

УДК 539.3:534.1

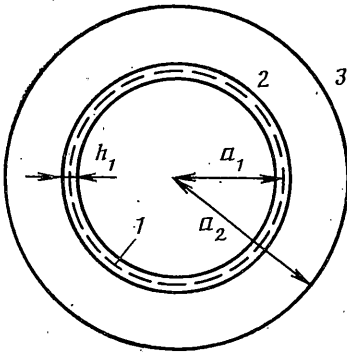
**КРИТИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКИ  
В ТОННЕЛЕ, ПОДКРЕПЛЕННОМ ДВУХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКОЙ**

АЛЕКСЕЕВА Л. А., УКРАИНЕЦ В. Н.

Поведение тонкой бесконечно длинной цилиндрической оболочки, взаимодействующей по своей наружной поверхности с мягким амортизирующим слоем, при воздействии осесимметричной подвижной нагрузки рассмотрено в [1]. Исследовано влияние жесткости амортизирующего слоя на величину критической скорости при скользящем контакте между оболочкой и слоем.

В публикуемой работе определяется критическая скорость нагрузки как точка бифуркации, при переходе через которую нарушается единственность решения задачи. Возникающий класс решений характеризуется наличием незатухающих гармонических поверхностных волн. Приведены результаты численных расчетов влияния параметров амортизирующего слоя, отделяющего тонкую цилиндрическую оболочку от упругой среды, и условий контакта на величину критической скорости.

1. Рассмотрим в упругом пространстве полость радиуса  $r=a_2$ , подкрепленную тонкой цилиндрической оболочкой, контактирующей по наружной поверхности с амортизирующим слоем. Радиус срединной поверхности оболочки —  $r=a_1$ , толщина —  $h_1$ . Ввиду малости  $h_1$  считаем, что тонкостенная оболочка взаимодействует с амортизирующим слоем при  $r=a_1$ . На фиг. 1 цифрой 1 обозначена оболочка, 2 — амортизирующий слой, 3 — окружающее пространство.



Фиг. 1

В осевом направлении оболочки по ее внутренней поверхности с постоянной скоростью  $s$  движется осесимметричная нормальная нагрузка  $P$ . Механические свойства материала оболочки, слоя и окружающей среды характеризуются упругими постоянными:  $\nu_j$ ,  $\mu_j$ ,  $\rho_j$ ,  $j=1, 2, 3$ . Здесь  $\nu_j$  — коэффициент Пуассона,  $\mu_j$  — модуль сдвига,  $\rho_j$  — плотность. Индекс 1 относится к параметрам тонкой оболочки, 2 — амортизирующего слоя, 3 — среды.

Исследуем влияние параметров амортизирующего слоя на величину критической скорости. Для описания движения тонкой оболочки используем классические уравнения теории тонких оболочек [3], которые в подвижной системе координат  $r$ ,  $\eta=(x-ct)/a_2$  примут вид

$$\begin{aligned} (1-b_{03})\partial^2 u_1/\partial\eta^2 + \gamma\nu_1\partial w_1/\partial\eta &= -b_{01}p_\eta & (1.1) \\ \gamma\nu_1\partial u_1/\partial\eta + b_{02}\partial^4 w_1/\partial\eta^4 + b_{03}\partial^2 w_1/\partial\eta^2 + \gamma w_1 &= b_{01}(p-p_r) \\ b_{01} &= 1/2(1-\nu_1)a_2^2\mu_1^{-1}h_1^{-1}, \quad b_{02} = 1/12h_1^2a_2^{-2} \\ b_{03} &= 1/2(1-\nu_1)\rho_1c^2\mu_1^{-1}, \quad \gamma = a_2/a_1 \end{aligned}$$

