^{m_n} \quad (i=1,2,\dots,n) \qquad (3.8)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь ряды для Y_i сходятся при $|\tau|<\tau_1$, где $\tau_1>0$ — постоянная и $|y_i|<<y_0$. Функции $a_{ij}(\tau)$, $a_i(\tau)$, $A_i^{(m, m_1 \dots, m_n)}(\tau)$ вещественны, непрерывны и ограничены при $0<\tau\leqslant 1$.

Пусть $1, \mu_1, \dots, \mu_n$ — характеристичные числа системы

$$\frac{dz}{d\eta}=-z, \qquad \frac{dy_i}{d\eta}=-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(e^{-\eta})\,y_j-a_i(e^{-\eta})\,z \tag{3.9}$$

Теорема [14]. Если $\mu_k>0$ при $k\leqslant l$ и система (3.9) правильная, то система уравнений (3.7) имеет семейство решений, зависящее от l произвольных постоянных, представимое в форме рядов

$$y_i=\sum_{m+m_1+\dots+m_l\geqslant 1} K_i^{(m,m_1,\dots,m_l)}(\tau)\,\tau^{(m+m_1\mu_1+\dots+m_l\mu_l)}c_1^{m_1}\dots c_l^{m_l}, \quad (i=1,2,\dots,n) \tag{3.10}$$

которые сходятся при $|\tau|<\tau_0$, $|c_i|<c_0$ $(i=1, 2,\dots, l)$, где τ_0 — достаточно малая величина, $c_0=\mathrm{const}$. Функции $K_i^{(m, m_1, \dots, m_l)}(\tau)$ в (3.10) обладают свойством $\lim_{\tau\to 0}K_i^{(m, m_1, \dots, m_l)}(\tau)\tau^{\beta}=0$ $(\beta>0$ — const).

Для приведения системы (3.3) к виду (3.7) рассмотрим асимптотические решения укороченной системы, получаемой из (3.3), если в функции Гамильтона (3.4) отбросить члены H'. Асимптотические траектории укороченной системы, входящие в начало координат под углами $\theta_k={}^1/_3k\pi$ $(k=0, 1,\dots, 5)$, будут такими:

$$x_k(t)=\frac{x_k(0)\cos\theta_k}{\cos\theta_k+(-1)^k x_k(0)\,t}, \quad y_k(t)=\frac{y_k(0)\sin\theta_k}{\sin\theta_k+(-1)^k y_k(0)\,t}, \quad (k=0,1,\dots,5) \tag{3.11}$$

Если пренебречь величинами второго и более высоких порядков относительно $|t|^{-1}$, то функции (3.11) при больших значениях $|t|$ могут быть записаны в виде $x_k(t)=a_k/t$, $y_k(t)=b_k/t$, $a_k=(-1)^k\cos\theta_k$, $b_k=(-1)^k\sin\theta_k$ $(k=0, 1,\dots, 5)$. Для исследования асимптотических траекторий полной (неукороченной) системы (3.3) при больших $|t|$ целесообразно сделать замену, введя новые функции y_1, y_2 и новую независимую переменную τ по формулам

$$x=\tau(a_k+y_1), \quad y=\tau(b_k+y_2), \quad \tau=1/t \tag{3.12}$$

В новых переменных система (3.3) примет вид

$$\begin{aligned}\tau dy_1/d\tau&=(2a_k-1)\,y_1-2b_ky_2-\tau f_3(a_k, b_k, 1/\tau)+Y_1(y_1, y_2, \tau)\\ \tau dy_2/d\tau&=-2b_ky_1-(2a_k+1)\,y_2+\tau g_3(a_k, b_k, 1/\tau)+Y_2(y_1, y_2, \tau)\end{aligned} \tag{3.13}$$

где $f_3(x, y, t)$, $g_3(x, y, t)$ — члены третьей степени в разложении функций $\partial H'/\partial y$, $\partial H'/\partial x$ в ряды по степеням x, y, а функции Y_1, Y_2 представимы в виде (3.8).

