МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1987

УДК 531.383

ВЛИЯНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ШАРИКОПОДШИПНИКОВ НА ТОЧНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИ НАСТРАИВАЕМОГО ГИРОСКОПА

БАЛЬМОНТ В. Б., ШАТАЛОВ М. Ю.

В рамках линейной теории проанализировано влияние возмущений, генерируемых идеальными шарикоподшипниковыми опорами, на точность динамически настраивамого гироскопа с однокарданным подвесом. Показано, что наиболее опасными являются следующие погрешности шарикоподшипников: овальность дорожек качения колец подшипников, перекос наружных колец и «трехгранка» колец подшипников. Рассмотрены вопросы уменьшения ухода гироскопа при возмущениях на двойной частоте вращения вала. Изучена возможность отстройки динамически настраиваемого гироскопа от колебаний на нутационных частотах при использовании шарикоподшипников с детерминированным спектром возмущений.

1. Одной из основных причин уходов динамически настраиваемых гироскопов являются вибровозбуждения, генерируемые шарикоподшипниками вала при его вращении. Подобные возмущения обуславливаются погрешностями макрогеометрии дорожек качения колец и шариков и могут рассматриваться как переменные силы, действующие на вал в местах установки подшипников. В зависимости от соотношения фаз этих сил вал может совершать различные по форме пространственные движения. В рамках рассматриваемой далее математической модели динамически настраиваемого гироскопа с однокарданным подвесом наиболее опасными являются угловые движения вала [1]. Они могут приводить к уходу гироскопа и вызывать незатухающие нутационные колебания ротора.

В данной публикации исследовано влияние отдельных погрешностей шарикоподшипников (некруглости и перекосов дорожек качения колец), а также некоторых конструктивных характеристик динамически настраиваемого гироскопа (радиальной жесткости, осевого натяга шарикоподшипников, соотношений моментов инерции вала, кардана, ротора и других) на его уход. Получена соответствующая формула и приведены численные примеры расчета уходов гироскопа, обусловленных погрешностями шарикоподшипников. Показано, что с целью уменьшения опасности возникновения незатухающих колебаний ротора следует использовать шарикоподшипники с детерминированным спектром возмущений [2, 3]. Это позволяет осуществить эффективную отстройку нутационных частот динамически настраиваемого гироскопа от ограниченного числа известных частот вибровозмущений, генерируемых шарикоподшипниками, и исключить опасность возникновения резонансных режимов.

Будем полагать, что со стороны неидеальных шарикоподшипников на вал действуют силы, спектр которых известен. Вал приводится во вращение моментом, направленным вдоль оси Oz статора электродвигателя, неподвижного относительно инерциального пространства $Oxyz$.

Зададим положение вала последовательностью поворотов:

$$Oxyz \xrightarrow[Oz]{\gamma=\Omega t} O\xi^*\eta^*\zeta^* \xrightarrow[O\xi^*]{\psi} O\xi_1\eta_1\zeta_1 \xrightarrow[O\eta_1]{\theta} O\xi_s\eta_s\zeta_s$$

где система координат $O\xi_s\eta_s\zeta_s$ связана с валом. Введем системы координат: $O\xi_c\eta_c\zeta_c$, связанную с карданом, и $O\xi\eta\zeta$, связанную с ротором. Последовательность поворотов кардана и ротора задана следующим образом:

$$O\xi_s\eta_s\zeta_s \xrightarrow[O\xi_s]{\alpha} O\xi_c\eta_c\zeta_c \xrightarrow[O\eta_c]{\beta} O\xi\eta\zeta$$

Запишем уравнения движения вала, кардана и ротора в осях, связанных с вращающимися телами подвеса [1]:

