МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1987

УДК 539.374

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ НА ПОДАТЛИВЫХ ОСНОВАНИЯХ

ДРОЗДОВ А. Д., КОЛМАНОВСКИЙ В. Б.

Устойчивости неоднородно стареющих вязкоупругих стержней без учета реакции основания посвящены работы [1–4]. Ниже предложен метод исследования и установлены условия устойчивости вязкоупругих стержней на основаниях при произвольных ядрах релаксации и различных предположениях о реакции оснований.

1. Постановка задачи. Пусть имеется прямолинейный стержень из вязкоупругого неоднородно стареющего материала длины l. Поперечное сечение стержня имеет одну ось симметрии. Изгиб стержня происходит в плоскости, проходящей через продольную ось стержня и ось симметрии. Обозначим через x ось, направленную вдоль продольной оси стержня в недеформированном состоянии. В момент времени $t=0$ к стержню приложена сжимающая сила P вдоль оси x и поперечная распределенная нагрузка интенсивности $q(x)$. Возраст элемента стержня в момент $t=0$ в точке x есть $\rho(x)$, где ρ — ограниченная кусочно-непрерывная функция. При одноосной деформации напряжение $\sigma(t, x)$ и деформация $\varepsilon(t, x)$ связаны соотношением [1]: $\sigma=E(I-R)\varepsilon$. Здесь E — постоянный модуль упругомгновенной деформации, I — единичный оператор, R — оператор релаксации с ядром $r(t, \tau)$:

$$I\varepsilon=\varepsilon(t,x), \quad R\varepsilon=\int_0^t r(t+\rho(x),\tau+\rho(x))\,\varepsilon(\tau,x)\,d\tau$$

Пусть $y(t, x)$ — прогиб стержня в точке x в момент времени $t\geqslant 0$.

Определение 1. Стержень называется устойчивым на бесконечном интервале времени, если для любого $\delta_1>0$ существует такое $\delta_2>0$, что из неравенства $\sup_x|q(x)|<\delta_2$ следует оценка $\sup_{t,x}|y(t, x)|<\delta_1$, $0\leqslant x\leqslant l$, $t\geqslant 0$.

Пусть y_0 — предельно допустимое (критическое) значение прогиба, а критическое время t_0 есть момент первого достижения прогибом величины y_0.

Определение 2. Стержень называется устойчивым на интервале времени $[0, t_1]$, если $t_0>t_1$.

Устойчивость стержня исследуется в квазистатической постановке. Считается, что прогиб стержня достаточно мал (можно пренебречь нелинейными членами в выражении для кривизны продольной оси), продольное смещение точек оси стержня существенно меньше прогиба, и им можно пренебречь и справедлива гипотеза плоских сечений. Относительно ядра релаксации предполагается, что

$$0\leqslant r(t+\rho(x), \tau+\rho(x))\leqslant r_1(t, \tau) \quad (0\leqslant x\leqslant l)$$

$$|r_1|=\sup_t\int_0^t r_1(t,\tau)\,d\tau<1 \qquad (t\geqslant 0) \tag{1.1}$$

Уравнение равновесия элемента стержня имеет вид [5]:

$$M''+Py''=q_0+q, \quad M=EJ(I-R)y'', \quad y'=\partial y/\partial x \tag{1.2}$$

Здесь M — изгибающий момент, q_0 — поперечное усилие на стержень со стороны основания, J — момент инерции поперечного сечения стержня. В зависимости от типа закрепления концов стержня имеет место одно из граничных условий:

концы стержня жестко защемлены

$$y(t,0)=y'(t,0)=y(t,l)=y'(t,l)=0 \tag{1.3}$$

концы стержня шарнирно оперты

$$y(t,0)=y(t,l)=0, \quad M(t,0)=M(t,l)=0 \tag{1.4}$$

конец $x=0$ жестко защемлен, а конец $x=l$ шарнирно оперт

$$y(t,0)=y'(t,0)=y(t,l)=0, \quad M(t,l)=0 \tag{1.5}$$

конец $x=0$ жестко защемлен, а конец $x=l$ свободен

$$y(t,0)=y'(t,0)=0, \quad M(t,l)=M'(t,l)+Py'(t,l)=0 \tag{1.6}$$

Далее приведены условия устойчивости, налагаемые на сжимающую силу P, причем без ограничения общности считается, что $EJ=1$ в уравнении (1.2).

