

**ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ
ПО ПОВЕРХНОСТИ КОНСТРУКЦИИ С УЧЕТОМ
ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА
И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ТЕРМОУПРУГОГО ТЕЛА**

ОГИРКО И. В.

Теоретическим основам и математическим методам оптимизации напряжений в тонких оболочках и пластинках при нагреве и силовом нагружении посвящена [1].

Исследования рационального распределения температуры и напряженно-деформированного состояния осуществлялось с позиции геометрически линейной теории термоупругости оболочек.

С целью расширения области применения рационального высокотемпературного нагрева на класс гибких элементов конструкций, а также для более полного использования запасов прочности необходимо разработать метод оптимизации напряженно-деформированного состояния исходя из нелинейных пространственных соотношений термоупругости с учетом температурной зависимости характеристик материала.

В публикуемой статье методика численного решения, разработанная в [1] на класс линейно-термоупругих задач для тонких оболочек, распространяется на гибкие элементы конструкций с учетом геометрической нелинейности в зависимости от характеристик материала и температуры. При этом напряженно-деформированное состояние в элементах конструкций описывается пространственными соотношениями нелинейной термоупругости. Решение поставленной задачи строится на основе сочетания разностного метода дискретизации, метода Ньютона и итерационного метода оптимизации.

Рассмотрен конкретный пример элемента конструкции в виде нагруженной гибкой коробчатой конструкции, в которой определяется рациональное распределение температуры по ее внутренней поверхности.

1. Термоупругое тело гибкого элемента конструкции (в декартовой системе координат $\{x_i\}$ ($i=1, 2, 3$)) подвергается воздействию поверхностных силовых нагрузок и температурного поля. Исходные соотношения термоупругости включают уравнения равновесия, геометрические соотношения, уравнения состояния, уравнение теплопроводности, граничные силовые и температурные условия.

Уравнения равновесия с учетом геометрической нелинейности имеют вид [2-4]:

$$[\sigma_{ij}(\delta_{kj} + u_{k,j})]_{,i} = 0, \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.1)$$

где u_k — вектор перемещений, σ_{ij} — тензор напряжений, δ_{kj} — символ Кронекера; индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате.

Нелинейная связь между компонентами перемещений и компонентами тензора деформаций ε_{ij} представляется в виде

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (1.2)$$

Как известно [2, 4], существуют различные представления связи напряжений с деформациями в теории нелинейной термоупругости. Обозначим символически ее в виде ($t(x_1, x_2, x_3)$ — температура тела):

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}, t) \quad (1.3)$$

Граничные силовые условия с учетом геометрической нелинейности тела имеют вид [3]:

$$\sigma_{ij}(\delta_{kj} + u_{k,j})n_i = p_{nk} \quad (1.4)$$

где n_i — вектор внешней нормали, p_{nk} — вектор поверхностных сил. Температура по поверхности тела определяется граничными условиями первого рода

$$t|_S = t^S(x_1, x_2, x_3) \quad (1.5)$$

Ее распределение по толщине должно удовлетворять уравнению теплопроводности [4, 5] ($\lambda^*(t)$ — переменный коэффициент теплопроводности):

$$\text{div} [\lambda^*(t) \text{grad } t] = 0 \quad (1.6)$$

Ставится следующая задача: необходимо перераспределить температуру t^s по поверхности тела в рамках ограничений

$$t_-(x_1, x_2, x_3) \leq t^s(x_1, x_2, x_3) \leq t_+(x_1, x_2, x_3) \quad (1.7)$$

таким образом, чтобы обеспечить минимальное значение максимального уровня интенсивности напряжений σ_u , т. е. требуемый критерий оптимизации представится в виде

$$Q = \min [\max_{x_1, x_2, x_3} (\sigma_u)], \quad \sigma_u = 1/2 [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]^{1/2} \quad (1.8)$$

В неравенстве (1.7) функции t_- , t_+ заданы. Отметим, что в некоторых фиксированных подобластях S_y поверхности тела, на отдельных линиях или в точках условия (1.7) переходят в равенства, т. е. $t_- = t_+ = t^s$ на S_y .

По предположению, решение сформулированной задачи существует. Основные трудности реализации задачи связаны с решением нелинейного уравнения теплопроводности (1.6) и системы нелинейных дифференциальных разрешающих уравнений равновесия в перемещениях, которые получаются при подстановке (1.2), (1.3) в (1.1).