$$\begin{gathered} G_{\xi_s}{}^{\cdot}+q_sG_{\zeta_s}-r_sG_{\eta_s}=N_{\xi_s}-L_{\xi_c} \\ G_{\eta_s}{}^{\cdot}-r_sG_{\xi_s}-p_sG_{\zeta_s}+(G_{\zeta_s}+p_sG_{\eta_s}-q_sG_{\xi_s})\operatorname{tg}\alpha+ \\ +(K_{\eta_c}{}^{\cdot}+r_cK_{\xi_c}-p_cK_{\zeta_c})\sec\alpha=N_{\eta_s}+M_{\zeta_s}\operatorname{tg}\alpha-M_\eta\sec\alpha \\ K_{\xi_c}{}^{\cdot}+q_cK_{\zeta_c}-r_cK_{\eta_c}+(H_\xi{}^{\cdot}+qH_\zeta-rH_\eta)\cos\beta+(H_\zeta+pH_\eta-qH_\xi)\sin\beta=L_{\xi_c}, \\ H_\eta{}^{\cdot}+rH_\xi-pH_\zeta=M_\eta \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $G_{\xi_c,\,\eta_s,\,\zeta_s}$, $K_{\xi_c,\,\eta_c,\,\zeta_c}$, $H_{\xi,\,\eta,\,\zeta}$ — проекции моментов количества движения соответственно вала, кардана и ротора на связанные с этими телами оси; $N_{\xi_s,\,\eta_s,\,\zeta_s}$ — проекции моментов сил, действующих со стороны упругих опор на вал, на связанные с ним оси; $-L_{\xi_c}$ — проекция момента сил, приложенного со стороны кардана к валу, на ось $O\xi_c$; M_η — проекция момента сил, приложенного со стороны кардана к ротору, на ось $O\eta$. Здесь $G_{\xi_s}=A_sp_s$, $G_{\eta_s}=A_sq_s$, $G_{\zeta_s}=C_sr_s$, $K_{\xi_c}=ap_c$, $K_{\eta_c}=aq_c$, $K_{\zeta_c}=cr_c$, $H_\xi=Ap$, $H_\eta=Aq$, $H_\zeta=Cr$, $N_{\xi_s}=-K_a\psi+N_{\xi_s}{}^{\vee}$, $N_{\eta_s}=-K_a\theta+N_{\eta_s}{}^{\vee}$, где p_s, q_s, r_s — проекции угловой скорости движения вала, p_c, q_c, r_c — проекции угловой скорости движения кардана и p, q, r — проекции угловой скорости движения ротора на связанные с этими телами оси, K_a — угловая жесткость вала в подшипниках. Моменты $N_{\xi_s}{}^{\vee}$ и $N_{\eta_s}{}^{\vee}$, записанные в системе координат, связанной с вращающимся валом, генерируются неидеальными шарикоподшипниками и считаются заданными функциями времени.

Момент N_{ζ_s} является суммарным моментом вращения двигателя и моментом сопротивления на валу гироскопа. Моменты L_{ξ_c} и M_η являются функциями относительного расположения тел подвеса гироскопа, а именно $L_{\xi_c}=-k\alpha$, $M_\eta=-k\beta$, где k — угловая жесткость упругих элементов подвеса.

В данной публикации механика динамически настраиваемого гироскопа с одноколечным подвесом будет рассмотрена в линейном приближении. Допустим, что момент, развиваемый электродвигателем, компенсирует момент сопротивления на валу гироскопа: $N_{\zeta_s}\simeq0$. Для получения линеаризованных уравнений движения в систему уравнений (1.1) подставим линеаризованные значения угловых скоростей и углов поворота тел, образующих подвес: $p_s\simeq\psi^{\cdot}-\Omega\theta$, $q_s\simeq\theta^{\cdot}+\Omega\psi$, $r_s\simeq\Omega=\text{const}$, $p_c=p_s+\alpha^{\cdot}\simeq\simeq\alpha^{\cdot}+\psi^{\cdot}-\Omega\theta$, $q_c\simeq q_s+r_s\alpha\simeq\theta^{\cdot}+\Omega(\alpha+\psi)$, $r_c\simeq\Omega$, $p\simeq p_c-r_c\beta\simeq\alpha^{\cdot}+\psi^{\cdot}-\Omega(\beta+\theta)$, $q=q_c+\beta^{\cdot}\simeq\beta^{\cdot}+\theta^{\cdot}+\Omega(\alpha+\psi)$, $r\simeq\Omega$, $\sin\alpha\simeq\alpha$, $\cos\alpha\simeq1$, $\sin\beta\simeq\beta$, $\cos\beta\simeq1$ и удержим в уравнениях только линейные по переменным α, β, ψ, θ члены.

С учетом указанных допущений система линеаризованных уравнений движения гироскопа с одноколечным подвесом в неидеальных шарикоподшипниковых опорах имеет вид

$$\begin{gathered} A_s\psi^{\cdot\cdot}(2A_s-C_s)\Omega\theta^{\cdot}+[(C_s-A_s)\Omega^2+K_a]\psi-k\alpha=N_{\xi_s}{}^{\vee}(t) \\ (a+A_s)\theta^{\cdot\cdot}+[2(a+A_s)-(c+C_s)]\Omega\psi^{\cdot}+\{[(c+C_s)- \\ -(a+A_s)]\Omega^2+K_a\}\theta+(2a-c)\Omega\alpha^{\cdot}-k\beta=N_{\xi_s}{}^{\vee}(t) \\ (a+A)(\alpha^{\cdot\cdot}+\psi^{\cdot\cdot})-(2A-C)\Omega(\beta^{\cdot}+\theta^{\cdot})+(c+C- \\ -a-A)\Omega^2(\alpha+\psi)+k\alpha-(2a-c)\Omega\theta^{\cdot}=0 \\ A(\beta^{\cdot\cdot}+\theta^{\cdot\cdot})+(2A-C)\Omega(\alpha^{\cdot}+\psi^{\cdot})+(C-A)\Omega^2(\beta+\theta)+k\beta=0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