Система (3.13) имеет структуру системы (3.7). Соответствующая ей линейная система (3.9) правильная [15] и имеет характеристичные числа, равные 1,1, —3. Поэтому, согласно [14], система (3.13) имеет асимптотические решения, стремящиеся к началу координат при $\tau\to 0$ (т. е. при $t\to+\infty$ или $t\to-\infty$) и представимые рядами вида (3.10) (c — произвольная постоянная):

$$y_i=\sum_{m+m_1\geq 1} K_i^{(m,m_1)}(\tau)\tau^{m+m_1}c^{m_1} \qquad (i=1,2) \tag{3.14}$$

В переменных x, y, t асимптотические решения при больших значениях величины $|t|$ имеют представление

$$x_k(t)=\frac{a_k}{t}+\frac{\varphi_k(t,c)}{t^2}, \qquad y_k(t)=\frac{b_k}{t}+\frac{\psi_k(t,c)}{t^2} \qquad (k=0,1,\ldots,5) \tag{3.15}$$

где функции $\varphi_k(t, c)$, $\psi_k(t, c)$ $(k=0, 1,\ldots, 5)$ равномерно ограничены при $|t|>t_0$, где t_0 достаточно велико. Таким образом, получена следующая

Теорема 2. Если в системе (2.1) нет резонансов до второго порядка включительно, но есть резонанс третьего порядка $3\lambda=N$ и величина $\alpha_1^2+\beta_1^2$ отлична от нуля, то существует ровно по три асимптотических решения, стремящихся к началу координат $q=p=0$ при $t\to+\infty$ и $t\to-\infty$; поведение этих решений при $|t|\to\infty$ описывается формулами (3.2), (3.15).

4. Пусть в системе (2.1) нет резонансов до третьего порядка включительно, но есть резонанс четвертого порядка $4\lambda=N$. При подходящем выборе переменных q, p функцию Гамильтона (2.2) можно [9] представить в форме (c_2, α_2, β_2 — постоянные):

$$H={}^1/_2\lambda(q^2+p^2)+{}^1/_4c_2(q^2+p^2)^2+u(q^4-6q^2p^2+p^4)-4vpq(q^2-p^2)+H'(q,p,t)$$
$$u=\alpha_2\cos Nt-\beta_2\sin Nt, \qquad v=\alpha_2\sin Nt+\beta_2\cos Nt$$

где разложение H' начинается с членов не ниже пятой степени относительно q, p. Положим $b=4(\alpha_2^2+\beta_2^2)^{1/2}$. Если $b<|c_2|$, то, применяя теорему Мозера об инвариантных кривых, можно [9] показать, что в любой сколь угодно малой окрестности начала координат $q=p=0$ существуют инвариантные кривые, окружающие точку $q=p=0$; поэтому при $b<|c_2|$ асимптотических к началу координат решений системы (2.1) не существует.

Пусть теперь выполняется неравенство $b>|c_2|$. Определим угол β равенствами $\sin^4\beta=\alpha_2(\alpha_2^2+\beta_2^2)^{-1/2}$, $\cos 4\beta=\beta_2(\alpha_2^2+\beta_2^2)^{-1/2}$ и сделаем каноническую замену переменных q, $p\to x$, y по формулам

$$q=(3b-c_2)^{-1/2}[x\cos(\lambda t-\beta+\pi/8)+y\sin(\lambda t-\beta+\pi/8)]$$
$$p=-(3b-c_2)^{-1/2}[x\sin(\lambda t-\beta+\pi/8)-y\cos(\lambda t-\beta+\pi/8)]$$

В новых переменных уравнения движения имеют вид (3.3) с гамильтонианом

$$H={}^1/_4\sin\gamma(x^4+y^4)-{}^1/_2x^2y^2+H'(x,y,t) \tag{4.1}$$
$$\gamma=\arcsin((b+c_2)/(3b-c_2))$$

где функция H' 8π-периодична по t, аналитична по x, y и ее разложение в ряд начинается с членов не ниже пятого порядка.

В полярных координатах система (3.3) имеет вид

$$d\theta/dt=\rho^2F(\theta)+\Theta(\rho,\theta,t), \qquad d\rho/dt=\rho^3G(\theta)+R(\rho,\theta,t)$$
$$F(\theta)=-\sin\gamma+{}^1/_2(1+\sin\gamma)\sin^2 2\theta \qquad G(\theta)=-{}^1/_4(1+\sin\gamma)\sin 4\theta \tag{4.2}$$

а функции Θ и R периодичны по θ, t, при $\rho\to 0$ стремятся к нулю равномерно относительно θ, t, аналитичны по ρ и их разложения в ряд по степеням ρ начинаются с членов не ниже третьей и четвертой степени соответственно.

