

**РАСТЯЖЕНИЕ УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ,  
УСИЛЕННОЙ РЕШЕТКОЙ ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ**

КОБЛИК С. Г.

Задачи о напряженном состоянии упругой плоскости, усиленной периодической и двоякопериодической системой жестких одномерных включений, исследовались в ряде публикаций [1–3]. Близкие в математическом плане задачи о растяжении плоскости, ослабленной периодической системой трещин, изучены в [4–6]. Однако в случае сильного взаимодействия между включениями решение получено только для параллельной системы дефектов при наличии только одного дефекта в полосе периодичности.

В публикуемой работе получено приближенное аналитическое решение задачи о растяжении ортотропной пластинки, усиленной двумя периодическими группами прямолинейных нерастяжимых включений, пригодное как в случае слабого, так и сильного взаимодействия включений.

Рассмотрим напряженное состояние упругой ортотропной пластинки, усиленной периодической системой нерастяжимых одномерных включений, расположенных параллельно оси  $x$ , и растягиваемой на бесконечности напряжениями  $\sigma_x^\infty$  (фиг. 1). Будем полагать, что главные линии анизотропии коллинеарны осям координат, а включения сцеплены с пластиной. Положим для определенности, что на прямых  $y = \pm 2mH$  расположено  $p$  включений, для которых  $a_k \leq x \leq b_k$  ( $k=1, 2, \dots, p$ ;  $m=0, 1, \dots$ ), а на прямых  $y = \pm(2m+1)H$  расположено  $q$  включений, для которых  $c_n \leq x \leq d_n$  ( $n=1, 2, \dots, q$ ;  $m=0, 1, \dots$ ). Требуется найти контактные напряжения взаимодействия включений и пластины, а также усилия, действующие во включениях. Очевидно, решение должно быть периодической по  $y$  функцией с периодом  $2H$ .

Вследствие симметрии на линиях  $y = \pm mH$  ( $m=0, 1, \dots$ ) перемещения в направлении оси  $y$  постоянны; на продолжениях включений отсутствуют касательные напряжения, а все точки пластинки, сцепленные с включениями, имеют постоянные на каждом включении перемещения в направлении  $x$ :

$$v = \pm v_m, \quad \tau = G(u_{,y} + v_{,x}) = 0, \quad u = u_k \quad (k=1, 2, \dots, p+q) \quad (1)$$

Таким образом, на границе любой полосы  $2mH \leq y \leq (2m+1)H$  заданы все граничные условия, и поэтому достаточно рассмотреть напряженное состояние такой полосы (для определенности положим  $m=0$ ).

Задача сводится к решению уравнений равновесия ортотропной полосы шириной  $H$  с граничными условиями (1):  $B_1 u_{,xx} + G u_{,yy} + (B_1 \mu_2 + G) v_{,xy} = 0$ ,  $G v_{,xx} + B_2 v_{,yy} + (B_2 \mu_1 + G) u_{,xy} = 0$ . Кроме того, следует учесть, что при  $|x| \rightarrow \infty$  имеем

$$\sigma_x = \sigma_x^\infty, \quad \sigma_y = \tau = 0 \quad (2)$$

а условия равновесия включений имеют вид

$$\int_{a_k}^{b_k} \tau dx = 0, \quad \int_{c_n}^{d_n} \tau dx = 0 \quad (k=1, \dots, p; n=1, \dots, q)$$

Здесь и в дальнейшем приняты обозначения  $u_{,x^j} = \partial u^j / \partial x$ ,  $v_{,xy^j} = \partial v^j / \partial x \partial y$  и т. д.

Для решения поставленной задачи используем асимптотический метод [7], заключающийся в разложении решения в ряды по параметру  $\varepsilon = G^2 / (B_1 B_2)$ . Ограничиваясь одним приближением и принимая во внимание преобразования независимых переменных

$$x_1 = x, \quad y_1 = \varepsilon^{-1/4} q^{-1/4} y, \quad x_2 = x, \quad y_2 = \varepsilon^{1/4} q^{-1/4} y \quad (3)$$