2. Стержень на линейном гидростатическом основании. Пусть упругое основание описывается винклеровской моделью: $q_0=-cy$, где c — коэффициент податливости. Подставляя это выражение в (1.2), получим

$$[(I-R)y'']''+Py''+cy=q \tag{2.1}$$

Введем величины

$$\varphi_{it}(u)=\left[\int_0^l\left(\frac{\partial^i u(t,x)}{\partial x^i}\right)^2 dx\right]^{1/2}$$

Если функция u не зависит от t, то величины $\varphi_{it}(u)$ обозначаются через $\varphi_i(u)$.

Умножим соотношение (2.1) на $y(t,x)$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до l. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (1.3) — (1.6), получим

$$\varphi_{2t}^2(y)+c\varphi_{0t}^2(y)=P\varphi_{1t}^2(y)+\int_0^l(y''Ry''+qy)\,dx \tag{2.2}$$

С помощью неравенства Коши — Буняковского найдем

$$\left|\int_0^l y''Ry''\,dx\right|\leqslant\varphi_{2t}(y)\int_0^t r_1(t,\tau)\varphi_{2\tau}(y)\,d\tau, \qquad \left|\int_0^l qy\,dx\right|\leqslant\varphi_0(q)\varphi_{0t}(y)$$

Из этих оценок и (2.2) следует, что

$$\varphi_{2t}^2(y)+c\varphi_{0t}^2(y)\leqslant\varphi_{2t}(y)\int_0^t r_1(t,\tau)\varphi_{2\tau}(y)\,d\tau+P\varphi_{1t}^2(y)+\varphi_0(q)\varphi_{0t}(y) \tag{2.3}$$

Обозначим через U множество функций $u(x)$, $0\leqslant x\leqslant l$, интегрируемых с квадратом до второй производной включительно и удовлетворяющих тем же граничным условиям, что и прогиб y (например, в случае (1.6) имеем $u(0)=u'(0)=0$). Введем функцию

$$\lambda(s)=\inf_u[s\varphi_2^2(u)+c\varphi_0^2(u)]\varphi_1^{-2}(u) \quad (u\in U) \tag{2.4}$$

Потребуем, чтобы сжимающее усилие удовлетворяло неравенству $P<\lambda(1-|r_1|)$. Поскольку $\lambda(0)=0$ и функция $\lambda(s)$ непрерывна, то существует такое s_0, $0<s_0<1-|r_1|$, что $P=\lambda(s_0)$. Отсюда и из (2.4) следует неравенство

$$\varphi_{2t}^2(y)+c\varphi_{0t}^2(y)\geqslant(1-s_0)\varphi_{2t}^2(y)+P\varphi_{1t}^2(y)$$

Из этой оценки и (2.3) имеем

$$(1-s_0)\varphi_{2t}^2(y)\leqslant\varphi_{2t}(y)\int\limits_0^t r_1(t,\tau)\varphi_{2\tau}(y)\,d\tau+\varphi_0(q)\varphi_{0t}(y) \tag{2.5}$$

Для оценки $\varphi_{0t}(y)$ через $\varphi_{2t}(y)$ введем параметр λ_0:

$$\lambda_0^2=\inf_u\varphi_2^2(u)\varphi_0^{-2}(u) \tag{2.6}$$

Согласно (2.6), найдем $\varphi_{0t}(y)\leqslant\lambda_0^{-1}\varphi_{2t}(y)$. Из этого неравенства и (2.5) получим

$$(1-s_0)\varphi_{2t}(y)\leqslant|r_1|z_2(t)+\lambda_0^{-1}\varphi_0(q)$$

$$z_i(t)=\sup_\tau\varphi_{i\tau}(y)\quad(0\leqslant\tau\leqslant t)$$

Таким образом, имеем

$$(1-s_0-|r_1|)z_2(t)\leqslant\lambda_0^{-1}\varphi_0(q) \tag{2.7}$$

Согласно граничным условиям (1.3)–(1.6), существует такая постоянная $C>0$, что

$$|y(t,x)|\leqslant C\varphi_{2t}(y) \tag{2.8}$$

Из соотношений (2.7), (2.8) следует

Теорема 1. При выполнении неравенства $P<\lambda(1-|r_1|)$ вязкоупругий стержень на винклеровском основании устойчив на бесконечном интервале времени.