Обычно моменты инерции кардана много меньше моментов инерции ротора и вала (последние предполагаются имеющими один порядок), а в условиях прецессионной динамической настройки угловая жесткость упругих элементов подвеса пропорциональна моментам инерции кардана [1]. Это обстоятельство можно учесть путем введения «малого» параметра ε: $aA^{-1}=\varepsilon a^0$, $cC^{-1}=\varepsilon c^0$, $kA^{-1}=\varepsilon k^0$, $aA_s{}^{-1}=(aA^{-1})/(AA_s{}^{-1})=\varepsilon\varkappa a^0$, $cA_s{}^{-1}=\varepsilon\varkappa c^0$, $kA_s{}^{-1}=\varepsilon\varkappa k^0$, где $\varkappa$ — безразмерный коэффициент ($\varkappa=AA_s{}^{-1}$ и $\varkappa\sim1$).

Введем также обозначения $N_{\xi s}{}^{\vee}A_s^{-1}=N_{\xi s}{}^0$, $N_{\eta s}{}^{\vee}A_s^{-1}=N_{\eta s}{}^0$. Окончательно система уравнений (1.2) перепишется в виде

$$\begin{gathered}\psi^{\cdot\cdot}-\varkappa_s\theta^{\cdot}+n_s^2\psi=N_{\xi s}{}^0+\varepsilon\varkappa k^0\alpha \\ \theta^{\cdot\cdot}(1-\varepsilon\varkappa a^0)+\varkappa_s\psi^{\cdot}+n_s^2\theta=N_{\eta s}{}^0-\varepsilon\varkappa[(2a^0-c^0)\Omega\psi^{\cdot}+ \\ +(c^0-a^0)\Omega^2\theta+(2a^0-c^0)\Omega\alpha^{\cdot}-k^0\beta] \\ (\alpha^{\cdot\cdot}+\psi^{\cdot\cdot})(1+\varepsilon a^0)-\varkappa_r(\beta^{\cdot}+\theta^{\cdot})+n_r^2(\alpha+\psi)= \\ =\varepsilon\{(2a^0-c^0)\Omega\theta^{\cdot}-(c^0-a^0)\Omega^2(\alpha+\psi)-k^0\alpha\} \\ (\beta^{\cdot\cdot}+\theta^{\cdot\cdot})+\varkappa_r(\alpha^{\cdot}+\psi^{\cdot})+n_r^2(\beta+\theta)=-\varepsilon k^0\beta\end{gathered} \tag{1.3}$$

где использованы обозначения $\varkappa_s=(2A_s-C_s)A_s^{-1}\Omega$, $n_s^2=[(C_s-A_s)\Omega^2+$ $+K_a]A_s^{-1}$, $\varkappa_r=(2A-C)A^{-1}\Omega$, $n_r^2=(C-A)A^{-1}\Omega$.

Разделив второе уравнение на $(1+\varepsilon\varkappa a^0)$, а третье — на $(1+\varepsilon a^0)$, разложив выражения в ряды Тейлора по степеням ε и удерживая в них члены, линейные по ε, получаем следующие уравнения:

$$\begin{gathered}\theta^{\cdot\cdot}+\varkappa_s\psi^{\cdot}+n_s^2\theta=N_{\eta s}{}^0-\varepsilon\varkappa\{-a^0\varkappa_s\psi^{\cdot}+(2a^0-c^0)\Omega\psi^{\cdot}+ \\ +[(c^0-a^0)\Omega^2-a^0n_s^2]\theta+(2a^0-c^0)\Omega\alpha^{\cdot}+k^0\beta+a^0N_{\eta s}\} \\ (\alpha^{\cdot\cdot}+\psi^{\cdot\cdot})-\varkappa_r(\beta^{\cdot}+\theta^{\cdot})+n_r^2(\alpha+\psi)=\varepsilon\{-a^0\varkappa_r(\beta^{\cdot}+\theta^{\cdot})+ \\ +[a^0n_r^2-(c^0-a^0)\Omega^2](\alpha+\psi)-k^0\alpha+(2a^0-c^0)\Omega\theta^{\cdot}\}\end{gathered} \tag{1.4}$$

Порождающая система уравнений (при $\varepsilon=0$) имеет вид

$$\begin{gathered}\psi^{\cdot\cdot}-\varkappa_s\theta^{\cdot}+n_s^2\psi=N_{\xi s}{}^0(t),\quad \theta^{\cdot\cdot}+\varkappa_s\psi^{\cdot}+n_s^2\theta=N_{\eta s}{}^0(t) \\ (\alpha^{\cdot\cdot}+\psi^{\cdot\cdot})-\varkappa_r(\beta^{\cdot}+\theta^{\cdot})+n_r^2(\alpha+\psi)=0\quad(\beta^{\cdot\cdot}+\theta^{\cdot\cdot})+\varkappa_r(\alpha^{\cdot}+\psi^{\cdot})+n_r^2(\beta+\theta)=0\end{gathered} \tag{1.5}$$