а для описания движения амортизирующего слоя и среды воспользуемся уравнениями теории упругости:

$$\begin{aligned} (\lambda_j + 2\mu_j)\partial\theta_j/\partial r + 2\mu_j a_2^{-1}\partial\omega_{\varphi j}/\partial\eta &= \rho_j(c^2/a_2^2)\partial^2 w_j/\partial\eta^2 \\ a_2^{-1}(\lambda_j + 2\mu_j)\partial\theta_j/\partial\eta - 2\mu_j r^{-1}\partial(r\omega_{\varphi j})/\partial r &= \rho_j(c^2/a_2^2)\partial^2 u_j/\partial\eta^2 \quad (j=2, 3) & (1.2) \end{aligned}$$

Здесь  $x, r$  — осевая и радиальная координаты,  $u_k, w_k$  — осевые и радиальные перемещения ( $k=1, 2, 3$ ),  $p_n, p_r$  — составляющие реакции амортизирующего слоя.

Если контакт между оболочкой и амортизирующим слоем жесткий, а между средой и слоем — скользящий, то

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2, \quad w_1 = w_2 \quad \text{при } r = a_1 \\ w_2 &= w_3, \quad [\sigma_r]_2 = [\sigma_r]_3, \quad [\tau_{r\eta}]_2 = [\tau_{r\eta}]_3 = 0 \quad \text{при } r = a_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $[\tau_{r\eta}]_j, [\sigma_r]_j$  — касательные и нормальные напряжения в амортизирующем слое и среде ( $j=2, 3$ ). При скользящем контакте первое уравнение в (1.3) заменяется на  $[\tau_{r\eta}]_2 = 0$ .

Таким образом, решение задачи сводится к совместному интегрированию уравнений движения оболочки (1.1), амортизирующего слоя и окружающей среды (1.2) при выполнении условий контактов (1.3).

Введем потенциальные функции [1, 4]:

$$\begin{aligned} u_j &= a_2^{-1} \partial \varphi_j / \partial \eta + \partial^2 \psi_j / \partial r^2 + r^{-1} \partial \psi_j / \partial r \\ w_j &= \partial \varphi_j / \partial r - a_2^{-1} \partial^2 \psi_j / \partial r \partial \eta \quad (j=2, 3) \end{aligned} \quad (1.4)$$

которые будут решениями (1.2), если  $\varphi_j, \psi_j$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_j &= (M_j^2 / a_2^2) \partial^2 \varphi_j / \partial \eta^2, \quad \nabla^2 \psi_j = (M_{sj}^2 / a_2^2) \partial^2 \psi_j / \partial \eta^2 \\ M_j &= c / c_{\rho j}, \quad M_{sj} = c / c_{sj}, \quad c_{\rho j} = \sqrt{(\lambda_j + 2\mu_j) / \rho_j} \\ c_{sj} &= \sqrt{\mu_j / \rho_j}, \quad \nabla^2 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r + a_2^{-2} \partial^2 / \partial \eta^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $c_{\rho j}, c_{sj}$  — скорости распространения волн расширения — сжатия и сдвига в амортизирующем слое и среде.

Применив к (1.1) преобразование Фурье по  $\eta$ , находим

$$u_1^* = b_1 p_{\eta}^* + i b_2 p_r^* - i b_2 p_r^*, \quad w_1^* = i b_2 p_{\eta}^* + b_3 p_r^* - b_3 p_r^* \quad (1.6)$$

$$u_1^*(\xi, r) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\eta, r) \exp(-i\xi\eta) d\eta, \quad i^2 = -1$$

$$\begin{aligned} b_1 &= -b_{01} D^{-1} (b_{02} \xi^2 - b_{03} + \xi^{-2} \gamma^2), \quad b_2 = b_{01} v_1 D^{-1} \xi^{-1} \gamma \\ b_3 &= b_{01} D^{-1} (1 - b_{03}), \quad D = (b_{03} - 1) (b_{02} \xi^4 - b_{03} \xi^2 + \gamma) + v_1^2 \gamma^2 \\ p_{\eta}^* &= [\tau_{r\eta}^*]_2|_{r=a_1}, \quad p_r^* = -[\sigma_r^*]|_{r=a_1} \end{aligned}$$