получим выражения для перемещений и напряжений

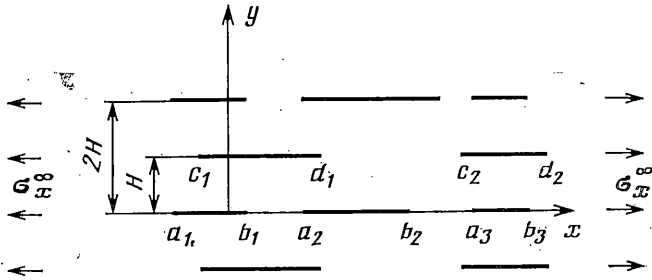
$$u = U, \quad v = V, \quad \tau = B_1 \varepsilon^{1/4} q^{1/4} U_{,y} \quad (4)$$

$$\sigma_x = B_1 U_{,x}, \quad \sigma_y = B_1 \varepsilon^{1/4} q^{1/4} [q^{1/4} V_{,y} - U_{,x}]$$

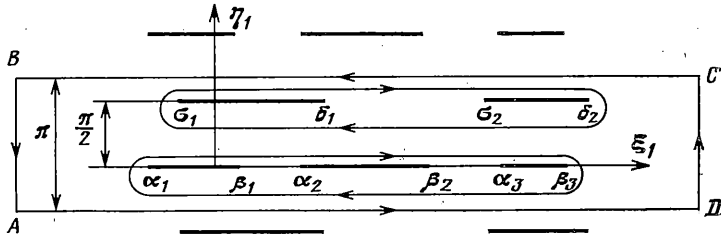
где  $q = B_2 / B_1$ , а производные  $U_{,x}$ ,  $U_{,y}$ ,  $V_{,x}$ ,  $V_{,y}$  образуют аналитические функции

$$\Phi_1(z_1) = U_{,x} - iU_{,y}, \quad \Phi_2(z_2) = V_{,x} - iV_{,y} \quad (5)$$

комплексных переменных  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$ . На границах полосы функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  удовлетворяют условиям, непосредственно следующим из (1), (3)–(5): на участ-



Фиг. 1



Фиг. 2

ках расположения включений:  $\text{Re } \Phi_1(z_1)=0$ ; на остальной части границы:  $\text{Im } \Phi_1(z_1)=0$ ; на всей границе полосы:  $\text{Re } \Phi_2(z_2)=0$ . Кроме того, должны быть удовлетворены условия на бесконечности (2), которые с учетом (4), (5) примут вид

$$\text{Re } \Phi_1(z_1)=\sigma_{\infty}, \quad \text{Im } \Phi_1(z_1)=0, \quad \text{Im } \Phi_2(z_2)=-q^{-1/4} \text{Re } \Phi_1(z_1) \quad (6)$$

и условия равновесия включений

$$\int_{a_k}^{b_k} \text{Im } \Phi_1(t) dt = 0, \quad \int_{c_n+iHq^{-1/4}}^{d_n+iHq^{-1/4}} \text{Im } \Phi_1(t) dt = 0 \quad (7)$$

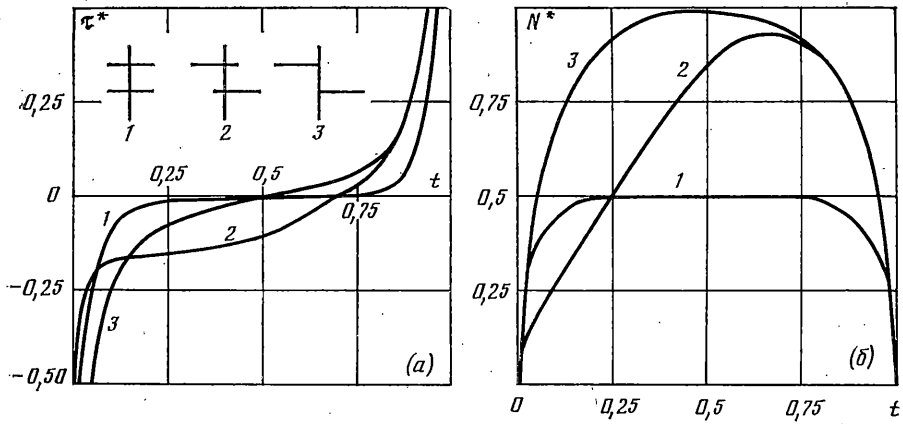
Таким образом, для  $\Phi_1(z_1)$  имеем смешанную задачу теории аналитических функций, а для  $\Phi_2(z_2)$  задачу определения аналитической функции по заданной на границе действительной части. Решение этих задач получено при помощи формулы Келдыша — Седова и имеет вид ( $\theta$  — действительная постоянная):

