МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1987

УДК 531.395

К МЕТОДИКЕ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ СТУПЕНЧАТОЙ ТЯГИ

КОСМОДЕМЬЯНСКИЙ В. А.

Рассматривается задача об определении оптимальной программы ступенчатой тяги, приведенной в [1]. Предлагается иная форма записи необходимых условий оптимальности, основанная на представлении исходного функционала как функции параметров высот уровней тяги и точек переключения тяги с одного уровня на другой. В качестве примеров рассмотрены задача о перемещении точки переменной массы в бессиловом поле между двумя точками покоя, где найдена общая форма решения для случая ступенчатых уровней тяги, и задача об оптимальной ступенчатой программе реактивного ускорения для изменения плоскости круговой орбиты точки переменной массы, где уточнены результаты [1], в частности установлены соотношения между моментами переключения тяги в общем случае.

1. Пусть динамическая система описывается m дифференциальными уравнениями

$$x_s^{\cdot}=f_s(x_j,\ u_k,\ t) \qquad (s,\ j=\overline{1,\ m};\ k=\overline{1,\ r+1}) \tag{1.1}$$

где $x_j(t)$ — фазовые координаты, непрерывные функции времени, $u_k(t)$ — кусочно-непрерывные функции управления, t — время.

В начальный момент времени положение динамической системы определено значениями координат $x_s(t_0)=x_s^0$ $(s=\overline{1,\ m})$, причем координаты системы в конечный момент времени $t=T$ связаны равенствами $\Phi_l=$ $=\Phi_l[x_s(T),\ T]=0$ $(l=\overline{1,\ p}<m)$.

Функционал задачи имеет вид

$$J=\int\limits_{t_0}^{T} f_0(x_j,\ u_k,\ t)\,dt \tag{1.2}$$

(f_0 — некоторая заданная функция).

Рассматривается ситуация, при которой программа одной из управляющих функций должна быть ступенчатой с n уровнями. Следовательно, при ступенчатой аппроксимации некоторой функции управления, для определенности $u_1(t)$, на каждом временном интервале $(t_{i-1},\ t_i)\in[t_0,\ T]$ значение $u_1(t)$ принимается равным константе a_i в отличие от $u_1^{\text{opt}}(t)$ кусочно-непрерывной функции.

Высоты уровней a_i и точки переключения t_i с одного уровня на другой должны выбираться так, чтобы $u_1(t)$ наилучшим образом в смысле функционала (1.2) аппроксимировала оптимальное управление $u_1^{\text{opt}}(t)$.

Рассмотрим вспомогательный функционал

$$I=\Sigma\rho_l\Phi_l+\Sigma\int\limits_{t_{l-1}}^{t_l}[f_0+\Sigma\lambda_s(x_s^{\cdot}-f_s)]\,dt=\Sigma\rho_l\Phi_l+\Sigma\int\limits_{t_{l-1}}^{t_l}(\Sigma\lambda_s x_s^{\cdot}-H)\,dt$$

В выражении (1.3) ρ_l, $\lambda_s(t)$ — множители Лагранжа, а $H=\Sigma\lambda_s f_s-f_0$ — гамильтониан динамической системы (1.1). Функционал (1.3) зависит, очевидно, от параметров a_i, t_i.

Составляя обычным образом первую вариацию от фукционала (1.3), приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях $\delta u_2,\ldots$

$\ldots, \delta u_{r+1}, \delta x_s, \delta\lambda_s, \delta x_s(t_i), \delta\lambda_s(t_i), \delta a_i, \delta t_i, \delta T$, находим для решения поставленной задачи следующие соотношения [2]:

m дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют фазовые координаты и функции управления на участке (t_{i-1}, t_i)

$$x_s^{\bullet}=f_s(x_j, a_i, u_2, \ldots, u_{r+1}, t) \quad (s=\overline{1, m}) \tag{1.4}$$

m сопряженных системе (1.1) дифференциальных уравнений на участке (t_{i-1}, t_i):

$$\lambda_s^{\bullet}=-\partial H/\partial x_s \quad (s=\overline{1, m}) \tag{1.5}$$