Неравенства (2.7), (2.8) позволяют оценить критическое время t_0 и получить условия устойчивости стержня на конечном интервале времени.

Пусть существует такое предельное ядро релаксации $r_0(t,\tau)$, что равномерно по $t\geqslant s$:

$$\lim_s\int\limits_s^t\sup_x|r(t+\rho(x),\tau+\rho(x))-r_0(t,\tau)|\,d\tau=0\qquad(s\to\infty)$$

Используя результаты [4], получим достаточное условие устойчивости в виде $P<\lambda(1-|r_0|)$. Для разностных ядер релаксации это условие устойчивости является также необходимым. Связь критической силы P потери устойчивости вязкоупругого стержня с эйлеровой критической силой $P_0(c)$ потери устойчивости упругого стержня на винклеровском основании с коэффициентом податливости c описывается соотношением $P<(1-|r_0|)\times\times P_0(c/(1-|r_0|))$.

Далее исследуется устойчивость вязкоупругих стержней при других моделях оснований. Поскольку соответствующие доказательства аналогичны доказательству теоремы 1, ограничимся только формулировкой результатов и указанием особенностей доказательств.

3. Стержень на нелинейном гидростатическом основании. Пусть зависимость между реакцией основания q_0 и его осадкой y имеет вид

$$q_0=-f(y),\quad f(0)=0,\quad yf(y)\geqslant0 \tag{3.1}$$

Например, реакция гидростатического основания, воспринимающего сжимающие усилия, но не воспринимающего растягивающие, определяется соотношениями (3.1) с функцией f вида

$$f(y)=cy\ \ (y\geqslant0);\quad f(y)=0\ \ (y<0) \tag{3.2}$$

Приведенная модель (3.1), (3.2) используется при определении реакции оснований в задачах об изгибе железнодорожных шпал и мостов, поддерживаемых понтонами [6]. Условие устойчивости вязкоупругого неоднародно стареющего стержня на основании типа (3.1) имеет вид

$$P < \inf_u \left[(1-|r_0|)\varphi_2^2(u)+\int_0^l u(x)f(u(x))\,dx\right]\varphi_1^{-2}(u) \quad (u\in U) \quad (3.3)$$

4. Стержень на упругом основании общего вида. Если реакция основания q_0 в данной точке линейно зависит от прогибов не только в данной точке, но и в других, то [5]:

$$q_0(t,x)=-\int_0^l G(x,s)\,y(t,s)\,ds \qquad (4.1)$$

Функция влияния G задана и удовлетворяет неравенству

$$\int_0^l\int_0^l G(x,s)\,u(x)\,u(s)\,dx\,ds\geqslant 0 \quad (u\in U) \qquad (4.2)$$

Соотношение (4.2) означает, что для деформации основания должна быть совершена положительная работа. Модель основания (4.1), (4.2) используется для описания реакции грунта для расчета фундаментов конструкций, покрытий автодорог и аэродромов [7]. Методы вычисления функции G приведены в [8], а ее выражения при различных предположениях о характере грунта – в [9].

Условие устойчивости стержня на основании (4.1) имеет вид

$$P<\inf_u \left[(1-|r_0|)\varphi_2^2(u)+\int_0^l\int_0^l G(x,s)\,u(x)\,u(s)\,dx\,ds\right]\varphi_1^{-2}(u) \quad (u\in U) \qquad (4.3)$$

Пусть реакция основания q_0 нелинейно зависит от прогибов:

$$q_0(t,x)=-\int_0^l G(x,s)\,f(y(t,s))\,ds \qquad (4.4)$$

При этом аналогом неравенства (4.2) является условие

$$\int_0^l\int_0^l G(x,s)\,u(x)\,f(u(s))\,dx\,ds\geqslant 0 \quad (u\in U)$$

Стержень на основании типа (4.4) устойчив при

$$P<\inf_u [(1-|r_0|)\varphi_2^2(u)+\int_0^l\int_0^l G(x,s)\,u(x)\,f(u(s))\,dx\,ds]\,\varphi_1^{-2}(u) \quad (u\in U)$$