$$\Phi_1(z_1) = \sum_{m=0}^{p+q} \gamma_m \text{sh}^m \zeta_1 \text{ch}^{p+q-m} \zeta_1 \left[ \prod_{k=1}^p \text{sh}(\zeta_1 - \alpha_k) \times \right. \\ \left. \times \text{sh}(\zeta_1 - \beta_k) \prod_{n=1}^q \text{ch}(\zeta_1 - \sigma_n) \text{ch}(\zeta_1 - \delta_n) \right]^{-1/2}$$

$$\Phi_2(z_2) = i\theta, \quad \zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1 = gz_1, \quad g = \pi e^{1/4} q^{1/4} / (2H)$$

$$\alpha_k = ga_k, \quad \beta_k = gb_k, \quad \sigma_n = gc_n, \quad \delta_n = gd_n$$

Следует заметить, что для определения  $p+q+2$  постоянных  $\gamma_m$  ( $m=0, 1, \dots, p+q$ ) и  $\theta$  получены  $p+q+3$  условия: три условия на бесконечности (6) и  $p+q$  условий (7). Однако из  $p+q$  условий (7) лишь  $p+q-1$  независимы. Действительно, пусть  $L$  — достаточно малая окружность с центром в точке  $\zeta_1$ , не принадлежащей включению (фиг. 2). В силу аналитичности функции  $\Phi_1(z_1)$  интеграл от нее по контуру  $L$  равен нулю. Контур  $L$  деформируем в контур прямоугольника  $ABCD$  и в контуры, охватывающие разрезы  $(\alpha_k, \beta_k)$  и  $(\sigma_n + i\pi/2, \delta_n + i\pi/2)$ . Вытягивая прямоугольник  $ABCD$  в полосу, найдем, что интегралы по сторонам  $DC$  и  $BA$  взаимно уничтожаются, так как  $\Phi_1(z_1)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  принимает одно и то же значение. Аналогично интегралы по горизонтальным сторонам  $AD$  и  $CB$  взаимно уничтожаются, так как  $\Phi_1(z_1)$  — периодическая функция с периодом  $\pi i$ . Принимая во внимание, что действительная часть  $\Phi_1(z_1)$  имеет одинаковые предельные значения при подходе к разрезам слева



Фиг. 3

и справа, а мнимая — равные по абсолютной величине и противоположные по знаку, получим, что условия (7) линейно зависимы, поскольку

$$\sum_{k=1}^p \int_{a_k}^{b_k} \text{Im } \Phi_1(t) dt + \sum_{n=1}^q \int_{c_n+iHe^{-1/4}q^{-1/4}}^{d_n+iHe^{-1/4}q^{-1/4}} \text{Im } \Phi_1(t) dt = 0$$

Разделив действительную и мнимые части функций  $\Phi_1(z_1)$  и  $\Phi_2(z_2)$ , найдем производные  $U_{,x}$ ,  $U_{,y}$ ,  $V_{,x}$ ,  $V_{,y}$ , а затем по формулам (4) — приближенные значения для напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$ .

В случае, когда на каждой из прямых  $y=\pm mH$  имеется лишь одно включение ( $p=q=1$ ) и они имеют одинаковую длину, то, выбрав начало координат так, что  $c_1=-a_1=-a$  и  $d_1=-b_1=-b$ , для функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  получим с учетом условий на бесконечности следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= 2\sigma_x \infty H (\text{sh } 2\xi_1 - A) [(\text{sh } 2\xi_1 - \text{sh } 2\alpha) (\text{sh } 2\xi_1 - \text{sh } 2\beta)]^{-1/2} (\pi \varepsilon^{1/4} q^{1/4} B_1)^{-1} \\ \Phi_2(z_2) &= -i\sigma_x \infty \varepsilon^{1/4} q^{-1/2} 2H / \pi B_1, \quad \alpha = ga, \quad \beta = gb \end{aligned}$$