условия принципа максимума для определения r функций управления

$$\max_{u_j} H \quad (j=\overline{2, r+1}) \tag{1.6}$$

краевые условия вида

$$\lambda_s(T)+\partial(\Sigma\rho_l\Phi_l)/\partial x_s=0 \quad (s=\overline{1, m}) \tag{1.7}$$

$$\partial(\Sigma\rho_l\Phi_l)/\partial T-H(T)=0 \tag{1.8}$$

условия непрерывности множителей Лагранжа

$$\lambda_s(t_i-0)=\lambda_s(t_i+0) \quad (\overline{i=1, n}) \tag{1.9}$$

условия непрерывности Гамильтониана H:

$$H(t_i-0)=H(t_i+0) \quad (i=\overline{1, n}) \tag{1.10}$$

условия типа

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \partial H/\partial a_i\, dt=0 \quad (i=\overline{1, n}) \tag{1.11}$$

Получены $m(n+1)$-дифференциальных уравнений для определения $x_j^i(t)$ $(j=\overline{1, m};\ i=\overline{1, n})$, $m(n+1)$-дифференциальных уравнений для определения множителей $\lambda_s^i(t)$ $(s=\overline{1, m};\ i=\overline{1, n+1})$, $r(n+1)$-уравнений принципа максимума для определения $u_k^i(t)$ $(k=\overline{2, r+1};\ i=\overline{1, n+1})$.

Неизвестными величинами пока являются $2m(n+1)$ констант, полученных из решения систем дифференциальных уравнений (1.4), (1.5), p-множителей ρ_l, $2n+1$ величин a_i, t_i, T — всего $2m(n+1)+(2n+1)+p$ величин.

Для определения этих неизвестных величин имеем m краевых условий (1.7); mn-условий непрерывности множителей Лагранжа (1.8); mn-условий непрерывности фазовых координат в точках t_i; $2n$-условий (1.10), (1.11), определяющих a_i, t_i; 1-условие (1.8); m-начальных условий $x_s(t_0)=x_s^0$, p-уравнений $\Phi_l[x_s(T), T]=0$ — всего $2m(n+1)+2n+1+p$ величин.

Следовательно, общее число условий совпадает с числом определяемых постоянных.

Отметим, что соотношения (1.10), (1.11) являются теми дополнительными соотношениями, которые в отличие от соотношений метода [1] позволяют определить $2n$ параметров a_i, t_i.

2. Примеры ступенчатой аппроксимации программы реактивного ускорения ([1], с. 296—301). Рассматривается задача о перелете точки переменной массы в бессиловом поле между двумя положениями покоя, разделенными расстоянием L за фиксированный промежуток времени T. Управляющая функция — реактивное ускорение $a(t)$ — выбирается из класса ступенчатых функций с заданным числом уровней.

Вариационная задача имеет вид [1]:

$$J=\int_0^T a^2(t)\, dt, \quad J(0)=0, \quad J(T)-\min$$

$$x^{\cdot}=u, \quad x(0)=0, \quad x(T)=L$$
$$u^{\cdot}=ae, \quad u(0)=0, \quad u(T)=0$$
$$a(t)=a_i=\text{const} \quad t\in(t_{i-1}, t_i) \qquad (2.1)$$

где $e(t)=\pm1$ — функция, определяющая направление тяги.

Ставится задача об определении параметров a_i, t_i, минимизирующих исходный функционал J (2.1).