Опираясь на результаты [10—12], можно показать, что асимптотические траектории у системы (4.2) существуют и входят в начало координат только по тем направлениям, которые определяются углами θ_*, являющимися корнями уравнения $F(\theta)=0$. На интервале $(0, 2\pi)$ это уравнение имеет восемь корней θ_k ($k=0, 1, \ldots, 7$): $\theta_0=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\gamma/2))^{1/2}$, $\theta_1=\pi/2-\theta_0$, $\theta_2=\pi/2+\theta_0$, $\theta_3=\pi-\theta_0$, $\theta_4=\pi+\theta_0$, $\theta_5={}^3/_2\pi-\theta_0$, $\theta_6={}^3/_2\pi+\theta_0$, $\theta_7=2\pi-\theta_0$. По каждому из этих направлений в начало координат входит ровно одна асимптотическая траектория, причем направления, задаваемые углами θ_0, θ_2, θ_4, θ_6 и θ_1, θ_3, θ_5, θ_7, отвечают траекториям, входящим в начало координат при $t\to+\infty$ и $t\to-\infty$ соответственно.

Качественная картина поведения интегральных кривых системы (4.2) в окрестности начала координат показана на фиг. 2.

Асимптотические решения укороченной системы (3.3) с гамильтонианом $H-H'$ из (4.5) можно получить в явном виде. Четыре решения, стремящиеся к началу координат при $t\to+\infty$, будут такими:

$$x(t)=x(0)[1+2x^2(0)\cos\gamma(\operatorname{tg}(\gamma/2))^{1/2}t]^{-1/2}$$
$$y(t)=[\operatorname{tg}(\gamma/2)]^{1/2}x(t) \quad (\theta=\theta_0,\ \theta=\theta_4) \tag{4.3}$$
$$x(t)=x(0)[1+2x^2(0)\cos\gamma(\operatorname{ctg}(\gamma/2))^{1/2}t]^{-1/2}$$
$$y(t)=-[\operatorname{ctg}(\gamma/2)]^{1/2}x(t) \quad (\theta=\theta_2,\ \theta=\theta_6) \tag{4.4}$$

Другие четыре решения, стремящиеся к началу координат при $t\to-\infty$, имеют выражения

$$x(t)=x(0)[1-2x^2(0)\cos\gamma(\operatorname{ctg}(\gamma/2))^{1/2}t]^{-1/2}$$
$$y(t)=[\operatorname{ctg}(\gamma/2)]^{1/2}x(t) \quad (\theta=\theta_1,\ \theta=\theta_5) \tag{4.5}$$
$$x(t)=x(0)[1-2x^2(0)\cos\gamma(\operatorname{tg}(\gamma/2))^{1/2}t]^{-1/2}$$
$$y(t)=-[\operatorname{tg}(\gamma/2)]^{1/2}x(t) \quad (\theta=\theta_3,\ \theta=\theta_7) \tag{4.6}$$

Для получения аналитического представления асимптотических решений при больших значениях $|t|$ выделим главную часть разложения решений (4.3)—(4.6) в ряды по степеням величины $|t|^{-1/2}$ и сделаем замену переменных, аналогичную (3.1). В новых переменных получим систему вида (3.7).

Покажем это на примере асимптотических решений, входящих при $t\to+\infty$ в начало координат под углом θ_0 или θ_4 (остальные решения рассматриваются совершенно аналогично). Учитывая вид решения (4.3) укороченной системы (3.3), выполним следующую замену переменных:

$$x=\tau(d+y_1),\ y=\tau(e+y_2),\ \tau=t^{-1/2}$$
$$d=(2\cos\gamma)^{-1/2}[\operatorname{tg}(\gamma/2)]^{-1/4},\ e=(2\cos\gamma)^{-1/2}[\operatorname{tg}(\gamma/2)]^{1/4}$$

В новых переменных уравнения (3.3) будут

$$\begin{aligned}\tau dy_1/d\tau&=(4de-1)y_1-2(3\sin\gamma e^2-d^2)y_2-\tau f_4(d,e,1/\tau^2)+Y_1(y_1,y_2,\tau)\\ \tau dy_2/d\tau&=2(3\sin\gamma d^2-e^2)y_1-(4de+1)y_2+\tau g_4(d,e,1/\tau^2)+Y_2(y_1,y_2,\tau)\end{aligned} \tag{4.7}$$

где $f_4(x, y, t)$, $g_4(x, y, t)$ — члены четвертой степени в разложениях функций dH'/dy, dH'/dx в ряды по степеням x, y, а Y_1, Y_2 — функции типа (3.8).