Для (1.5) преобразование Фурье дает

$$\begin{aligned} \partial^2 \varphi_j^* / \partial r^2 + r^{-1} \partial \varphi_j^* / \partial r &= m_j^2 \xi_0^2 \varphi_j^* \\ \partial^2 \psi_j^* / \partial r^2 + r^{-1} \partial \psi_j^* / \partial r &= m_{sj}^2 \xi_0^2 \psi_j^* \end{aligned} \quad (1.7)$$

Если скорость нагрузки меньше скоростей распространения волн сдвига в амортизирующем слое и среде,  $m_j^2 > 0$  и  $m_{sj}^2 > 0$ , решения (1.7) записываются в виде

$$\begin{aligned} \varphi_2^* &= A_1 K_0(k_1 r) + A_2 I_0(k_1 r), \quad \psi_2^* = i A_3 K_0(k_2 r) + i A_4 I_0(k_2 r) \\ \varphi_3^* &= A_5 K_0(k_3 r), \quad \psi_3^* = i A_6 K_0(k_4 r) \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $I_0(z), K_0(z)$  — функции Бесселя первого и второго рода от мнимого аргумента,  $k_1 = m_2 |\xi_0|$ ,  $k_2 = m_{s2} |\xi_0|$ ,  $k_3 = m_3 |\xi_0|$ ,  $k_4 = m_{s3} |\xi_0|$ .

Применяя к выражениям для определения напряжений и перемещений в амортизирующем слое и среде преобразование Фурье по  $\eta$ , можно получить с учетом (1.8), выражения для их трансформант.

Определим постоянные  $A_k$  ( $k=1, 2 \dots 6$ ) из граничных условий (1.3). Из последнего условия

$$A_6 = -(2k_3 K_1(k_3 a_2) / (k_4 \xi_0 (1 + m_{s3}^2) K_1(k_4 a_2))) A_5$$

Подставив в (1.3) соответствующие выражения, получаем систему алгебраических уравнений для определения остальных констант  $[q]$  — матрица  $5 \times 5$  с элементами

$$\begin{aligned} [q] \{A\} &= \{P^*\} \quad q_{11} = f_2 d_1 - f_1 d_2, \quad q_{12} = -f_2 d_1 - f_3 d_2, \quad q_{13} = f_6 d_3 - f_5 d_4, \\ q_{14} &= -f_8 d_3 - f_7 d_4, \quad q_{21} = -f_2 d_5 - f_1 \varepsilon_1, \quad q_{22} = f_4 d_5 - f_3 \varepsilon_1, \quad q_{23} = -f_6 d_6 - 2f_5 m_{s2}^2, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}
q_{24} &= f_8 d_6 - 2f_7 m_{e2}^2, & q_{31} &= -q_{32} = -m_2, & q_{33} &= -q_{34} = -m_{e2}, & q_{35} &= -m_3 M_{e3}^2 / n_3, \\
q_{41} &= -q_{42} = -2m_2, & q_{43} &= -q_{44} = -n_2, & q_{51} &= f_9 e_1 + 2m_2 \xi^{-1}, & q_{52} &= f_{10} e_1 - 2m_2 \xi^{-1}, \\
q_{15} &= q_{25} = q_{45} = 0, & q_{53} &= 2(f_{11} + m_{e2}^{-1} \xi^{-1}) m_{e2}^2, & q_{54} &= (f_{12} - m_{e2}^{-1} \xi^{-1}) 2m_{e2}^2, \\
q_{55} &= (f_{14} 4m_3 m_{e3} / n_3 - f_{13} n_3 + 2m_3 M_{e3}^2 n_3^{-1} \xi^{-1}) \mu_3 / \mu_2 \\
n_1 &= 1 + m_{e2}^2, & n_2 &= m_{e2} n_1, & n_3 &= 1 + m_{e3}^2, & \varepsilon_1 &= 2 - \rho_2 \mu_3 M_{e3}^2 / (\rho_3 \mu_2) \\
d_1 &= -2m_2 (b_2^{-1} b_1 + (1 + \chi) \xi^{-1}), & d_2 &= a_2 / (\mu_2 b_2 \xi) + \varepsilon_1, \\
d_3 &= -m_{e2} (b_1 b_2^{-1} n_1 + 2(1 + \chi) \xi^{-1}) & d_4 &= m_{e2}^2 (a_2 / (\mu_2 b_2 \xi) + 2), \\
d_5 &= m_2 (2(1 + \chi) \xi^{-1} - 2b_2 b_3^{-1} - a_2 / (\mu_2 b_3 \xi)) \\
d_6 &= m_{e2} (2(1 + \chi) \xi^{-1} - n_1 b_2 b_3^{-1} - a_2 / (\mu_2 b_3 \xi)); & \chi &= h_2 / a_1 \\
f_1 &= K_0(k_1 a_1) / K_1(k_1 a_2), & f_2 &= K_1(k_1 a_1) / K_1(k_1 a_2), & f_3 &= I_0(k_1 a_1) / I_1(k_1 a_2) \\
f_4 &= I_1(k_1 a_1) / I_1(k_1 a_2), & f_{i1} &= K_0(k_1 a_2) / K_1(k_1 a_2) \quad (i=3, 4).
\end{aligned}$$