Сопряженная система уравнений (1.5) имеет вид $\lambda_x^{\cdot}=-\partial H/\partial x_s=0$, $\lambda_u^{\cdot}=-\partial H/\partial u=0$. Следовательно, гамильтониан H исходной задачи будет $H=\lambda_x^0 u+(\lambda_u^0-\lambda_x^0 t)ae-a^2$. Условие (1.6) $\max_{e(t)}H=\max_{e(t)}(\lambda_u^0-\lambda_x^0 t)ae$ позволяет сделать вывод, что $e(t)=1$ при $\lambda_u^0-\lambda_x^0 t>0$; $e(t)=-1$ в случае $\lambda_u^0-\lambda_x^0 t<0$.

Множитель $\lambda_u^0-\lambda_x^0 t$ обращается в нуль в момент $t^*=\lambda_u^0/\lambda_x^0$ и, очевидно, в окрестности этой точки $e(t)$ может обратиться в нуль, что соответствует паузе в работе двигателя.

Примем, что при разгоне допустимы n_p уровней тяги a_i $(i=\overline{1, n_p})$; при торможении соответственно n_T уровней тяги. Между разгоном и торможением в режиме работы двигателя имеется пауза.

Необходимые условия оптимальности (1.11) имеют вид

$$\frac{\partial J}{\partial a_i}=\int_{t_{i-1}}^{t_i}[2a_i-(\lambda_u^0-\lambda_x^0 t)]dt=0$$

Выполнив интегрирование и сократив на t_i-t_{i-1}, находим $2a_i-\lambda_u^0+{}^1/_2\lambda_x^0(t_i-t_{i-1})=0$. Представим полученное равенство в виде

$$a_i={}^1/_2\lambda_x^0(t^*-{}^1/_2(t_i-t_{i-1}))={}^1/_2\lambda_u^0+{}^1/_2(\lambda_u(t_i)-\lambda_u(t_{i-1})) \qquad (2.2)$$

Условия (1.9) непрерывности H дают $a_i^2-\lambda_u(t_i)a_i=a_{i+1}-\lambda_u(t_i)a_{i+1}$, откуда находим

$$a_i+a_{i+1}=\lambda_u(t_i)$$
$$a_{i+1}=\lambda_u(t_i)-a_i={}^1/_2\lambda_x^0(t^*-{}^1/_2(3t_i-t_{i-1})) \qquad (2.3)$$

Для момента времени $t_{n_p}=t_{n-1}$, соответствующего концу разгона, условие $H(t_{n-1}-0)=H(t_{n-1}+0)$ дает

$$a_n^2-\lambda_u(t_{n-1})a_n=0, \quad a_n=\lambda_u(t_{n-1})=\lambda_x^0(t^*-t_{n-1}) \qquad (2.4)$$

Из условия $\partial J/\partial a_n=0$ следует $a_n={}^1/_2\lambda_x^0(t^*-{}^1/_2(t_{n-1}-t_{n-2}))$.

Из последних двух уравнений находим $t^*={}^1/_2(3t_{n-1}-t_{n-2})$, $a_n={}^1/_2\lambda_x^0(t_{n-1}-t_{n-2})$. Аналогично из уравнений (2.3), учитывая соотношение (2.4), получим $a_{n-1}=\lambda_u(t_{n-2})-\lambda_u(t_{n-1})=\lambda_x^0(t_{n-1}-t_{n-2})$ и $a_{n-1}={}^1/_2\lambda_x^0(t^*-{}^1/_2(3t_{n-2}-t_{n-3}))$.

Из последних уравнений будем иметь $t_{n-1}-t_{n-2}=t_{n-2}-t_{n-3}=\tau$. Следовательно, переключение тяги с одного уровня на другой при разгоне происходит через равные промежутки времени.

Принимая во внимание соотношение $t_i=i\tau$, из формулы (2.4) находим

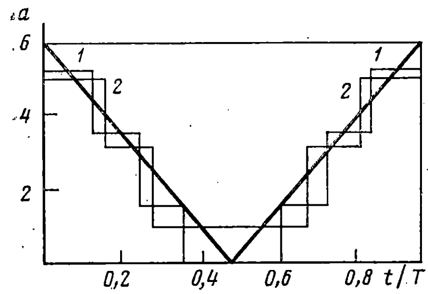
$$a_i={}^1/_2\tau(n-i+1)\lambda_x^0 \qquad (2.5)$$

Последовательные значения уровней тяг при разгоне убывают по закону арифметической прогрессии. Аналогичные зависимости между параметрами a_j, t_j имеют место при торможении.