5. Устойчивость перегородки, разделяющей сосуд с идеальной жидкостью. В некоторых задачах модель линейно-упругого основания используется для изучения воздействия на стержень жидкости или газа. Рассмотрим открытый сосуд в форме прямоугольного параллелепипеда, водяная поверхность которого – прямоугольник ширины a, разделенный вязкоупругой перегородкой на две камеры шириной a_1 и a_2. Камеры заполнены несжимаемой жидкостью. Высота перегородки l достаточно мала, следовательно, неоднородностью давления жидкости на перегородку, вызванной наличием силы тяжести, можно пренебречь. Протяженность перегородки достаточно велика, так что задачу о выпучивании можно рассматривать как плоскую, а перегородку считать стержнем. На перегородку действует сжимающая сила P. При выпучивании перегородки в сторону одной из камер в этой камере повышается уровень жидкости. При этом уровень жидкости в другой камере понижается. Разность уровней создает равномерное давление на перегородку [5]:

$$q_0=-b\int_0^l y(t,x)\,dx,\qquad b=\gamma_0 a(a_1a_2)^{-1} \tag{5.1}$$

где γ_0 — удельный вес жидкости. Реакция жидкости (5.1) представляет собой частный случай реакции линейно-упругого основания общего вида (4.1) при $G(x,s)=b$. Условие устойчивости перегородки, разделяющей сосуд с идеальной несжимаемой жидкостью, имеет вид (4.3) при $G=b$.

6. Стержень на вязкоупругом основании. Рассмотрим модель вязкоупругого основания [10] с реакцией

$$q_0=-c(I-R^\circ)y,\qquad R^\circ y=\int_0^t r^\circ(t,\tau)\,y(\tau,x)\,d\tau \tag{6.1}$$

Здесь ядро релаксации $r^\circ(t,\tau)\geqslant 0$ оператора R° удовлетворяет условию $|r^\circ|<1$. Аналогично (2.3) для прогиба стержня $y(t,x)$ выводится оценка

$$\varphi_{2t}^2(y)+c\varphi_{0t}^2(y)\leqslant Q(t)+P\varphi_{1t}^2(y)+\varphi_0(q)\varphi_{0t}(y)$$

$$Q=\varphi_{2t}(y)\int_0^t r_1(t,\tau)\varphi_{2\tau}(y)\,d\tau+c\varphi_{0t}(y)\int_0^t r^\circ(t,\tau)\varphi_{0\tau}(y)\,d\tau \tag{6.2}$$

Различные условия устойчивости получим в зависимости от способа оценки Q. Пусть, например, $|n_1|<1$, где $n_1=r_1(t,\tau)+c\lambda_0^{-2}r^\circ(t,\tau)$. Тогда, согласно (2.6), имеем

$$Q\leqslant\varphi_{2t}(y)\int_0^t n_1(t,\tau)\varphi_{2\tau}(y)\,d\tau$$

Из этого неравенства и (6.2) следует, подобно доказательству теоремы 1, что условие устойчивости имеет вид (3.3), в котором величину r_0 следует заменить на n_1, а величину $f(u)$ — на cu.

Для получения иного условия устойчивости введем функцию

$$n_s(t,\tau)=\max\,[r_1(t,\tau)+cs\lambda_0^{-2}r^\circ(t,\tau),\quad (1-s)r^\circ(t,\tau)]\quad(0\leqslant s\leqslant 1)$$

и положим $|n|=\min_s|n_s|$. С помощью (2.6) функцию Q оценим следующим образом:

$$Q\leqslant\int_0^t n_s(t,\tau)\,[\varphi_{2t}^2(y)+c\varphi_{0t}^2(y)]^{1/2}[\varphi_{2\tau}^2(y)+c\varphi_{0\tau}^2(y)]^{1/2}\,d\tau$$

Предположим, что $|n|<1$. Тогда стержень на вязкоупругом основании (6.1) устойчив при $P<(1-|n|)\lambda_1$, где $\lambda_1=\inf_u[\varphi_2^2(u)+c\varphi_0^2(u)]\varphi_1^{-2}(u)$ $(u\in U)$.

Аналогичным образом устанавливается условие устойчивости $P<(1-|n_0|)\lambda_1$, где $n_0(t,\tau)=\max\,[r_1(t,\tau),\ r^\circ(t,\tau)]$. Если стержень упругий, то требования $|n_0|<1$ и $|r^\circ|<1$ эквивалентны. При $|r^\circ|<1$ получим следующее условие устойчивости упругого стержня на вязкоупругом основании (6.1):

$$P<\inf_u[\varphi_2^2(u)+c(1-|r^\circ|)\varphi_0^2(u)]\varphi_1^{-2}(u)\quad(u\in U)$$

Для разностных ядер r° это условие является и необходимым.