Здесь компоненты  $f_5 - f_8$  получаются соответственно из  $f_1 - f_4$  заменой  $k_1$  на  $k_2$ ;  $f_9 - f_{12}$  - из  $f_1, f_3, f_5, f_7$  заменой  $a_1$  на  $a_2$ ,  $\{A\}$  - вектор-столбец, элементами которого являются коэффициенты:

$$\begin{aligned}
A_1' &= A_1 K_1(k_1 a_2), & A_2' &= A_2 I_1(k_1 a_2), & A_3' &= A_3 K_1(k_2 a_2) \xi_0, & A_4' &= A_4 I_1(k_2 a_2) \xi_0, \\
A_5' &= A_5 K_1(k_3 a_2), & \{P^*\} &= \{p^* / (\mu_2 \xi_0^2), p^* / (\mu_2 \xi_0^2), 0, 0, 0\} = \{p_1^*, \dots, p_5^*\}
\end{aligned}$$

Если имеет место скользящий контакт при  $r = a_1$ , то  $q_{11} = -2m_2 f_2$ ,  $q_{12} = 2m_2 f_4$ ,  $q_{13} = -n_2 f_6$ ,  $q_{14} = n_2 f_8$ ,  $p_1^* = 0$ . Решение системы (1.9) представимо в виде

$$A_k' = \Delta_k / \det[q] \quad (k=1, \dots, 5) \quad (1.10)$$

Определитель  $\Delta_k$  получается из  $\det[q]$  заменой  $k$ -го столбца столбцом  $\{P^*\}$ .

Определив  $A_k'$ , можно получать трансформанты компонент напряжений и перемещений, а затем, используя формулы обращения для преобразования Фурье, их оригиналы.

Так, при кольцевой нагрузке имеем

$$w|_{r=a_2} = - \frac{P_0 a_2}{\pi \mu_2} q_{35} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_5 \cos \xi \eta}{\det[q]} d\xi \quad (1.11)$$

$P_0$  - интенсивность нагрузки.

2. Определитель матрицы  $[q]$  - симметричная относительно  $\xi$  функция, зависит от скорости движущейся нагрузки. Обозначим его  $\Delta(\xi, c)$ . В общем случае для любых  $\xi$  аналитическое исследование  $\Delta(\xi, c)$  затруднительно. Численные исследования  $\Delta(\xi, c)$  в широком диапазоне  $\xi$  для разных значений  $c$  ( $c < \min c_{sj}$ ) показали (п. 3), что может существовать критическая скорость  $c = c_*$ , при которой в двух точках  $\pm \xi^*$  ( $\xi^* > 0$ )

$$\Delta(\xi^*, c) = 0, \quad \Delta_\xi'(\xi^*, c) = 0 \quad (2.1)$$

При  $0 < c < c_*$   $\Delta(\xi, c) \neq 0$  для любых  $\xi \in (-\infty, \infty)$ . В этом случае для решения задачи допустимо прямое и обратное преобразование Фурье. Потенциалы можно представить в виде

$$\varphi_i(\eta, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i^*(\xi, r) e^{i\xi\eta} d\xi, \quad \psi_j(\eta, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j^*(\xi, r) e^{i\xi\eta} d\xi \quad (2.2)$$