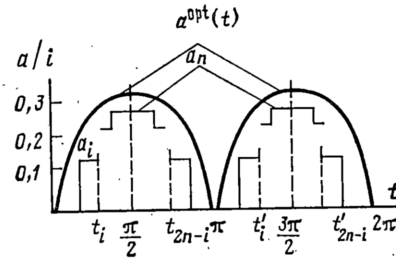
Поскольку рассматривается случай n-ступенчатой тяги, очевидно, надо положить $a_n=a_{n+1}$, и тогда из формул (2.2)—(2.4) следует $a_{n-1}=a_{n+2}, \ldots, a_1=a_{2n}$ и вывод о равенстве промежутков времени движения с одноуровневой тягой.

Пройденный путь при маневре

$$L=\Sigma s_i=2\Sigma(n-i+1)a_i\tau^2=\lambda_x^0\tau^3\sum_{i=1}^{n}i^2 \qquad (2.6)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Но $\Sigma i^2 = {}^1/_6 n(n+1)(2n+1)$ и из уравнений (2.5), (2.6) следует

$$\lambda_x^0 = \frac{(2n+1)^2}{n(n+1)}\frac{6L}{T^3}, \qquad a_n^i = \frac{(2n+1)(n-i+1)}{n(n+1)}\frac{3L}{T^2} \tag{2.7}$$

Функционал принимает значение

$$J_n = \frac{(2n+1)^2}{n(n+1)}\frac{3L^2}{T^3}$$

Отметим частные случаи [1]:

$$n=1:\ \lambda_x^0=27L/T^3,\quad a_0=4{,}5L/T^2,\quad J_1=13{,}5L^2/T^3;$$
$$n=2:\ \lambda_x^0=25L/T^3,\quad a_1=5L/T^2,\quad a_2=5L/T^2,\quad J_2=12{,}5L^2/T^3;$$
$$n=3:\ \lambda_x^0=12{,}25L/T^3,\quad a_1=5{,}25L/T^2,\quad a_2=3{,}5L/T^2,\quad a_3=1{,}75L/T^2,\quad J_3=12{,}25L^2/T^3$$

(ступенчатая функция фиг. 1). При $n\to\infty$ имеем $J = \lim\limits_{n\to\infty} J_n = 12L^2/T^3$.

Приведем без вывода зависимости, относящиеся к случаю движения с оптимальной ступенчатой программой тяги без паузы:

$$a_i = {}^1/_4\lambda_x^0\tau(2n-2i+1) \qquad (i=\overline{1,n}), \qquad \tau={}^1/_2 T/n$$
$$a_n = \frac{1}{4}\lambda_x^0\tau = \frac{(2n)^3}{n(n+1)(4n-1)/3-n^2}\frac{L}{T^2} \tag{2.8}$$
$$J_n = \frac{2}{3}\frac{(2n)^3(4n^2-1)n}{[n(n+1)(4n-1)/3-n^2]^2}\frac{L^2}{T^3}$$

при $n=3$: $a_3={}^{36}/_{35}L/T^2$, $a_2=3a_3$, $a_1=5a_3$, $J_3=12{,}34L^2/T^3$ (фиг. 1, кривая *2*).

Определим оптимальную ступенчатую программу реактивного ускорения для маневра изменения плоскости круговой орбиты точки переменной массы [1]. Тяга направлена перпендикулярно положению мгновенной плоскости орбиты ($e=+1$ соответствует направлению положительной нормали), i — угол между плоскостями начальной и конечной орбит, конечное положение линии узлов орбиты характеризуется углом $\Omega_1=\pi/2$, время маневра считается заданным и кратным целому числу оборотов. Начальная орбита лежит в горизонтальной плоскости.