Соответствующая системе (4.7) линейная система (3.9) правильная и ее характеристичные числа равны 1, 2, −4. Согласно [14], система (4.7) имеет асимптотические решения, представимые рядами типа (3.10) (c — произвольная постоянная):

$$y_i=\sum_{m+m_1\geq 1}K_i^{(m,m_1)}(\tau)\tau^{m+2m_1}c^{m_1} \qquad (i=1,2)$$

В переменных x, y, t получаем следующее представление асимптотических решений системы (3.3), входящих при $t\to+\infty$ в начало координат под углом $\theta=\theta_0$ или $\theta=\theta_4$:

$$x=dt^{-1/2}+\varphi(t,c)/t,\ y=et^{-1/2}+\psi(t,c)/t \tag{4.8}$$

где функции $\varphi(t, c)$, $\psi(t, c)$ равномерно ограничены при достаточно больших t.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 3. Если в системе (2.1) нет резонансов до третьего порядка включительно, но есть резонанс четвертого порядка $4\lambda=N$, то при выполнении неравенства $b>|c_2|$ (см. п. 4) существует ровно по четыре асимптотических решения, стремящихся к началу координат при $t\to+\infty$ и $t\to-\infty$. Поведение этих решений при больших значениях величины $|t|$ описывается формулами вида (4.8). Если же имеет место неравенство $b<|c_2|$, то асимптотических к началу координат решений не существует.

5. Пусть функция Гамильтона (2.2) такова, что число $k\lambda$ не будет целым при $k=1, 2, ..., 2n$, коэффициенты $c_2, c_3, ..., c_n$ в (2.7) равны нулю, а число $(2n+1)\lambda$ целое. Тогда функцию Гамильтона (2.2) можно привести к виду [9]: $H=ar^n r^{1/2}\cos(2n+1)\varphi+ +H'(q, p, t)$, где $q=(2r)^{1/2}\sin\varphi$, $p=(2r)^{1/2}\cos\varphi$, a – постоянный коэффициент, $H'= =O(r^{n+1})$. Действуя аналогично пп. 3, 4, можно показать, что при $a\neq 0$ система (2.1) имеет ровно $2(2n+1)$ решений, из которых половина стремится к началу координат при $t\longrightarrow+\infty$, а вторая половина – при $t\longrightarrow-\infty$. При больших $|t|$ величины q и p имеют порядок $|t|^{1/(1-2n)}$.

Пусть далее число $k\lambda$ не будет целым при $k=1, 2, \ldots, 2n+1$, а $(2n+2)\lambda$ – целое. Тогда функция Гамильтона (2.2) приводится к виду [9]: $H=r^{n+1}[c+b\cos 2(n+1)\varphi]+ +O(r^{n+3/2})$, где b и c – постоянные величины. При $|b|<|c|$ асимптотических траекторий не существует, а при $|b|>|c|$ существует ровно $4(n+1)$ асимптотических траекторий, половина из которых стремится к началу координат при $t\longrightarrow+\infty$, а другая половина – при $t\longrightarrow-\infty$. При больших $|t|$ q и p имеют порядок $|t|^{-1/(2n)}$.

Отметим, что во всех рассмотренных выше случаях (включая случай отличных от нуля характеристичных чисел линеаризованной системы) при существовании траекторий, асимптотических к положению равновесия $q=p=0$, последнее неустойчиво и наоборот.

6. Для исследования движений спутника, асимптотических к его эксцентриситетным колебаниям (1.2), введем в уравнении (1.1) вместо ψ новую переменную q по формуле $\psi=\psi^*+q/(1+e\cos\nu)$. Функция q будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2q}{d\nu^2}+\frac{e\cos\nu}{1+e\cos\nu}q+$$
$$+\frac{\alpha}{2}\left[\sin 2\psi^*\left(\cos\frac{2q}{1+e\cos\nu}-1\right)+\cos 2\psi^*\sin\frac{2q}{1+e\cos\nu}\right]=0 \qquad (6.1)$$

Учитывая нечетность функции $\psi^*(\nu)$, можно проверить, что уравнение (6.1) наряду с решением $q(\nu)$ имеет также решение $-q(-\nu)$. Поэтому плоские движения спутника, асимптотические к его эксцентриситетным колебаниям, обладают следующим свойством: если существует движение $q(\nu)$, асимптотическое к колебаниям (1.2) при $\nu\longrightarrow+\infty$, то существует и движение $-q(-\nu)$, асимптотическое к (1.2) при $\nu\longrightarrow-\infty$.