которые описывают затухающие при  $(\eta^2 + r^2)^{1/2} \rightarrow \infty$  волны.

При  $c = c_*$  подынтегральные функции в (2.2) имеют полюса второго порядка в точках  $\pm \xi^*$  и интегралы (2.2) становятся расходящимися. При  $c > c_*$  существуют четыре особые точки  $\pm \xi^{(1)}, \pm \xi^{(2)}$ , в которых

$$\Delta(\pm \xi^{(i)}, c) = 0, \quad \Delta_\xi'(\pm \xi^{(i)}, c) \neq 0 \quad (i=1, 2) \quad (2.3)$$

На действительной оси  $\xi_1$  комплексной плоскости  $\xi = \xi_1 + i\xi_2$  подынтегральные функции в (2.2) имеют по четыре полюса первого порядка. Интегралы существуют только в смысле главного значения. Условия существования преобразования Фурье не выполнены, и все операции, проводимые над уравнениями и интегралами, становятся формальными.

Для отыскания решения при  $c > c_*$  поступим следующим образом. В соотношениях (2.2) трансформируем контур интегрирования  $(-\infty, \infty)$  в  $L_\varepsilon$  так, чтобы он всюду совпадал с действительной осью  $\xi_1$ , за исключением особых точек  $\pm \xi^{(1)}, \pm \xi^{(2)}$ , которые следует обойти, например, по  $\varepsilon$ -по-

дуокружностям в верхней или нижней полуплоскости — в зависимости от области аналитичности  $\eta$ -преобразования Фурье действующей нагрузки  $P(\eta)$ . По условию  $P(\eta)$  представлено в виде

$$P(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) e^{i\xi\eta} d\xi$$

Допустим, что  $p^*(\xi)$  аналитична в некоторой полосе  $|\operatorname{Im} \xi| < N$ ,  $N > \varepsilon$ . (Этому условию удовлетворяет преобразование Фурье функции  $P(\eta)$  с ограниченным носителем, либо экспоненциальным затуханием при  $|\eta| \rightarrow \infty$ .) Вообще говоря, достаточно, чтобы  $p^*(\xi)$  допускало аналитическое продолжение в окрестности особых точек  $\xi^{(l)}$ .

В силу аналитичности  $p^*(\xi)$  контур  $-\infty < \xi_1 < \infty$  можно трансформировать в  $L_\varepsilon$ . В таком же виде представим решение задачи

$$\varphi_j(\eta, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_\varepsilon} \varphi_j^*(\xi, r) e^{i\xi\eta} d\xi, \quad \psi_j(\eta, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_\varepsilon} \psi_j^*(\xi, r) e^{i\xi\eta} d\xi. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в уравнения движения (1.5) и граничные условия (1.3), группируя множители при  $e^{i\xi\eta}$  и приравнявая их в силу произвольности  $\eta$  нулю, получим те же соотношения (1.8), (1.9) для определения  $\varphi_j^*$ ,  $\psi_j^*$ .