Приведем условия устойчивости вязкоупругого стержня, для материала которого существует предельное ядро релаксации $r_0(t,\tau)$. Представим уравнение равновесия (1.2) в виде

$$y^{\mathrm{IV}}+P(I+K_0)y''+c(I+W)y=(I+K_0)q+(I+K_0)[(R-R_0)y'']'' \tag{6.3}$$

Здесь R_0 — оператор с ядром r_0 из (2.9), K_0 — соответствующий оператор ползучести с ядром $k_0(t, \tau)$, ядро $w(t, \tau)$ оператора $W=(I+K_0)\times\times(I-R^\circ)-I$ определяется по формуле

$$w=k_0(t,\tau)-r^0(t,\tau)-\int_\tau^t k_0(t,s)r^\circ(s,\tau)\,ds$$

Из уравнения (6.3), подобно (2.3), получим

$$\varphi_{2t}^2(y)+c\varphi_{0t}^2(y)\leqslant P\varphi_{1t}^2(y)+Q_1(t)+Q_2(t)+ +(1+|k_0|)\varphi_0(q)\varphi_{0t}(y)$$

Здесь использованы обозначения

$$Q_1=P\varphi_{1t}(y)\int_0^t k_0(t,\tau)\varphi_{1\tau}(y)\,d\tau+c\varphi_{0t}(y)\int_0^t |w(t,\tau)|\varphi_{0\tau}(y)\,d\tau$$

$$Q_2=\int_0^l |y''(I+K_0)(R-R_0)y''|\,dx$$

Введем параметр λ_2 по формуле $\lambda_2=\inf_u\varphi_1^2(u)\varphi_0^{-2}(u)$, $u\in U$. Оценивая величины Q_1 и Q_2, получим следующее условие устойчивости стержня на вязкоупругом основании: $P<\lambda_1(1-c|w|\lambda_1\lambda_2^{-1})(1+|k_0|)^{-1}$.

7. Устойчивость стержней при нежестком закреплении концов. Приведенный выше метод позволяет исследовать устойчивость стержня при условиях на концах, отличных от (1.3) — (1.6). Приведем их сначала для случая, когда основание отсутствует, причем конец $x=0$ стержня жестко защемлен, а конец $x=l$ упруго опирается [5]. Граничные условия имеют вид (μ — коэффициент жесткости опоры):

$$y(t,0)=y'(t,0)=0,\ M(t,l)=0,\ M'(t,l)+Py'(t,l)=\mu y(t,l) \qquad (7.1)$$

Рассматриваемый стержень устойчив, если

$$P<\inf_u[(1-|r_0|)\varphi_2^2(u)+\mu u^2(l)]\varphi_1^{-2}(u)\quad (u\in U_1)$$

Функции $u(x)$ из множества U_1 удовлетворяют условиям $u(0)=u'(0)=0$. Если конец $x=0$ стержня жестко защемлен, а конец $x=l$ упруго защемлен со свободным поступательным перемещением [5], то $M(t,l)=-\nu y'(t,l)$, $M'(t,l)+Py'(t,l)=0$ (ν — коэффициент жесткости опоры) и условие устойчивости принимает вид

$$P<\inf_u[(1-|r_0|)\varphi_2^2(u)+\nu(u'(l))^2]\varphi_1^{-2}(u)\quad (u\in U_1)$$

Пусть конец $x=0$ стержня жестко защемлен, а на конце $x=l$ задан изгибающий момент $f_1(y(t,l),\ y'(t,l))$ и перерезывающая сила $f_2(y(t,l),\ y'(t,l))$, причем $f_1(0,0)=0$, $f_2(0,0)=0$ и $A=u(l)f_2(u(l),\ u'(l))-u'(l)\times\times f_1(u(l),\ u'(l))\geqslant 0$. Последнее требование означает, что для деформации опоры необходимо совершить неотрицательную работу. Тогда условие устойчивости имеет вид: $P<\inf_u[(1-|r_0|)\varphi_2^2(u)+A(u(l),\ u'(l))]\varphi_1^{-2}(u)$ $(u\in U_1)$.