Вводя импульс по формуле $p=dq/d\nu$, уравнение (6.1) можно записать в виде системы (2.1). При этом первые три формы H_k в функции Гамильтона (2.2) будут

$$H_2={}^1/_2(\alpha\cos 2\psi^*+e\cos\nu)(1+e\cos\nu)^{-1}q^2+{}^1/_2p^2$$
$$H_3=-{}^1/_3\alpha\sin 2\psi^*(1+e\cos\nu)^{-2}q^3,$$
$$H_4=-{}^1/_6\alpha\cos 2\psi^*(1+e\cos\nu)^{-3}q^4$$

При малых e в узких областях параметрического резонанса, примыкающих в плоскости e, α к точкам $\alpha={}^1/_4$ и $\alpha={}^9/_4$ оси $e=0$, эксцентриситетные колебания неустойчивы уже в первом приближении [2] (в уравнении (2.3) $|A|>1$). Границы областей параметрического резонанса задаются уравнениями $\alpha={}^1/_4+{}^3/_8e+\ldots$, $\alpha={}^9/_4+ +33489/6400e^2\pm1648323/358400e^3+\ldots$

Согласно п. 2, в областях параметрического резонанса существует ровно по два асимптотических движения: одно стремится к эксцентриситетным колебаниям при $\nu\to+\infty$, а другое – при $\nu\to-\infty$.

Пусть в дальнейшем параметры e и α не принадлежат областям параметрического резонанса. Тогда в уравнении (2.3) $|A|<1$, а характеристические показатели при малых e и для значений параметра α из интервалов (0,1), (1.3) будут аналитичны по e. Из точек $\alpha={}^1/_9$, ${}^4/_9$, ${}^{16}/_9$, ${}^{25}/_9$ оси α выходят кривые, на которых реализуются резонансы третьего порядка $3\lambda=1, 2, 4, 5$. При малых e эти кривые имеют уравнения [16]:

$$\alpha={}^1/_9+71/240e^2+\ldots\quad(3\lambda=1) \qquad (6.2)$$
$$\alpha={}^4/_9+3274/525e^2+\ldots\quad(3\lambda=2)$$
$$\alpha={}^{16}/_9+92296/8085e^2+\ldots\quad(3\lambda=4)$$
$$\alpha={}^{25}/_9+48625/17472e^2+\ldots\quad(3\lambda=5)$$

Из точек $\alpha={}^1/_{16}$, ${}^9/_{16}$, ${}^{25}/_{16}$ исходят кривые, на которых выполняются соотношения резонансов четвертого порядка: $4\lambda=1, 3, 5$.

Если из рассматриваемых интервалов (0,1), (1.3) оси α помимо точек $\alpha={}^1/_4$, ${}^9/_4$, отвечающих областям параметрического резонанса, исключить еще точки $\alpha={}^1/_9$, ${}^4/_9$, 16/9, 25/9 и $\alpha=1/16$, 9/16, 25/16, являющиеся порождающими для кривых резонансов третьего и четвертого порядка, то при достаточно малых e функцию Гамильтона (2.2) задачи можно привести к виду (2.7) (где $n=2$). При этом [16]:

$$c_2=-{}^1/_4+O(e^2) \qquad (6.3)$$

Так как при малых e величина $c_2\neq 0$, то согласно теореме 1, для оставшихся значений α из интегралов (0, 1), (1, 3) при достаточно малых e не существует движений спутника, асимптотических к эксцентриситетным колебаниям (1.2).

Пусть параметры e, α лежат на какой-либо из кривых (6.2) резонансов третьего порядка. В каждом из этих резонансных случаев функцию Гамильтона (2.2) можно при помощи преобразования Биркгофа привести к виду (3.1); при каждом из резонансов $3\lambda=N$ величина $\delta_1=(\alpha_1^2+\beta_1^2)^{1/2}\neq 0$ (это устанавливается по членам, порядок которых не ниже e^N). Поэтому, согласно теореме 2, в каждом из резонансных случаев $3\lambda=N$ ($N=1, 2, 4, 5$) существуют три движения спутника, асимптотических к его эксцентриситетным колебаниям (1.2) при $\nu\to+\infty$ и три – при $\nu\to-\infty$.