Заметим, что на  $L_\varepsilon$  в аргументе модифицированных функций Бесселя следует брать вместо  $|\xi|$  функции  $\xi$  при  $\xi_1 \geq 0$  и  $(-\xi)$  при  $\xi_1 < 0$ . В этом случае подынтегральные функции для внешней среды ( $j=3$ ) удовлетворяют условиям излучения при  $r \rightarrow \infty$ , непрерывны и дифференцируемы на  $L_\varepsilon$ , а соотношения (2.4) допускают операцию дифференцирования под знаком интеграла. Поскольку при  $p^*(\xi)$ , аналитичных в полосе, возможны два направления обхода полюса (по часовой и против часовой стрелки), получим несколько разных решений одной и той же задачи. Пользуясь свойствами аналитических функций, можно представить (2.4) в виде

$$\varphi_j(\eta, r) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j^*(\xi, r) e^{i\xi\eta} d\xi + \frac{i}{2} \sum_{l=1}^4 (\pm \operatorname{Res} \varphi_j^*(\lambda^{(l)}, r)) e^{i\xi^{(l)}\eta}. \quad (2.5)$$

Здесь  $\operatorname{Res} \varphi_j^*(\xi^{(l)}, r)$  — вычет  $\varphi_j^*$  в точке  $\xi^{(l)}$  при фиксированном  $r$ ,  $\xi^{(l)} = -\xi^{(l-2)}$  ( $l=3, 4$ ). Верхний знак соответствует обходу  $\xi^{(l)}$  в нижней полуплоскости  $\operatorname{Im} \xi < 0$ , нижний — в полуплоскости  $\operatorname{Im} \xi > 0$ .

При  $c = c_*$  точки  $\xi^{(1)}$  и  $\xi^{(2)}$  сливаются в одну  $\xi^*$ . Решение также имеет вид (2.4) и приводится к формуле

$$\begin{aligned} \varphi_j(\eta, r) = & \frac{1}{2\pi} \operatorname{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \varphi_j^*(\xi, r) - \frac{a(\xi^* \operatorname{sgn} \xi, r)}{(\xi - \xi^* \operatorname{sgn} \xi)^2} \right) e^{i\xi\eta} d\xi + \\ & + \frac{i}{2} \sum_{l=1,3} \exp(i\xi^{(l)}\eta) (\operatorname{Res} \varphi_j^*(\xi^{(l)}, r)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь  $a(\xi^{(l)}, r)$  — коэффициент при  $1/(\xi - \xi^{(l)})^2$  в лорановском разложении функции  $\varphi_j^*(\xi, r)$  в окрестности точки  $\xi^{(l)} = \pm \xi^*$ .

Таким образом, при скоростях не ниже критической:  $c \geq c_*$ ,  $c < \min c_{sj}$  ( $i=2, 3$ ) — нарушены условия единственности решения, что можно трактовать как неустойчивость. При переходе через  $c_*$  появляется класс решений, содержащий незатухающие гармонические поверхностные волны. Действительно, внеинтегральные слагаемые в (2.5), (2.6) — это гармонические волны частоты  $\omega_l = c\xi^{(l)}$  по времени, период которых по  $x$  равен  $2\pi/\xi^{(l)}$ . Амплитуда этих волн зависит от действующей нагрузки, постоянна вдоль оси  $x$  и экспоненциально затухает при  $r \rightarrow \infty$ . Интегралы в (2.5), (2.6) соответствуют затухающим при  $\sqrt{\eta^2 + r^2} \rightarrow \infty$  волнам.

N	$h_2/a_1$	$c_*$	$M_{s_1}$	$M_{s_2}$	$M_{s_3}$
1	0,4	399	0,497	0,665	0,396
		412	0,513	0,687	0,409
2	1,0	370	0,461	0,617	0,368
		380	0,474	0,633	0,378
3	0,1	899	1,12	0,36	0,893
		905	0,128	0,362	0,899
4	0,2	989	1,234	0,396	0,984

Значение параметра задачи  $c=c_*$  можно характеризовать как точку бифуркации решения, при переходе через которую возникает неустойчивость движения.

Заметим, что точка бифуркации существует, если рассмотреть цилиндрическую оболочку в упругой среде под действием подвижной нагрузки. Решение этой задачи приведено в [2, 5]. Там же из условия типа (2.1) определена критическая скорость нагрузки, приведены числовые результаты. Но класс решений при  $c > c_*$  описан не точно: упущены поверхностные волны, вследствие чего не было замечено возникновения неустойчивости. Этот факт может оказаться существенным для практики строительства подземных сооружений и требует экспериментальной проверки.