2. Для решения задач (1.1)–(1.8) строится в начале ее дискретный аналог разностным методом [5] повышенной точности. С помощью ЭВМ в объеме V тела, с шагами h_1, h_2, h_3 соответственно по координатам x_1, x_2, x_3 строится пространственная параллелепипедная сетка, образующая узлы (i_1, i_2, i_3) . Все функции переходят в дискретные. Производные аппроксимируются конечными разностями с повышенной точностью [1, 6, 7] погрешности $O(|h|^4)$. При этом производные $\partial u_k / \partial x_j$, входящие в граничные условия (1.4), заменяются несимметричными односторонними выражениями того же порядка точности через внутренние значения перемещений.

Для определения температуры внутри тела, т. е. решения дискретной нелинейной краевой задачи (1.6), (1.5), применяется разностный вариант итерационного метода Ньютона, согласно которому

$$t_{i_1, i_2, i_3}^{(n)} = t_{i_1, i_2, i_3}^{(n-1)} - F(t_{i_1, i_2, i_3}^{(n-1)}) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2.1)$$

где $t_{i_1, i_2, i_3}^{(n)}$ — n -е приближение температуры в узле (i_1, i_2, i_3) , F — известный оператор метода [4]. Начальное распределение температуры в теле представлялось линейным законом $t_{i_1, i_2, i_3}^{(0)} = c_0 + c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3$, где c_i — константы, соответствующие условию (1.5).

При применении алгоритма (2.1) невязки вычислялись с помощью дискретного уравнений теплопроводности в каждом узле тела, а вместо градиентов (элементов матрицы Якоби) применялась их разностная аппроксимация вперед [4]. Отметим также, что, по предположению, неоднородность в уравнении (1.6), как и в уравнениях термоупругости, вызванная температурной зависимостью характеристик материала, имеет гладкий характер. Зависимость характеристик материала от температуры задается согласно известным экспериментальным данным.

Для определения связи между температурой и соответствующим напряженно-деформированным состоянием, т. е. для решения дискретной задачи (1.1)–(1.4), также применяется итерационный метод Ньютона. При этом задается начальное приближение для перемещений $u_i^{(0)}$ во всей области тела, в том числе и на границе. Дальше, с помощью соотношений (1.2), определяются деформации, а по ним согласно (1.3) — напряжения. Подставляя полученные перемещения и напряжения в три уравнения равновесия (1.1) и граничные условия (1.4), получаем невязки в каждом узле (i_1, i_2, i_3) , которые служат для итерационной корректировки перемещений $\tilde{u}_i^{(n)}$ по алгоритму вида (2.1):

$$u_i^{(n)} = u_i^{(n-1)} - R(u_i^{(n-1)}) \quad (i=1, 2, 3; n=1, 2, 3, \dots) \quad (2.2)$$

Здесь индексы i_1, i_2, i_3 , соответствующие узлам разбиения тела, для простоты опущены. В итерационном процессе (2.2) с оператором R используется матрица Якоби только первого шага, что соответствует модифицированному методу Ньютона [4].

Решение прямых задач дает в каждом узле (i_1, i_2, i_3) тела значение температуры t и функций напряженно-деформированного состояния $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$.

При выборе численного метода оптимизации использовались известные градиентные методы, методы релаксации, метод локальных вариаций и метод Нелдера и Мида. Применительно задачи (1.1)–(1.8) наиболее эффективным является метод Нелдера и Мида, позволяющий реализовать сложные ограничения на оптимизационную задачу, а также автоматически (программным путем) видоизменять критерий оптимизации, контролировать его минимизацию.

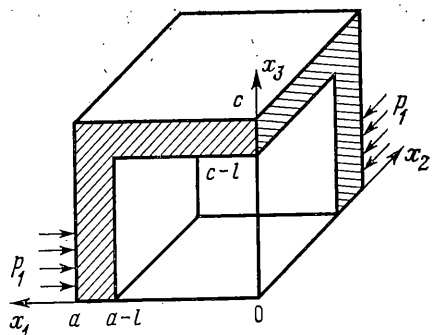
Детально алгоритм метода Нелдера и Мида описан в [4, 8]. В качестве пробных значений берутся три набора температур $t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}$ в дискретных точках поверхности тела в рамках требуемых ограничений (1.7). Для каждого из них решается на ЭВМ прямая задача и определяется численное значение $\max_{x_1, x_2, x_3} (\sigma_u)$ в термоупругом теле. Одно из принятых значений

температуры $t^{(r)}$, для которого интенсивность напряжений в теле максимальная, исключается и вместо него вводится новое значение $t^{(4)}$ в рамках ограничений (1.7) по алгоритму [7, 8]. При численной реализации шаг варьирования температуры в точке задается, а в процессе итераций для получения требуемой точности он уменьшается. Эффективность итерационного процесса оптимизации здесь проявляется за счет наложенных ограничений на возможное изменение температурного поля в дискретных узлах поверхности тела в виде неравенств (1.7).