Фактическое построение асимптотических решений можно осуществить при помощи преобразования Биркгофа или какой-либо из его современных модификаций [17]. Вычисления показывают, что, например, при резонансе $3\lambda=1$ асимптотические движения, стремящиеся к эксцентриситетным колебаниям (1.2) при $\nu\to+\infty$ представляются равенствами $\psi=\psi^*+q_i(\nu)$ ($i=1, 2, 3$), где функции $q_i(\nu)$ с погрешностью порядка $\mu=\max(ec, c^2)$ определяются формулами ($c>0$ – произвольная постоянная)

$$q_1=c(1+ac\nu)^{-1}[\sqrt{3}\sin(\nu/3)+\cos(\nu/3)] \tag{6.4}$$

$$q_2=c(1+ac\nu)^{-1}[-\sqrt{3}\sin(\nu/3)+\cos(\nu/3)]$$

$$q_3=-2c(1+ac\nu)^{-1}\cos(\nu/3),\quad a={}^3/_8e+O(e^2)$$

Для движений, асимптотических к (1.2) при $\nu\to-\infty$, имеем $\psi=\psi^*+q_{3+j}(\nu)$ ($j=1, 2, 3$); функции q_{3+j} на основании отмеченного выше свойства плоских асимптотических движений спутника, могут быть получены из функций (6.4) по формулам $q_{3+j}(\nu)=-q_j(-\nu)$ ($j=1, 2, 3$).

При резонансах четвертого порядка $4\lambda=N$ ($N=1, 3, 5$) в функции Гамильтона (4.1) величины α_2, β_2 имеют порядок по e, не меньший N, а c_2 вычисляется по формуле (6.3). При достаточно малых e выполняется неравенство $4(\alpha_2^2+\beta_2^2)^{1/2}<|c_2|$ и, согласно теореме 3, при малых e не существует движений спутника, асимптотических к его эксцентриситетным колебаниям.

Таким образом, при достаточно малых e для всех значений α из интервалов (0, 1) и (1, 3), кроме значений $\alpha={}^1/_4, {}^9/_4; {}^1/_9, {}^4/_9, {}^{16}/_9, {}^{25}/_9$, не существует движений спутника, асимптотических к его эксцентриситетным колебаниям (1.2). В областях параметрического резонанса, исходящих из точек $\alpha={}^1/_4, {}^9/_4$, существует ровно по два асимптотических движения: одно стремится к (1.2) при $\nu\to+\infty$, а другое – при $\nu\to-\infty$. При значениях параметров, лежащих на кривых (6.4), исходящих из точек $\alpha={}^1/_9, {}^4/_9, {}^{16}/_9, {}^{25}/_9$, существует по шесть асимптотических движений; три стремятся к (1.2) при $\nu\to+\infty$ и три – при $\nu\to-\infty$.

В заключение отметим, что аналогично можно исследовать и более общую задачу о плоских движениях спутника на эллиптической орбите, асимптотических к его периодическим движениям при произвольных значениях эксцентриситета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В. В.* О либрации спутника // Искусственные спутники Земли. Вып. 3. М.: Изд-во АН СССР. 1959. С. 13–31.
2. *Сарычев В. А.* Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Сер. Исследования космического пространства. М.: ВИНИТИ. 1978. Т. 11. 222 с.
3. *Ляпунова А. М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1956. Т. 2. С. 7–263.
4. *Пуанкаре А.* Избр. тр. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука. 1971. 771 с.
5. *Moser J.* The analytic invariants of an area-preserving mapping near a hyperbolic fixed point // Communs Pure and Appl. Math. 1956. V. 9. No. 4. P. 673–692.
6. *Мерман Г. А.* Асимптотические решения канонической системы с одной степенью свободы в случае нулевых характеристических показателей // Бюл. Ин-та теорет. астрон. 1964. Т. 9. № 6. С. 394–424.
7. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат. 1941. 320 с.
8. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир. 1972. 167 с.
9. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука. 1978. 312 с.
10. *Forster H.* Über das Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung ersetr Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes // Math. Z. 1937. B. 43. H. 2. S. 271–320.
11. *Lohn E. R.* Über singuläre Punkte gewöhnlicher Differentialgleichungen // Math. Z. 1938. B. 44. H. 4. S. 507–530.
12. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат. 1949. 550 с.
13. *Мерман Г. А.* О неустойчивости периодического решения канонической системы с одной степенью свободы в случае главного резонанса // Проблемы движения искусственных небесных тел. М.: Изд-во АН СССР. 1963. С. 18–41.
14. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М.: Высш. шк. 1973. 271 с.
15. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1966. 530 с.
16. *Zlatoustov V. A., Markeev A. P.* Stability of planar oscillations of a satellite in an elliptic orbit // Celest. Mech. 1973. V. 7. No. 1. P. 31–45.
17. *Джакалья Г. Е. О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука. 1979. 319 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.XII.1985