Таким образом, система (1.5) разделяется. Из первых двух уравнений можно найти $\psi(t)$ и $\theta(t)$. Третье и четвертое уравнения системы (1.5) дают:

$$\begin{gathered}\alpha(t)+\psi(t)=\alpha^0\cos\gamma+\beta^0\cos\delta,\quad \beta(t)+\theta(t)=-\alpha^0\sin\gamma+\beta^0\sin\delta \\ \gamma=\Omega t+\gamma_0,\quad \delta=\Omega_2t+\delta_0,\quad \Omega_2=A^{-1}|C-A|\Omega\end{gathered} \tag{1.6}$$

Введем новые координаты $x=\alpha+\psi$ и $y=\beta+\theta$. Эти угловые переменные имеют ясный физический смысл: они представляют собой линеаризованные выражения углов поворота ротора относительно основания во вращающейся вместе с валом системе координат.

Второе уравнение (1.4) и четвертое уравнение (1.3) дают следующие выражения:

$$\begin{gathered}x^{\cdot\cdot}-\varkappa_ry^{\cdot}+n_r^2x=\varepsilon F(x,y^{\cdot},\psi(t),\theta^{\cdot}(t)) \\ y^{\cdot\cdot}+\varkappa_rx^{\cdot}+n_r^2y=\varepsilon G(y-\theta(t)) \\ F(x,y^{\cdot},\psi(t),\theta^{\cdot}(t))=[a^0n_r^2-(c^0-a^0)\Omega^2-k]x-a^0\varkappa_ry^{\cdot}+k^0\psi+(2a^0-c^0)\Omega\theta^{\cdot}, \\ G(y-\theta(t))=-k^0(y-\theta).\end{gathered} \tag{1.7}$$

Аналогичная система уравнений была рассмотрена в публикации [1], из которой следовало, что систему двух дифференциальных уравнений второго порядка вида (1.7) можно свести к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка типа:

$$\begin{gathered}\alpha^{0\cdot}=-\varepsilon(F\sin\gamma+G\cos\gamma)(\Omega+\Omega_2)^{-1} \\ \alpha^0(\gamma^{\cdot}-\Omega)=-\varepsilon(F\cos\gamma-G\sin\gamma)(\Omega+\Omega_2)^{-1} \\ \beta^{0\cdot}=-\varepsilon(F\sin\delta-G\cos\delta)(\Omega+\Omega_2)^{-1} \\ \beta^0(\delta^{\cdot}-\Omega_2)=-\varepsilon(F\cos\delta+G\sin\delta)(\Omega+\Omega_2)^{-1}\end{gathered} \tag{1.8}$$

Такая форма уравнений удобна для применения метода осреднения. Рассмотрим сначала случай $N_{\xi s}{}^0=N_{\eta s}{}^0=0$. При этом $\psi(t)\equiv0$, $\theta(t)\equiv0$. Подставляя одночастотное решение

$$x=\alpha^0\cos\gamma,\quad y=-\alpha^0\sin\gamma \tag{1.9}$$

в первое и второе уравнения системы (1.8) и осредняя результат по времени, имеем

$$\langle\alpha^{0\cdot}\rangle=0,\quad \alpha^{\cdot}\langle\gamma^{\cdot}-\Omega\rangle={}^1/_2\{k-{}^1/_2(2a-c)\Omega^2\}(\Omega+\Omega_2)^{-1}\alpha^0 \tag{1.10}$$

Из геометрической интерпретации уходов динамически настраиваемого гироскопа с отклоненным ротором [1] следует, что гироскоп не будет иметь систематического ухода в случае выполнения приближенного условия настройки: $k={}^1/_2(2a-c)\Omega^2$.

В рамках рассматриваемой модели наиболее опасным является случай, когда радиальные силы, генерируемые каждым шарикоподшипником, действуют в противофазах и создают момент на плече h, равном расстоянию между подшипниками. Обозначим этот момент $N(t)$ и будем полагать, что его амплитуда постоянна, а частота равна ν. Направление вектора момента по отношению к системе координат $Oxyz$ определяется углом χ в плоскости Oxy. Пусть

$$N(t)=N^{(\nu)}\sin(\nu t-\lambda) \tag{1.11}$$

где $\lambda=\text{const}$. Спроектировав момент $N(t)$ на оси $O\xi_s$ и $O\eta_s$ системы координат $O\xi_s\eta_s\zeta_s$, вращающиеся вместе с валом, получим моменты $N_{\xi_s}{}^{\vee}$ и $N_{\eta_s}{}^{\vee}$, стоящие в правых частях системы уравнений (1.3):

$$\begin{gathered}N_{\xi_s}{}^0={}^1/_2N^{(\nu)}\{\sin[(\nu-\Omega)t+(\chi-\lambda)]+\sin[(\nu+\Omega)t-(\chi+\lambda)]\}A_s^{-1}\\ N_{\eta_s}{}^0={}^1/_2N^{(\nu)}\{-\cos[(\nu-\Omega)t+(\chi-\lambda)]+\cos[(\nu+\Omega)t-(\chi+\lambda)]\}A_s^{-1}\end{gathered} \tag{1.12}$$

Рассмотрим случаи углового движения вала с частотами $\nu=2\Omega$, $\Omega+\Omega_2$ и $\Omega-\Omega_2$. Возмущения на этих частотах оказываются наиболее опасными с точки зрения их влияния на точность гироскопа.