3. Разработанная методика численного решения применима для класса задач гибких конструкций с учетом геометрической нелинейности, пространственного напряженно-деформированного состояния, температурной зависимости характеристик материала. Ограничения (1.7) на температурное поле могут соответствовать различным реальным условиям практики [1].

Рассмотрим пример термоупругого тела из стали марки 1Х19Н9Т в виде квадратной коробчатой конструкции, четверть которой изображена на фиг. 1. Высота конструкции c , толщина стенки l , размер верхней грани $2a \times 2a$.

К наружной поверхности конструкции приложена распределенная по периметру квадрата $|x_i|=a$ ($i=1, 2$) и высоте l ($0 \leq x_3 \leq l$) равномерная нагрузка p_1 , направленная по нормали во внутрь.



Фиг. 1

Повышенная неравномерная температура t_y^S задана на внутренней поверхности S_- , т. е. по ее верхней грани $x_3=c-l$ и боковым поверхностям $|x_i|=a-l$ ($i=1, 2$). На остальной поверхности конструкции поддерживается температура t_p .

Необходимо перераспределить температуру t_y^S в классе гладких функций при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} t_- \leq t_y^S(x_1, x_2, x_3) \leq t_+, \quad t_y^S(0, 0, c-l) = t_+ \\ t_y^S(x_1, x_2, 0) = t_- \quad \text{при } |x_i|=a-l \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Уравнение состояния (1.3) примем в виде [9]:

$$\sigma_{ij} = 2\mu(t) \varepsilon_{ij} + \lambda(t) \varepsilon \delta_{ij} - \beta \Phi(t) \delta_{ij} \quad (3.2)$$

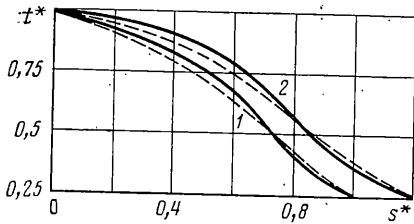
$$\Phi(t) = \int_{t_0}^t \alpha(\xi) d\xi, \quad \varepsilon = \varepsilon_{ii}, \quad \beta = 3\lambda + 2\mu$$

$$\mu = E/[2(1+\nu)], \quad \lambda = \nu E/[(1+\nu)(1-2\nu)]$$

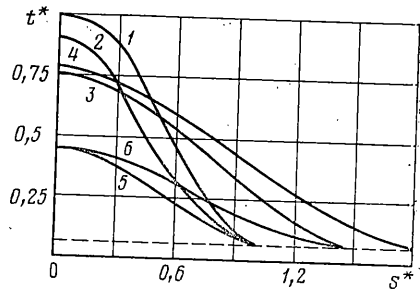
где λ, μ — параметры Ламе, t_0 — отсчетная температура.

Зависимость модуля упругости $E(t)$ и температурного коэффициента линейного расширения $\alpha(t)$ аппроксимируется в диапазоне температур от 20 до 700° в виде $E(t) = E_0 - a_1 t - a_3 t(t - a_2)$, $\alpha(t) = \alpha_0 + b_1 t + b_3 t(t - b_2)$, где E_0, α_0, a_i, b_i — константы [1, 6].

В связи с геометрической и механической симметрией конструкции достаточно ограничиться одной четвертью при численной реализации задачи. При этом по плоскостям симметрии $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ ставятся условия ра-



Фиг. 2



Фиг. 3

венства нулю первых производных по нормали от симметричных функций, которые также переводятся в дискретные.

Вычислительный эксперимент проводился на ЭВМ ЕС 1060. Программа расчета, составленная на языке ФОРТРАН IV, состоит из модульных подпрограмм аппроксимации конечными разностями, метода решения прямых задач и метода оптимизации. Это позволяет сформулировать задачу (1.1) — (1.8) и без существенных усложнений видоизменить и реализовать в ряде других случаев. Массив значений температуры $t^{(n)}$ в узлах (i_1, i_2, i_3) и массивы значений функций напряженно-деформированного состояния хранятся во внешней оперативной памяти ЭВМ.

Для обеспечения требуемой точности расчетов число разбиений по толщине конструкции составляло восемь, а по высоте — 40.

Гладкость распределения оптимальной температуры обеспечивалось тем, что ставилось дополнительное условие: градиент температуры от точки (i_1, i_2, i_3) до близлежащих не должен был превышать заданной величины δ .