3. В качестве примера рассмотрим тонкую цилиндрическую бетонную оболочку радиуса  $r=a_1=1$  м, толщины  $h_1=0,02$  м, контактирующую с амортизирующим слоем толщины  $h_2$ , находящуюся на большой глубине в алевролите. Для бетона и алевролита:  $\nu_1=0,25$ ,  $\mu_1=4,508 \times 10^3$  МПа,  $\rho_1=7,0 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_{s1}=802,5$  м/с,  $\nu_3=0,2$ ,  $\mu_3=2,532 \times 10^3$  МПа,  $\rho_3=2,5 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_{s3}=1006,38$  м/с.

На фиг. 2 построены кривые, соответствующие уравнению  $\Delta(\xi, c)=0$ , для оболочки без амортизирующего слоя (кривая 1); с амортизирующим слоем (песок средней плотности:  $\nu_2=0,365$ ,  $\mu_2=6,12 \times 10^2$  МПа,  $\rho_2=1,7 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_{s2}=600$  м/с — сплошные и штриховые кривые 2, 3); сплошные кривые 2, 3 построены для  $h_2/a_1=0,4$ ; 1,0 при скользящем контакте, штриховые кривые 2, 3 — для тех же соотношений при жестком контакте. Кривые 4, 5 — для  $h_2/a_1=0,1$  и  $h_2/a_1=0,2$ , когда амортизирующим слоем являются плотные известняки (контакт между оболочкой и слоем скользящий). Для плотных известняков:  $\nu_2=0,381$ ,  $\mu_2=1,437 \times 10^4$  МПа,  $\rho_2=2,3 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_{s2}=2500,43$  м/с.

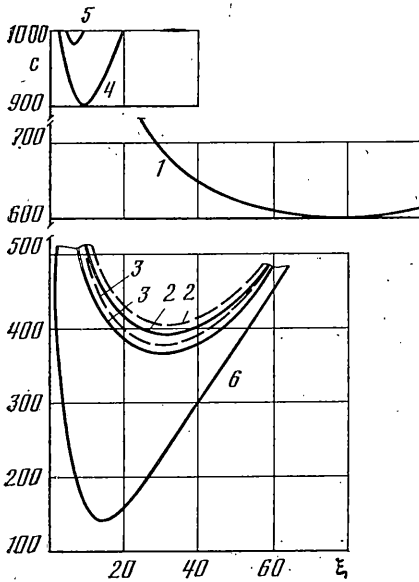
Кривая 6 возникает во всех случаях, когда контакт между оболочкой и слоем жесткий, и описывается уравнением  $D=0$ . Можно показать, что поведение этой кривой не зависит от параметров амортизирующего слоя и среды, а подынтегральные функции имеют на ней устранимые особенности. Поэтому кривая 6 не определяет критическую скорость.

Результаты исследования приведены в таблице. Первые две строчки соответствуют случаю, когда материал амортизирующего слоя — песок средней плотности; строки 3, 4 — плотные известняки. Численные значения в числителе — получены для скользящего контакта, а в знаменателе — жесткого контакта. В третьей колонке приведены значения критической скорости (м/с), в последних трех колонках — числа Маха при  $c=c_*$ .

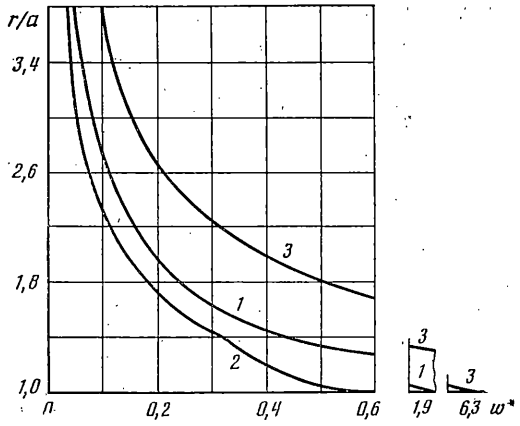
Из анализа полученных результатов следует, что наличие амортизирующего слоя существенно влияет на величину критической скорости подвижной нагрузки, причем при жестком контакте оболочки со слоем она будет немного выше, чем при скользящем.