2. $\nu=2\Omega$. Принимая в рассмотрение составляющую момента с частотой 2Ω, так как именно она обуславливает уход динамически настраиваемого гироскопа́, получаем решение первых двух уравнений системы (1.5) в виде

$$\begin{gathered}\psi^{(2\Omega)}(t)={}^1/_2N^{(2\Omega)}Q_1^{-1}\sin[\Omega t+(\chi-\lambda)]\\ \theta^{(2\Omega)}(t)=-{}^1/_2N^{(2\Omega)}Q_1^{-1}\cos[\Omega t+(\chi-\lambda)]\\ Q_1=K_a-2(2A_s-C_s)\Omega^2\end{gathered} \tag{2.1}$$

Подставляя эти соотношения в первое и второе уравнения системы (1.8) с учетом (1.9) и осредняя их по времени с учетом (1.6), получаем следующие выражения для проекций скорости ухода гироскопа на оси Ox и Oy (где $H=C\Omega$):

$$\begin{gathered}\langle\alpha^{0\bullet}\rangle={}^1/_4N^{(2\Omega)}Q_{(2\Omega)}^{-1}(2a-c)\cos(\chi-\lambda-\gamma_0)\\ \alpha^0\langle\gamma^\bullet-\Omega\rangle={}^1/_4N^{(2\Omega)}Q_{(2\Omega)}^{-1}(2a-c)\sin(\chi-\lambda-\gamma_0)\\ Q_{(2\Omega)}=H[K_a\Omega^{-2}-2(2A_s-C_s)\end{gathered} \tag{2.2}$$

Из формулы (2.2) следует, что уменьшение ухода динамически настраиваемого гироскопа, обусловленного вибровозбуждениями шарикоподшипников на частоте 2Ω, можно обеспечить двумя способами: уменьшением отношения момента инерции кардана к моментам инерции вала гироскопа и уменьшением отношения амплитуды возмущающего момента $N^{(2\Omega)}$ к кинетическому моменту ротора гироскопа H.

Нижний предел отношения момента инерции кардана к моментам инерции вала гироскопа обусловлен габаритно-массовыми характеристиками, а также требованиями, предъявляемыми к прочности конструкции прибора. В современных конструкциях нижний предел указанного отношения имеет порядок 0,01 (первый способ).

Рассмотрим подробнее возможности уменьшения амплитуды момента на двойной частоте вращения вала ($N^{(2\Omega)}$) (второй способ). Спектр радиальных вибровозмущений, генерируемых при вращении геометрически неидеальным шарикоподшипником, изучен в [2, 3], где показано, что если номера гармоник дефектов k, l, $m=0, 1, 2, \ldots$, вызывающих вибрационные возмущения шарикоподшипника, связаны соотношением $(l\pm1)+m=kz$ (z — число шариков), то частота возмущающей силы равна $|(l+1)f_0-mf_i|$, где $f_{0(i)}$ — частота вращения сепаратора относительно наружного (внутреннего) кольца подшипника. Если же номера гармоник дефектов связаны соотношением $|(l\pm1)-m|=kz$, то частота возмущающей силы равна $(l\pm1)f_0+mf_i$. Амплитуды возмущающих сил в том и другом случаях равны $^1/_4K_ra_la_m/(\Delta\ \mathrm{tg}\,\tau)$, где a_l, a_m — амплитуды гармоник при $l, m=1, 2, \ldots$; $a_{l=0}=a_{m=0}=2\Delta\ \mathrm{tg}\,\tau$; z — число шариков в подшипнике; Δ — геометрический осевой натяг; τ — угол контакта; K_r — радиальная жесткость подшипника (связь радиальной жесткости шарикоподшипника K_r с угловой жесткостью пары подшипников вала K_a задается соотношением $K_a=K_r\cdot h^2$, где h — расстояние между шарикоподшипниками). Дефекты шариков вызывают вибровозмущения на частотах, больших 2Ω, и далее не рассматриваются.

Дефекты колец подшипника при $l, m=1, 2, \ldots$ определяются в следующем виде:

$$a_{l(m)}=\frac{1-\cos\tau}{\cos\tau}a_{l(m)}^{(1)}+a_{l(m)}^{(2)}+\mathrm{tg}\,\tau\cdot a_{l(m)}^{(3)} \tag{2.3}$$

где $a_{l(m)}^{(1)}$ — амплитуда гармоники $l(m)$ разложения в ряд Фурье радиуса поперечного сечения дорожки качения наружного (внутреннего) кольца подшипника; $a_{l(m)}^{(2)}$ — то же для радиуса продольного сечения; $a_{l(m)}^{(3)}$ — то же для осевого биения дорожки качения [2]. Дефектами типа $a_{l(m)}^{(1)}$ можно пренебречь в силу малости стоящего перед их значениями коэффициента в (2.3), а также малости самих этих дефектов.