Расчеты проводились для следующих параметров задачи: $c/a = 1$, $a/l = 10$, $l_1/l = 2$, $t_+/t_- = 4$, $t_-/t_2 = 4$, $t_2/t_0 = 2$, $p_1 \cdot a \cdot 10^3 / (E_0 \cdot c) = 0,5$, $\delta = 1/18(t_+ - t_-)$.

На фиг. 2 приведены графики оптимального распределения температуры $t^* = t_y^s / t_+$ в плоскости симметрии и по диагональному сечению по длинам внутренних контуров. Кривая 1 соответствует распределению приведенной температуры от точки (0, 0, $c-l$) до точки ($a-l, 0, 0$) по координате $s^* = s/L_1$, s — текущая длина, измеряемая вдоль различных направлений.

Кривая 2 соответствует распределению t^* от точки (0, 0, $c-l$) до ($a-l, a-l, 0$) по длине $c-l + \sqrt{2}(a-l)$ (кривая 2 пересекает ось абсцисс в точке $s^* = L_1/(a+c-2l)$).

Для сравнения на той же фиг. 2 штриховыми линиями изображены соответствующие распределения температур, рассчитанные без учета геометрической нелинейности. Как видно, расчет по линейной теории термоупругости ведет к тому, что в окрестности максимальной температуры значение ее градиента возрастает.

На фиг. 3 изображены графики распределения температуры $t^* = t/t_+$ по координате $s^* = s/L_2$ ($0 \leq L_2 \leq l$). Кривая 1 соответствует температуре $t(0, 0, x_3)$, кривая 2 — температуре $t(a/2, 0, x_3)$ при $c-l \leq x_3 \leq c$, кривая 3 —

по диагональной прямой от точки $(a-l, 0, c-l)$ до $(a, 0, c)$, кривая 4 — по угловой прямой от точки $(a-l, 0, c-l)$ до (a, a, c) , кривая 5 — от $(a-l, 0, c/2)$ до $(a, 0, c/2)$, кривая 6 — по толщине ребра от точки $(a-l, a-l, c/2)$ до $(a, a, c/2)$. Штриховая линия $t_2/t_+ = 1/16$ соответствует нижнему ограничению на температуру.

При исследуемом силовом и температурном воздействии нижние торцы конструкции прогибаются во внутрь. Максимальное значение перемещения наблюдается по середине нижних торцов, а его величина равна $0,83 l$, т. е. соизмерима с толщиной конструкции. Максимальные напряжения в конструкции возникают в окрестности точек $(a-l, 0, c-l)$, $(a, 0, c)$, $(0, a-l, c-l)$, $(0, a, c)$. Расчет показал, что учет геометрической нелинейности в данной задаче ведет к уменьшению максимальных расчетных напряжений и к увеличению максимальной величины перемещений.

Вычислительный эксперимент позволил также сравнить эффективность полученного рационального распределения температуры по сравнению с другими возможными значениями $t(x_1, x_2, x_3)$ в рамках (1.7). Установлено, что при расчетном рациональном температурном поле величина максимального напряжения равна $99,5$ МПа, а при начальном выбранном $t^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = 127,1$ МПа. Для оценки полученного оптимального решения итерационный процесс оптимизации начинался также с двух других различных приближений $t_1^{(1)}(x_1, x_2, x_3)$ и $t_2^{(1)}(x_1, x_2, x_3)$ в рамках условий (1.7). При этом все три итерационных процесса сходились к одному полученному оптимальному решению по методу [4], а отличие значений температуры и функций напряженно-деформированного состояния в дискретных узлах тела не превышало $1,5\%$.

Автор благодарит Я. С. Подстригача за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. Киев: Наук. думка. 1979. 364 с.
2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. 512 с.
3. Амензаде Ю. А. Теория упругости. М.: Высш. шк. 1976. 272 с.
4. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир. 1976. 464 с.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука. 1977. 656 с.
6. Гуснин С. Ю., Омелянов Г. А., Резников Г. В., Сироткин В. С. Минимизация в инженерных расчетах на ЭВМ: Библиотека программ. М.: Машиностроение. 1981. 121 с.
7. Огирко И. В. Исследование оболочек с учетом изменения свойств материала от температуры // Строит. механика и расчет сооружений. Вып. 9. Киев: Вища шк. 1977. С. 11–12.
8. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ. 1976. 367 с.
9. Бурак Я. И., Огирко И. В. Оптимальный нагрев цилиндрической оболочки с зависящими от температуры характеристиками материала // Математические методы и физико-механические поля. Вып. 5. Киев: Наук. думка. 1977. С. 26–30.

Львов

Поступила в редакцию
17.III.1983