Уравнения движения имеют вид [1]:

$$\chi^\bullet = ae\sin(t-\Omega_1);\quad \chi(0)=0,\quad \chi(T)=0$$
$$\omega^\bullet = ae\cos(t-\Omega_1),\quad \omega(0)=0,\quad \omega(T)=i \tag{2.9}$$
$$J = \int_0^T a^2(t)\,dt$$

где переменные χ, ω введены по формулам $\chi=i\sin(\Omega-\Omega_1)$, $\omega=i\cos(\Omega-\Omega_1)$. Сопряженная система уравнений имеет вид $\lambda_\chi^\bullet=-\partial H/\partial\chi=0$, $\lambda_\omega^\bullet=-\partial H/\partial\omega=0$, откуда следует $\lambda_\omega=c_\omega=\mathrm{const}$, $\lambda_\chi=c_\chi=\mathrm{const}$.

Примем $c_\chi=0$. Гамильтониан системы имеет вид $H=\lambda_\omega ae\sin t-(ae)^2$, откуда из условия $\max_{e(t)} H$ следует $e=\mathrm{sign}(\lambda_\omega\sin t)$.

Будем искать n-ступенчатую аппроксимацию оптимального управления $a^{\text{opt}}(t)$ [1], полагая значение уровня тяги для момента времени $t \in [t_{i-1}, t_i]$ равным a_i (фиг. 2).

На участке $0<t<\pi$ из условия

$$\partial J/\partial a_i = \int (-2a_i+\lambda_\omega \sin t)dt=0 \qquad (t_i \leqslant t \leqslant t_{i-1})$$

находим

$$2a_i(t_i-t_{i-1})-\lambda_\omega(\cos t_i-\cos t_{i-1})=0 \tag{2.10}$$

Из условия $H(t_{i-1}-0)=H(t_{i-1}+0)$ имеем

$$\lambda_\omega a_i \sin t_{i-1}-a_i^2=\lambda_\omega a_{i+1}\sin t_{i-1}-a_{i+1}^2 \tag{2.11}$$

При начальных условиях $a_0=0$ для $i>1$ находим $a_i+a_{i+1}=\lambda_\omega \sin t_{i-1}$.

Из условия $H(t_{2n-i}-0)=H(t_{2n-i}+0)$ получаем $a_{2n-i}+a_{2n-(i+1)}=\lambda_\omega \sin t_{2n-i}$. Полагая $a_i=a_{2n-i}$, $a_{i+1}=a_{2n-(i+1)}$, найдем

$$\sin t_{2n-i}=\sin t_i$$

$$\sin {}^1/_2(t_{2n-i}-t_i)\cos({}^1/_2(t_{2n-i}+t_i))=0$$

Так как $(t_i, t_{2n-i})\in(0, \pi)$, то корни уравнения имеют вид

$$t_{2n-i}+t_i=\pi \qquad (i=\overline{0, n}) \tag{2.12}$$

Из соотношений (2.11) следует

$$a_i=\lambda_\omega \sum_1^i (-1)^i \sin t_{i-1}$$

Подставляя найденное значение a_i в уравнение (2.10) и сокращая на λ_ω, находим

$$2(t_i-t_{i-1})\Sigma(-1)^i \sin t_{i-1}=\cos t_{i-1}-\cos t_i \tag{2.13}$$

Из условия (2.12) $t_{n-1}+t_{n+1}=\pi$ и условия $\partial J/\partial a_n=0$ (уравнение (2.10) при $i=n-1$) находим

$$(\pi-2t_{n-1})\Sigma(-1)^i \sin t_{i-1}=\cos t_{n-1} \tag{2.14}$$

Итак, $n-1$ соотношения (2.13), (2.14) представляют n трансцендентных уравнений для определения n величин t_i $(i=\overline{0, n-1})$. Зная t_i, из уравнений (2.10) определим a_{i+1}. Подставляя a_{i+1} в уравнение

$$i=\int_0^i d\omega=\sum_{i=1}^{n-1} 4\int_{t_{i-1}}^{t_i} a_i \sin t\, dt \tag{2.15}$$

определим λ_ω и затем величину заданного функционала J.