Согласно приведенным выражениям, не все гармоники дефектов колец подшипников вызывают возмущения, а лишь те из них, номера которых l и m удовлетворяют соотношениям $(l\pm1)+m=kz$ и $|(l\pm1)-m|=kz$. Выделяя лишь возмущения на интересующей нас частоте 2Ω, получим, что они обуславливаются лишь гармониками дефектов с номерами $l=1$ и $m=2$, а также $l=3$ и $m=2$. Все прочие гармоники дефектов колец либо не вызывают возмущений на частоте 2Ω, либо имеют малую амплитуду в силу убывания $a_{l(m)}$ с ростом $l(m)$ [2].

Определим величину возмущающего момента, действующего на вал динамически настраиваемого гироскопа со стороны подшипников на частоте 2Ω, как среднеквадратичное по двум подшипникам произведение радиальной силы, генерируемой при вращении одного из подшипников, на расстояние между подшипниками h:

$$N^{(2\Omega)}=\sqrt{2[(a_{m=2}a_{l=1})^2+(a_{m=2}a_{l=3})^2]}\,(4\Delta\ \mathrm{tg}\,\tau)^{-1} \tag{2.4}$$

В выражение (2.4) входит первая гармоника дефектов наружного кольца $a_{l=1}$, складывающаяся из радиального смещения внутреннего кольца относительно наружного под действием радиальной силы F_r: $a_{l=1}^{(2)}=F_r/K_r$ и перекоса (осевого биения) дорожки качения наружного кольца $a_{l=1}^{(3)}$. Таким образом, $a_{l=1}=F_r/K_r+a_{l=1}^{(3)}\mathrm{tg}\,\tau$. В результате выражение (2.4) принимает вид

$$N^{(2\Omega)}=K_rh\sqrt{2[(F_r/K_r+a_{l=1}^{(3)}\ \mathrm{tg}\,\tau)^2+a_{l=3}^2}\,(4\Delta\ \mathrm{tg}\,\tau)^{-1}a_{m=2}. \tag{2.5}$$

Согласно этому выражению, момент $N^{(2\Omega)}$, вызывающий уход динамически настраиваемого гироскопа, обуславливается овальностью дорожек качения внутренних колец подшипников $a_{m=2}$, перекосами наружных колец $a_{l=1}^{(3)}$ и их трехгранкой $a_{l=3}$, а также радиальной нагрузкой F_r. Таким образом, необходимо использовать подшипники с малыми величинами овальности внутренних колец, а также малыми перекосами и трехгранкой наружных колец.

Пример 1. Проведем численный расчет по формуле (2.5), задавшись характерными для приборных шарикоподшипников исходными данными: $K_r=20$ Н/мкм; $\Delta=5$ мкм; $\tau=15°$; $h=30$ мм; $F_r=0$ (вертикальное расположение вала гироскопа в поле силы тяжести); $a_{m=2}=0{,}06-0{,}3$ мкм; $a_{l=1}^{(3)}=0{,}5-5$ мкм; $a_{l=3}=0{,}07-0{,}3$ мкм. Используя наибольшие и наименьшие значения указанных погрешностей, получим, что амплитуда момента, действующего со стороны подшипников на вал гироскопа, изменяется в пределах $N^{(2\Omega)}=5-240$ Н·мм. Рассмотрим динамически настраиваемый гироскоп со следующими параметрами: $\Omega=2\cdot10^3$ с$^{-1}$, $(2a-c)C^{-1}=10^{-2}$; $A_s=10^{-2}$ Н·

$\cdot$мм$\cdot$с^2; $C_s=1{,}25\cdot10^{-2}$ Н$\cdot$мм$\cdot$с^2. Используя формулу (2.2), получим оценки сверху для скорости ухода гироскопа: $|\langle\alpha^{0\cdot}\rangle|_{max}=|\alpha^0\langle\gamma^\cdot-\Omega\rangle|_{max}\simeq0{,}3-14$ град/ч. Наименьшее значение ухода гироскопа соответствует амплитуде момента $N^{(2\Omega)}=5$ Н$\cdot$мм, а наибольшее — $N^{(2\Omega)}=240$ Н$\cdot$мм. Таким образом, численный расчет показывает, что при изменении погрешностей подшипников в пределах действующих допусков уход гироскопа может меняться почти на два порядка.