Если  $c_{s2} < c_{s3}$  (кривые 2, 3), то критическая скорость ниже, чем у оболочки без слоя. При увеличении  $h_2$  она понижается. Если  $c_{s2} > c_{s3}$  (кривые 4, 5), то даже относительно небольшая толщина амортизирующего слоя способствует значительному повышению критической скорости. Как показывают расчеты для оболочки со слоем из плотных известняков ( $h_2/a_1=0,4$ ),  $\Delta(\xi, c) \neq 0$  при любых  $\xi$  и  $c < c_{s3}$ . Следовательно, в этом случае в любом диапазоне скоростей из интервала  $0 < c < c_{s3}$  при решении задачи допустимо прямое и обратное преобразование Фурье, что упрощает исследование рассматриваемых конструкций при любых применяемых на практике состояниях движения нагрузки.

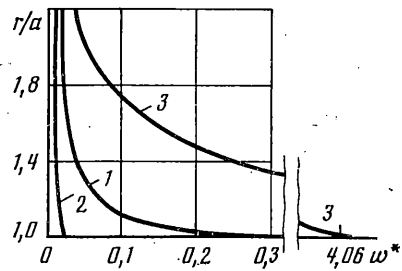
На фиг. 3 для рассмотренных выше конструкций показаны кривые 1–3 изменения радиального перемещения под силой в зависимости от глубины  $w^*=w\mu_1/\rho_0$  (в м) при  $M_{s1}=0,1$  (1 — оболочка без амортизирующего слоя, 2 — амортизирующий слой — плотные известняки ( $h_2/a_1=0,4$ ), 3 — амортизирующий слой — песок средней плотности). Числа Маха: плотные известняки  $M_{s2}=0,032$ , песок средней плотности  $M_{s2}=0,134$ , алевролит  $M_{s3}=0,08$ . На фиг. 4 показаны кривые изменения приращений радиального перемещения под силой с глубиной при увеличении  $M_{s1}$  от 0,1 до 0,4.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Нумерация кривых имеет тот же смысл, что и на фиг. 3. При  $M_{s1}=0,4$  для плотных известняков  $M_{s2}=0,128$ , песков средней плотности  $M_{s2}=0,535$ , алевролита  $M_{s3}=0,319$ .

Из анализа полученных результатов видно, что приращение перемещения  $w_0$  будет тем значительней, чем скорость движения нагрузки ближе к критической (таблицы). Причем наибольшее значение  $w^*$  имеет на границе оболочки со слоем (средой — в случае оболочки без слоя). При  $M_{s2} < M_{s3}$  отличие  $w^*$  оболочки со слоем от оболочки без слоя на относительно небольшом удалении от поверхности оболочки незначительно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пожухов В. И. Влияние жесткости амортизирующего слоя на реакцию цилиндрической оболочки при движении симметричной нагрузки // Прикл. механика. 1977. Т. 13. № 9. С. 33—39.
2. Пожухов В. И. Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Строит. механика и расчет сооружений. 1978. № 1. С. 44—48.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука. 1972. 432 с.
4. Новацкий В. Динамика сооружений. М.: Госстройиздат. 1963. 376 с.
5. Львовский В. М., Онищенко В. И., Пожухов В. И. Установившиеся колебания цилиндрической оболочки в упругой среде под действием подвижной нагрузки // Вопросы прочности и пластичности. Днепропетровск: Изд-е ДГУ. 1974. С. 98—110.

Алма-Ата, Павлодар

Поступила в редакцию  
19.VI.1985