Пусть теперь стержень находится на основании. Тогда при определении критической нагрузки в соответствующее неравенство следует включить слагаемые, отвечающие реакции основания и реакции податливой опоры. Приведем в качестве примера условие устойчивости вязкоупругого стержня на гидростатическом основании (2.1) один конец которого жестко защемлен, а другой — упруго опирается (7.1):

$$P<\inf_u[(1-|r_0|)\varphi_2^2(u)+c\varphi_0^2(u)+\mu u^2(l)]\varphi_1^{-2}(u)\quad (u\in U_1).$$

8. Устойчивость армированного стержня. Пусть поперечное сечение стержня имеет две оси симметрии и арматура расположена симметрично относительно этих осей. Момент инерции арматуры обозначим J_a. Армирующий материал является упругим с модулем упругой деформации E_a. При одноосном напряженном состоянии связь между деформацией ε и напряжением σ_a в арматуре подчиняется закону Гука $\sigma_a=E_a\varepsilon$. Из гипотезы плоских сечений следует, что изгибающий момент M и кривизна оси стержня y'' связаны соотношением $M=EJ_0(I-\beta R)y''$, где $J_0=(EJ+E_aJ_a)/E$, $\beta=J/J_0$. Сравнивая приведенное соотношение с (1.2), получим, что условия устойчивости армированного вязкоупругого стержня совпадают с условиями устойчивости неармированного стержня, у которого жесткость на изгиб равна EJ_0, а ядро релаксации равно $\beta r(t, \tau)$.

9. **Численный пример.** В п. 2 развит подход, позволяющий оценить критическое время t_0 для стержня на податливом основании. Однако соответствующие оценки критического времени получаются весьма заниженными и для исследования устойчивости на конечном интервале времени конкретных конструкций целесообразно провести численный анализ. Для описания влияния возраста материала на критическое время потери устойчивости получено численное решение уравнения (1.2) для неармированного стержня прямоугольного поперечного сечения, изготовленного из материала с ядром ползучести вида [1]: $k(t, \tau)=-E(\partial/\partial\tau)[A_1+A_2/\tau)(1-\exp(-\gamma(t-\tau)))]$ при следующих значениях параметров: $l=10$ м, $J=1{,}6\cdot10^{-5}$ м^4, $E=2\cdot10^4$ МПа, $A_1=0{,}234\cdot10^{-4}$ МПа$^{-1}$, $A_2=1{,}85\cdot10^{-4}$ МПа$^{-1}\cdot$сут, $\gamma=0{,}04$ сут$^{-1}$. Стержень лежит на винклеровском гидростатическом основании с коэффициентом податливости $c=1{,}6\cdot10^{-3}$ МПа. Концы стержня шарнирно закреплены. На стержень действует сжимающая сила $P=3{,}2\cdot10^5$ Н и поперечная распределенная нагрузка постоянной интенсивности $q=3{,}2\cdot10^3$ Нм$^{-1}$. Стержень состоит из двух равных однородных частей. Возраст первой части в момент приложения внешней нагрузки равен 3 сут, возраст второй части при расчетах изменялся от 3 до 30 сут. Результаты расчетов показывают, что при увеличении разности возрастов частей стержня $\Delta\rho$ критическое время возрастает, причем тем интенсивнее, чем больше значение критического прогиба. Так, например, при $y_0=0{,}015$ м величина t_0 равна 6 сут при $\Delta\rho=0$ и равна 9 сут при $\Delta\rho=27$ сут. Увеличение критического времени составляет 50%. При значении критического прогиба $y_0=0{,}023$ м величина t_0 составляет 24 сут при $\Delta\rho=0$ и 43 сут при $\Delta\rho=27$ сут. Увеличение критического времени составляет около 80%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука. 1983. 336 с.
2. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Об устойчивости неоднородно стареющих вязкоупругих стержней // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 709–721.
3. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Об устойчивости неоднородно вязкоупругих армированных стержней // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1110–1120.
4. *Дроздов А. Д., Колмановский В. Б., Потапов В. Д.* Устойчивость стержней из неоднородно стареющего вязкоупругого материала // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 177–187.
5. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат. 1955. 476 с.
6. *Саусвелл Р. В.* Введение в теорию упругости. М.: Изд-во иностр. лит. 1948. 675 с.
7. *Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А.* Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат. 1973. 627 с.
8. *Попов Г. Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев: Вища шк. 1982. 167 с.
9. *Серебряный Р. В.* Расчет тонких шарнирно соединенных плит на упругом основании. М.: Госстройиздат. 1962. 64 с.
10. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат. 1968. 416 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.XII.1984