

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ПЛОСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ГАЛАБУРДИН А. В.

Методом граничных интегральных уравнений решается плоская динамическая задача теории упругости для диска с выступом в форме зуба шестерни в пространстве преобразований Лапласа. Для численного обращения преобразования Лапласа используется метод регуляризации решения линейных интегральных уравнений первого рода А. Н. Тихонова.

1. Рассматривается плоское упругое тело, ограниченное гладким замкнутым контуром  $\gamma$ , на которое действует изменяющаяся во времени самоуравновешенная нагрузка. Тогда, учитывая, что в начальный момент времени тело находится в состоянии покоя, граничные и начальные условия берутся в виде

$$T_{ij}(s, t)n_j(s) = P_i(s, t), u_i(x, y, 0) = \partial_t u_i(x, y, 0) = 0 \quad (i, j=1, 2)$$

Здесь  $T_{ij}(s, t)$  — компоненты тензора напряжений,  $n_j(s)$  — компоненты внешней нормали к контуру  $\gamma$ ,  $P_i(s, t)$  — компоненты вектора внешней нагрузки,  $s$  — дуговая координата, отсчитываемая вдоль  $\gamma$ ,  $u_i$  — компоненты вектора перемещения.

Для решения задачи используется следующий подход. Краевая задача теории упругости в пространстве изображений Лапласа сводится к системе граничных интегральных уравнений

$$\frac{1}{2} \mathbf{Q}(q, p) + \int \Gamma_1(g, g, p) \mathbf{Q}(g, p) d\gamma_g = \mathbf{P}(q, p) \quad (1.1)$$

где  $p$  — параметр преобразования Лапласа,  $\mathbf{Q}(q, p)$  — неизвестная векторфункция, определенная на границе тела  $\gamma$ ,  $\mathbf{P}(q, p)$  — вектор внешней нагрузки,  $q, g \in \gamma$ .

Интегральное уравнение (1.1) для любого  $p > 0$  решается численно методом последовательных приближений. Используя квадратную формулу

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h f(t) \psi(t) dt &= \frac{h}{6} \{ \psi(-\alpha h) [f(-h)(1+\sqrt{3}) + 4f(0) + f(h)(1-\sqrt{3})] + \\ &+ \psi(\alpha h) [f(-h)(1-\sqrt{3}) + 4f(0) + f(h)(1+\sqrt{3})] \} + O(h^4), \quad \alpha = 1/\sqrt{3} \end{aligned}$$

метод последовательных приближений можно реализовать по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_n[q(s_i), p] &= -2 \sum_{j=1}^N \{ \Gamma_1[q(s_i), g(\sigma_j), p] [\mathbf{Q}_{n-1}(g(s_{j-1}), p)(1+\sqrt{3}) + \\ &+ 4\mathbf{Q}_{n-1}(g(s_j), p) + \mathbf{Q}_{n-1}(g(s_{j+1}), p)(1-\sqrt{3})] + \Gamma_1[q(s_i), g(\sigma_{j+1}), p] \times \\ &\times [\mathbf{Q}_{n-1}(g(s_{j-1}), p)(1-\sqrt{3}) + 4\mathbf{Q}_{n-1}(g(s_j), p) + \mathbf{Q}_{n-1}(g(s_{j+1}), p)(1+\sqrt{3})] \} \times \\ &\times \Delta s_j / 6 + 2\mathbf{P}[q(s_i), p] \end{aligned}$$

$$s_i = l \times i/N, \Delta s_j = s_{j+1} - s_j, \sigma_j = l[j - (1 + (-1)^j)/2 + (-1)^j/\sqrt{3}]/N \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

Здесь  $l$  — длина  $\gamma$ ,  $q(s_i)$  и  $g(\sigma_j)$  — точки на контуре  $\gamma$ , имеющие дуговые координаты  $s_i$  и  $\sigma_j$  соответственно. За начало отсчета дуговой координаты  $s$  берется любая точка контура  $\gamma$ . Поскольку  $\gamma$  — замкнутый контур, то  $s_N = s_0, s_{N+1} = s_1, \sigma_{N+1} = \sigma_1$ .

При численном решении (1.1) кривая  $\gamma$  задается в виде  $x = x(s), y = y(s)$ . Для этого по заданному набору точек  $(x_i, y_i) \in \gamma$  функции  $x(s)$  и  $y(s)$  аппроксимируются кубическими сплайнами. Расстояние  $h_i = s_{i+1} - s_i$  между точками  $(x_i, y_i)$  по кривой  $\gamma$ , необходимое при аппроксимации, заменяется дугой окружности, проведенной через три последовательные точки. Компоненты вектора нормали к контуру вычисляются по формулам

$$n_1 = dy/ds, n_2 = -dx/ds.$$

Определив  $\mathbf{Q}$ , можно вычислить значение компонент тензора напряжений и вектора перемещения в любой точке тела в пространстве преобразования Лапласа.