Пусть $n=1$ [1]. Искомые величины t_0, t_2 связаны зависимостью (2.12): $t_0+t_2=\pi$.

Соотношение (2.14) имеет вид $(\pi-2t_0)\sin t_0=\cos t_0$. Откуда $t_0=0{,}403$, $t_2=2{,}738$ на участке $e(t)=-1$, $t_0'=t_0+\pi$, $t_2'=t_2+\pi$ на участке, где $e(t)=1$, $\lambda_\omega=0{,}693i$, $a_1=\lambda_\omega \sin t_1=0{,}272i$, $J_1=0{,}345i^2$.

Пусть $n=2$ [1]. Искомые величины t_0, t_1, t_3, t_4 связаны зависимостями $t_0+t_4=\pi$, $t_1+t_3=\pi$. С учетом этих зависимостей из соотношений (2.13), (2.14) находим

$$(\pi-2t_1)(\sin t_1-\sin t_0)-\cos t_0=0$$

$$2(t_1-t_0)\sin t_0-(\cos t_0-\cos t_1)=0$$

Подбором находим решение $t_0=0{,}232$, $t_1=0{,}7405$ и тогда $t_3=2{,}4$, $t_4=2{,}91$ на участке, где $e(t)=-1$, $t_{i-1}'=t_i+\pi$ $(i=1, 2, 4, 5)$ на участке, где $e(t)=1$ (см. фиг. 2), $a_1=0{,}232\lambda_\omega$, $a_2=0{,}4447\lambda_\omega$.

Из уравнения (2.15) $\lambda_\omega=0{,}654i$ и тогда $a_1=0{,}15i$, $a_2=0{,}29i$. Искомый функционал $J_2=0{,}325i^2$ $(J_{\text{opt}}=0{,}318i^2)$.

Приведем результаты, относящиеся к движению с оптимальной двухступенчатой программой без пауз. Из соотношений (2.10), (2.11) при начальных условиях $t_0=0$, полагая $i=1$, 2, находим

$$2a_1t_1-\lambda_\omega(1-\cos t_1)=0$$

$$a_2(\pi-2t_1)-\lambda_\omega \cos t_1=0, \quad a_1+a_2=\lambda_\omega \sin t_1$$

Подбором определяем решение $t_1=0{,}615$; тогда $t_3=\pi-t_1$, $t_1'=t_1+\pi$, $t_3'=t_3+\pi$, $\lambda_\omega=0{,}664i$, $a_1=0{,}099i$, $a_2=0{,}284i$. Окончательно

$$a_1(t)=0{,}099i, \quad e(t)=-1, \quad 0\leqslant t<0{,}615$$
$$a_2(t)=0{,}284i, \quad e(t)=-1, \quad 0{,}615<t<2{,}525$$
$$a_3(t)=0{,}099i, \quad e(t)=-1, \quad 2{,}525<t<3{,}14$$
$$a_4(t)=0{,}099i, \quad e(t)=1, \quad 3{,}14<t<3{,}755$$
$$a_5(t)=0{,}284i, \quad e(t)=1, \quad 3{,}755<t\leqslant 5{,}665$$
$$a_6(t)=0{,}099i, \quad e(t)=1, \quad 5{,}665<t\leqslant 6{,}28$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гроздовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В.* Механика космического полета с малой тягой. М.: Наука, 1966. 679 с.
2. *Космодемьянский В. А.* Об одном типе вариационных задач // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1111–1116.

Москва

Поступила в редакцию 12.VII.1985