Разделив действительные и мнимые части и воспользовавшись формулами (4), найдем напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$ . В частности, для касательных напряжений на левом берегу разреза и для растягивающих сил во включении получаем

$$\begin{aligned} \tau &= \sigma_x \infty \varepsilon^{1/4} q^{1/4} (\text{sh } 2\xi_1 - A) [(\text{sh } 2\beta - \text{sh } 2\xi_1) (\text{sh } 2\xi_1 - \text{sh } 2\alpha)]^{-1/2} \quad (8) \\ N &= 8H\sigma_x \infty \{ (e^{2\beta} + e^{-2\alpha}) \Pi(\varphi, 2(e^{-2\beta} - e^{-2\alpha}) / \text{ch } 2\beta, r) - (e^{2\alpha} + e^{-2\beta}) \Pi(\varphi, 2(e^{2\beta} - e^{2\alpha}) / \text{ch } 2\beta, r) + 2F(\varphi, r) (\text{sh } 2\beta - A) \} / \pi \sqrt{\text{ch } 2\alpha \text{ ch } 2\beta} \end{aligned}$$

где  $A$  определяется из условия равновесия включения

$$\begin{aligned} A &= (e^{2\beta} - e^{-2\alpha}) / 2 + (e^{2\beta} + e^{-2\alpha}) \{ \Pi_1[(e^{2\alpha} - e^{2\beta}) / 2 \text{ch } 2\alpha, r] - \\ &\quad - \Pi_1[(e^{-2\beta} - e^{-2\alpha}) / 2 \text{ch } 2\beta, r] \} / 2K(r) \\ \varphi &= \arcsin \{ 2 \text{ch } 2\beta (e^{2\xi_1} - e^{2\alpha}) / [(e^{2\beta} - e^{2\alpha}) (e^{2\xi_1} - e^{2\beta})] \}^{1/2} \\ r &= \text{sh } (\beta - \alpha) / (\text{ch } 2\beta \text{ ch } 2\alpha)^{-1/2} \end{aligned}$$

Здесь  $\Pi(\varphi, \nu, r)$  и  $\Pi_1(\nu, r)$  — неполный и полный эллиптические интегралы третьего рода,  $F(\varphi, r)$  и  $K(r)$  — неполный и полный эллиптические интегралы первого рода.

В частном случае, когда включения расположены одно над другим ( $a=-b$ ; период в этом случае фактически равен  $H$ ), имеем  $A=0$  и формулы для касательных напряжений и усилия во включении принимают вид

$$\begin{aligned} \tau &= \sigma_x \infty \varepsilon^{1/4} q^{1/4} \text{sh } 2\xi_1 (\text{sh}^2 2\beta - \text{sh}^2 2\xi_1)^{-1/2} \quad (9) \\ N &= \sigma_x \infty H [1 - 2 \arcsin (\text{ch } 2\xi_1 / \text{ch } 2\beta) / \pi] \end{aligned}$$

Если длина включения велика по сравнению с  $H$ , то в выражении для  $N$  вторым слагаемым в скобках можно пренебречь:  $N = \sigma_x \infty H$ , т. е. усилие, действующее во включении, равно усилию, приложенному на бесконечности к полосе шириной  $H$ .

Перейдя в формулах (9) к пределу при  $H \rightarrow \infty$ , получим решение для одного включения в плоскости

$$\tau = \sigma_x^\infty \varepsilon^{1/4} q^{1/4} x (b^2 - x^2)^{-1/2}, \quad N = 2\sigma_x^\infty \varepsilon^{1/4} q^{1/4} (b^2 - x^2)^{1/2} \quad (10)$$

Сравнение решения (10) для одного включения с точным в худшем (с точки зрения асимптотического метода) случае изотропной пластинки ( $\varepsilon = (1 - \mu)^2/4$ ,  $q = 1$ ):

$$\tau^0 = 2\sigma_x^\infty x [(3 - \mu)(1 + \mu)]^{-1} (b^2 - x^2)^{-1/2}$$

$$N^0 = 4\sigma_x^\infty [(3 - \mu)(1 + \mu)]^{-1} (b^2 - x^2)^{1/2}$$

показывает, что они отличаются только постоянным множителем, зависящим от коэффициента Пуассона  $\mu$ ; при этом погрешность приближенного решения (10) не превышает 7%.