2. Для численного обращения преобразования Лапласа используется метод регуляризации решения линейных интегральных уравнений первого рода А. Н. Тихонова [1]. Пусть имеется интегральное уравнение первого рода с приближенно заданной правой частью

$$\int_0^1 \exp[-pt/(1-\tau)] (1-\tau)^{-2} f(\tau) d\tau = F(p)$$

Здесь использована замена переменной интегрирования  $\tau = t/(1+t)$  [2]. Тогда в качестве приближенного решения данного уравнения берется функция  $f_\alpha(\tau)$ , удовлетворяющая уравнению

$$\int_0^1 \frac{f_\alpha(\tau) d\tau}{(\tau + \eta - 2\tau\eta)(1-\tau)(1-\eta)} = \int_0^1 \exp[-\tau\eta/((1-\tau)(1-\eta))] (1-\eta)^{-2} F(\eta) d\eta - \alpha[r_1 f_\alpha(\tau) - r_0 f_\alpha''(\tau)], \quad \eta = p/(p+1) \quad (2.1)$$

Для численного решения (2.1) отрезок  $[0, 1]$  разбивается на  $M$  элементарных участков, производные заменяются соответствующими разностными отношениями, интегралы — суммами (при этом используется квадратурная формула Чебышева для двух узлов).

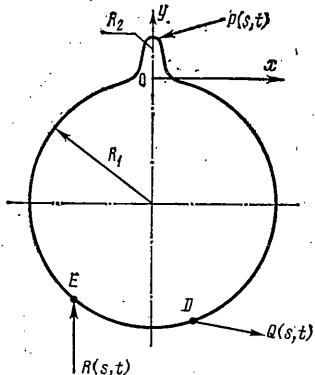
Окончательно уравнение (2.1) сводится к системе  $M$  линейных алгебраических уравнений с  $M$  неизвестными

$$A^* A \mathbf{f} + \alpha B \mathbf{f} = A^* \mathbf{F} \quad (2.2)$$

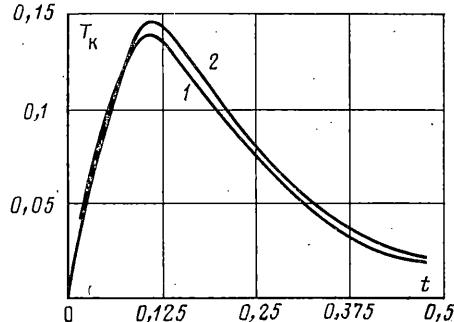
Матрицы  $A^*$  и  $A^* A$  соответствуют интегральным операторам в правой и левой частях (2.1). Матрица  $B$  соответствует дифференциальному оператору  $r_1 f(\tau) - r_0 f''(\tau)$ . При определении параметра регуляризации  $\alpha$  применяется критерий отношения. Выбирается наименьшее из значений  $\alpha > 0$ , при котором достигается минимум функции  $\psi(\alpha) = \|v_\alpha\|^2 / \|f_\alpha\|^2$ , где  $v_\alpha$  — решение уравнения

$$A^* A v + \alpha B v = A^* (A \mathbf{f}_\alpha - \mathbf{F}), \quad \|v(\tau)\|^2 = \int_0^1 (r_1 v^2(\tau) + r_0 v'^2(\tau)) d\tau \quad (2.3)$$

Для этого системы уравнений (2.2) и (2.3) решаются для некоторой конечной последовательности  $\alpha_h = \alpha_0 2^{-h}$  значений параметра  $\alpha$  и выбираются три наименьших значения параметра  $\alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ , удовлетворяющих условиям  $\psi(\alpha_n) < \psi(\alpha_{n+1}), \psi(\alpha_n) < \psi(\alpha_{n-1})$ . Используя интерполяцию по точкам  $\alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ , определяется  $\alpha^*$ , которое доставляет минимум  $\psi(\alpha)$ . Предложенный метод позволяет восстановить оригинал по известным значениям образа для некоторых положительных действительных значений параметра преобразований Лапласа  $p$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

3. Предложенным методом решалась задача для диска с выступом в форме зуба шестерни (фиг. 1). Вводились безразмерные переменные и величины  $x=hx_1$ ,  $y=hy_1$ ,  $t=Tt_1$ ,  $c_2=(G/\rho)^{1/2}T/h$ ,  $c_1=c_2(1+\gamma)^{1/2}$ ,  $v=1/(1-2\mu)$ , где  $c_1$  — скорость распространения волны расширения — сжатия,  $c_2$  — скорость распространения волн сдвига,  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $\rho$  — плотность,  $G$  — модуль сдвига.