Пример 2. Допустим теперь, что вал гироскопа расположен горизонтально в поле силы тяжести. Пусть при этом радиальная нагрузка на подшипники составляет $F_r=1$ Н. Если предположить, что использованы качественные подшипники (первые значения из указанных в примере 1 диапазонов изменения погрешностей), то расчет по формуле (2.2) дает: $|\langle\alpha^{0\cdot}\rangle|_{max}=|\alpha^0\langle\gamma^\cdot-\Omega\rangle|_{max}\simeq0{,}5$ град/ч. Таким образом, при действии радиальной нагрузки возрастают уходы динамически настраиваемого гироскопа.

В системах инерциальной навигации, построенных на основе динамически настраиваемых гироскопов, очень серьезной является проблема возникновения незатухающих (в зачастую даже и нарастающих) нутационных колебаний. Основная причина возникновения таких колебаний лежит в силовом воздействии неидеальных шарикоподшипников на вал гироскопа.

Спектр вибрации стандартных шарикоподшипников представляет собой всюду плотное множество и не допускает отстройки от собственных частот гироскопа [3]. Если частоты вибровозмущений совпадают с частотами $\Omega+\Omega_2\cong CA^{-1}\Omega$ и $\Omega-\Omega_2\cong(2A-C)A^{-1}\Omega$, то возникают сильные нутационные колебания динамически настраиваемого гироскопа. Рассмотрим последовательно нутационные колебания гироскопа на частотах $\Omega+\Omega_2$ и $\Omega-\Omega_2$.

3. $\nu=\Omega+\Omega_2$. Моменты, действующие на вал гироскопа со стороны подшипников, имеют вид

$$\begin{aligned}N_{\xi_s}{}^\circ&={}^1/_2N^{(\Omega+\Omega_2)}A_s^{-1}\{\sin[\Omega_2t+(\chi-\lambda)]+\sin[(2\Omega+\Omega_2)t-(\chi+\lambda)]\},\\ N_{\eta_s}{}^\circ&={}^1/_2N^{(\Omega+\Omega_2)}A_s^{-1}\{-\cos[\Omega_2t+(\chi-\lambda)]+\cos[(2\Omega+\Omega_2)t-(\chi+\lambda)]\}\end{aligned}\qquad(3.1)$$

Принимая в рассмотрение составляющую момента с частотой $\Omega+\Omega_2$ (именно она обуславливает существование нутационных колебаний гироскопа), имеем

$$\begin{aligned}\psi^{(\Omega+\Omega_2)}(t)&={}^1/_2N^{(\Omega+\Omega_2)}Q_2^{-1}\sin[\Omega_2t+(\chi-\lambda)]\\ \theta^{(\Omega+\Omega_2)}(t)&={}^1/_2N^{(\Omega+\Omega_2)}Q_2^{-1}\cos[\Omega_2t+(\chi-\lambda)]\\ Q_2&=K_a-CA_sA^{-1}(CA^{-1}+C_sA_s^{-1})\Omega^2\end{aligned}\qquad(3.2)$$

Подставляя выражения (3.2) в третье и четвертое уравнения (1.8) и осредняя результат по времени, получаем ($\delta=\Omega_2t+\delta_0$):

$$\begin{aligned}\langle\beta^{0\cdot}\rangle&={}^1/_4N^{(\Omega+\Omega_2)}\overset{-1}{Q}_{(\Omega+\Omega_2)}(2a-c)\cos(\chi-\lambda-\delta_0)\\ \langle\delta^\cdot-\Omega_2\rangle&={}^1/_4N^{(\Omega+\Omega_2)}\overset{-1}{Q}_{(\Omega+\Omega_2)}(2a-c)\bar\beta^{-1}\sin(\chi-\lambda-\delta_0)\\ Q_{(\Omega+\Omega_2)}&=A\Omega[K_a\Omega^{-2}-CA_sA^{-1}(CA^{-1}-C_sA_s^{-1})]\end{aligned}\qquad(3.3)$$

Очевидно, что надо избегать равенства $K_a=CA_sA^{-1}(CA^{-1}-C_sA_s^{-1})\Omega^2$, поскольку при его выполнении гироскоп совершает интенсивные нутационные колебания.

4. $\nu=\Omega-\Omega_2$. Со стороны подшипника на вал действуют моменты

$$\begin{aligned}N_{\xi_s}{}^\circ&=-{}^1/_2N^{(\Omega-\Omega_2)}A_s^{-1}\{\sin[\Omega_2t-(\chi-\lambda)]-\sin[(2\Omega-\Omega_2)t+(\chi+\lambda)]\}\\ N_{\eta_s}{}^\circ&=-{}^1/_2N^{(\Omega-\Omega_2)}A_s^{-1}\{\cos[\Omega_2t-(\chi-\lambda)]+\cos[(2\Omega-\Omega_2)t+(\chi+\lambda)]\}\end{aligned}\qquad(4.1)$$