При  $H \rightarrow 0$  для вычисления постоянной  $A$  можно использовать асимптотические представления, вывод которых вследствие громоздкости здесь не приводится:

$$\alpha/\beta \leq -1/3: \quad A = \exp(\beta - \alpha) \operatorname{arctg} [\operatorname{sh}(\beta + \alpha)] / \{4(\beta - \alpha) - 2 \ln [(e^{2\beta} + e^{2\alpha})/4]\} \quad (11)$$

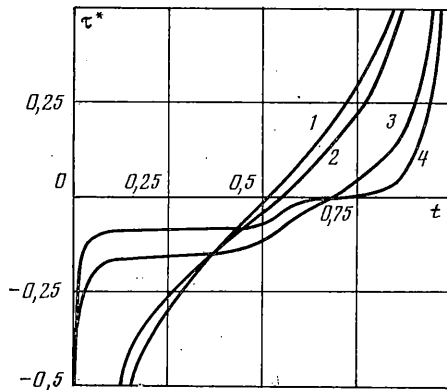
$$\alpha/\beta > -1/3: \quad A = [1/4\pi \exp(\beta - \alpha) / s - 2 \operatorname{ch} 2\alpha E(s)] / K(s) + \exp(2\alpha) \quad (12)$$

$$s = [1 + \exp(4\alpha)]^{-1/2}$$

где  $E(s)$  — полный эллиптический интеграл второго рода. Погрешность формул (11), (12) не превышает 0,01% при  $(\beta - \alpha) \geq 4,44$ .

Распределение безразмерных касательных напряжений  $\tau^* = \tau/\sigma_x^\infty$  и усилий  $N^* = N/(\sigma_x^\infty H)$  по длине включения для изотропного материала ( $\mu = 0,3$ ) при  $\lambda = (b - a)/H = 10$  показаны на фиг. 3, а и б соответственно. Значение  $t = 0$  соответствует  $x = a$ ,  $t = 1 - x = b$ . Кривые 1 соответствуют случаю полного перекрытия двух групп включений ( $a/b = -1$ ), кривые 2 — частичному перекрытию ( $a/b = -1/3$ ), а кривые 3 — неперекрывающимся включениям ( $a/b = 0$ ). Из графиков видно, что в первом случае касательные напряжения и усилия во включении симметричны относительно середины включения. При этом в средней части контакта касательные напряжения практически отсутствуют, результатом чего является постоянство усилия  $N^*$  в этой части включения.

Во втором случае касательные напряжения имеют в зоне перекрытия участок сравнительно медленного изменения, а сами они вблизи внутреннего конца включения меньше, чем в первом. График касательных напряжений и усилий во включении несимметричен: максимум сдвинут к внешнему концу включения. Для больших  $\lambda$  из формул (8), (11) получим  $\tau = -\sigma_x^\infty H / (2a)$ , что соответствует ин-



Фиг. 4

женерной модели, в которой предполагается, что материал пластинки между включениями работает только на сдвиг.

В случае неперекрывающихся включений (кривые 3) графики становятся практически симметричными, что означает слабое взаимодействие между двумя группами включений. Увеличение касательных напряжений  $\tau^*$  и усилий  $N^*$  по сравнению с кривыми 1 связано с фактическим уменьшением периода решетки включений в первом случае.

На фиг. 4 показано распределение безразмерных касательных напряжений  $\tau^*$  для перекрывающихся ( $a/b = -1/3$ ) включений при изменении  $\lambda$ . Кривая 1 соответствует  $\lambda = 1$ , кривая 2 —  $\lambda = 2$ , кривая 3 —  $\lambda = 10$ , кривая 4 —  $\lambda = 20$ . Видно, что кривая 1 практически симметрична, при  $\lambda = 2$  точка перехода графика через нуль смещена относительно середины включения, при  $\lambda = 10$  касательные напряжения на участке перекрытия изменяются сравнительно медленно, а при  $\lambda = 20$  имеем два участка, на которых касательные напряжения постоянны. Первый связан с участком перекрытия, на большей части которого материал пластинки работает только на сдвиг, а на втором касательные напряжения отсутствуют (аналогично кривой 1 на фиг. 3, а) вследствие разгрузки материала пластинки, заключенного между параллельной системой включений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Долгих В. Н., Фильштинский Л. А. Об одной модели регулярной кусочно-неоднородной среды. — Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2, с. 158–164.
2. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стацук Н. Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983. 288 с.
3. Стацук Н. Г., Сенюк М. Н. Об оптимальном расположении периодической и дwoякопериодической системы жестких армирующих элементов в композитах. — Механика композит. материалов, 1984, № 6, с. 980–985.
4. Александров В. М., Сметанин Б. И. Равновесная трещина в слое малой толщины. — ПММ, 1965, т. 29, вып. 4, с. 782–785.
5. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
6. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
7. Маневич Л. И., Павленко А. В., Коблик С. Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. Киев; Донецк: Вища. шк., 1982. 153 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию  
29.XII.1985