Граница тела состоит из контура зуба и сопряженной с ним окружности радиуса  $R_1=6,7336$ . Контур зуба образован кривой

$$x_1=\theta + \sum_{n=1}^4 \frac{a_n \theta}{b_n^2 + \theta^2}, \quad y_1 = \sum_{n=1}^4 \frac{a_n b_n}{b_n^2 + \theta^2}, \quad 0,0255 < |\theta| < 0,98$$

и сопряженной с ней окружностью радиуса  $R_2=0,535$ . В вершине зуба приложена сосредоточенная единичная сила  $P(s, t)=\delta(s-s_0)te^{-10t}$ , составляющая угол  $33,5^\circ$  с осью  $x$ . Эта сила уравновешивается двумя сосредоточенными силами  $R(s, t)=R\delta(s-s_1)te^{-10t}$  и  $Q(s, t)=Q\delta(s-s_2)te^{-10t}$  таким образом, что  $R(s, t)$  направлена параллельно оси  $y$ . Сила  $Q(s, t)$  приложена в точке  $D(x_1=1,966, y_1=-12,90)$ , а сила  $R(s, t)$  — в точке  $E(x_1=-3,767, y_1=-12,05)$ . При численном решении системы интегральных уравнений (1.1) граница  $\gamma$  разбивается на  $N=N_1+N_2$  участков,  $N_1$  — число разбиений контура зуба на равные элементарные участки,  $N_2$  — число разбиений окружности. Для анализа напряженного состояния тела вычисляются нормальные тангенциальные напряжения  $T_k=T_{11}+T_{22}$  на контуре зуба. Численные расчеты проводились для случая  $a_1=0,0197$ ,  $a_2=0,1048$ ,  $a_3=-0,210413$ ,  $a_4=0,18034 \cdot 10^{-4}$ ,  $b_1=0,025$ ,  $b_2=0,137$ ,  $b_3=0,412$ ,  $b_4=10^{-4}$ ,  $h=-1$  см,  $c_1=22,188$ ,  $v=2$ . При численном обращении преобразования Лапласа полагалось  $r_1=1$ ,  $r_0=14,400$ ,  $\alpha_0=10^{-3}$ ,  $M=30$ . Расчеты проводились для различных значений параметра  $T$ . На фиг. 2 изображен график изменения во времени напряжения  $T_k$  на контуре зуба в точке с абсциссой  $x_1=0,945$ . В этой точке  $T_k$  достигает своего максимума. Кривая 1 соответствует значению параметра  $T=0,04$ , а 2 — значению  $T=0,001$ .

При решении интегральных уравнений методом последовательных приближений точность полученного решения оценивалась по отношению нормы невязки  $\eta_n(q, p)$ :

$$\|\eta_n(q, p)\| = \left( \int \eta^2(q, p) d\gamma \right)^{1/2},$$

$$\eta_n(q, p) = \frac{1}{2} Q_n(q, p) + \int \Gamma_1(q, g, p) Q_n(g, p) d\gamma_g - P(q, p)$$

к норме правой части интегрального уравнения  $P(q, p)$ :

$$\|P(q, p)\| = \left( \int P^2(q, p) d\gamma \right)^{1/2}$$

Заданная точностью  $\varepsilon > 0$  считалась достигнутой, если  $\|\eta_n\|/\|P\| < \varepsilon$  и итерационный процесс прерывался. Для всех значений параметра  $p$  точность  $\varepsilon$  принималась равной 0,01. При больших  $p$  количество итераций, необходимых для достижения заданной точности, резко уменьшается.

Предложенный численный метод решения интегральных уравнений является устойчивым при всех значениях  $p$ , на что указывает близость решений, полученных для различных разбиений границы  $\gamma$ . (Решение для  $T=0,001$ , соответствующее  $N=140$ , отличалось от решения, полученного при  $N=70$ , в среднем менее чем на 5%.)

Автор благодарит Копасенко В. В. за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач М.: Наука, 1979. 285 с.
2. Заикин П. Н. О численном решении обратной задачи операционного исчисления в действительной области // Ж. вычисл. математики и мат. физики (ЖЭТФ). 1968. Т. 8. № 2. С. 411–415.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
14.V.1985