Составляющие угловых координат колебаний вала, обуславливающие нутационные колебания динамически настраиваемого гироскопа, имеют вид

$$\begin{aligned}\psi^{(\Omega-\Omega_2)}(t)&=-{}^1/_2N^{(\Omega-\Omega_2)}Q_3^{-1}\sin[\Omega_2t-(\chi-\lambda)]\\ \theta^{(\Omega-\Omega_2)}(t)&=-{}^1/_2N^{(\Omega-\Omega_2)}Q_3^{-1}\cos[\Omega_2t-(\chi-\lambda)]\\ Q_3&=K_a-(2A-C)A_sA^{-1}[2-(CA^{-1}+C_sA_s^{-1})]\Omega^2\end{aligned}\qquad(4.2)$$

Подставляя выражения (4.2) в третье и четвертое уравнения (1.8) и осредняя результат по времени, получаем

$$\langle\beta^{0\cdot}\rangle={}^1/_4N^{(\Omega-\Omega_2)}\overset{-1}{Q}_{(\Omega-\Omega_2)}(2a-c)(C-A)\cos(\chi-\lambda+\delta_0)\qquad(4.3)$$

$$\langle\delta^{\bullet}-\Omega_2\rangle={}^1/_4 N^{(\Omega-\Omega_2)}Q^{-1}_{(\Omega-\Omega_2)}(2a-c)\,(C-A)\sin(\chi-\lambda+\delta_0)$$

$$Q_{(\Omega-\Omega_2)}=AH\{K_a\Omega^{-2}-(2A-C)A_sA^{-1}[2-(CA^{-1}+C_sA_s^{-1})]\}$$

В случае $K_a=(2a-c)A_sA^{-1}[2-(CA^{-1}+C_sA_s^{-1})]\Omega^2$ возникают интенсивные нутационные колебания гироскопа. Впрочем, этот случай представляет опасность лишь тогда, когда $A_s>C_s$ и $2-(CA^{-1}+C_sA_s^{-1})$.

Для эффективной отстройки от резонансов на частотах нутационных колебаний $\Omega\pm\Omega_2$ в качестве опор вала динамически настраиваемого гироскопа следует использовать шарикоподшипники с детерминированным спектром вибрационных возмущений [2, 3]. Характерной особенностью таких подшипников является разреженность вибрационного спектра, достигаемая при выполнении условия $D_b/D_c=2/(z\cos\tau)$, где $D_{b(c)}$ – диаметр шарика (окружности, проходящей через центры шариков), z – число шариков (допускается только четное его значение). В этом случае спектр вибрационных возмущений, обусловленных дефектами колец, состоит только из частот, кратных частоте вращения вала, т. е. Ω, 2Ω, 3Ω, ... Разноразмерность шариков подшипника, взаимодействуя с волнистостью дорожек качения колец, вызывает вибрационные возмущения на частотах $(kf_0\pm nf_i)$, где k, $n=0, 1, 2, \ldots$. При $z=6$ общий вибрационный спектр подшипника с детерминированным спектром вибрационных возмущений становится наиболее редким, состоит из частот $\Omega/3$, $2\Omega/3$, Ω, $4\Omega/3$, $5\Omega/3$, $2\Omega, \ldots$ и допускает наиболее эффективную отстройку от собственных частот $\Omega\pm\Omega_2$ регулированием $\Omega_2\simeq(C-A)A^{-1}\Omega$. Поскольку $0\leqslant\Omega_2<\Omega$, то для этого достаточно выполнить условия $\Omega_2\neq\Omega/3$ и $\Omega_2\neq2\Omega/3$, т. е. ротор динамически настраиваемого гироскопа следует проектировать таким образом, чтобы выполнялись неравенства $3C\neq4A$ и $3C\neq5A$.

Таким образом, для уменьшения ухода динамически настраиваемого гироскопа необходимо уменьшать отношение моментов инерции кардана к моментам инерции вала, увеличивать радиальную жесткость шарикоподшипниковых опор вала, уменьшать отношение амплитуды возмущающей силы к кинетическому моменту ротора гироскопа. Наиболее опасными с точки зрения понижения точности динамически настраиваемого гироскопа являются следующие погрешности шарикоподшипников: овальность дорожек качения внутренних колец подшипников, перекос и трехгранка наружных колец подшипников. Для повышения точности динамически настраиваемого гироскопа следует уменьшать радиальную нагрузку на шарикоподшипники. Для осуществления эффективной отстройки нутационных частот динамически настраиваемого гироскопа от частот вибровозмущений, генерируемых неидеальными шарикоподшипниками вала, следует использовать шарикоподшипники с детерминированным спектром возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков Л. З., Шаталов М. Ю.* Механика динамически настраиваемых гироскопов. М.; Наука. 1985, 245 с.
2. *Журавлев В. Ф., Бальмонт В. Б.* Механика шарикоподшипников гироскопов. М.: Машиностроение, 1986, 272 с.
3. *Бальмонт В. Б., Матвеев В. А.* Опоры качения приборов. М.: Машиностроение, 1984, 239 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.VII.1985