

УДК 539.3

**РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ГРИНА**

КОШНАРЕВА В. А., МЕЛЬНИКОВ Ю. А., ПРЕОБРАЖЕНСКИЙ И. Н.

Контактные задачи теории упругости в силу специфики формулировки граничных условий являются сложными, и использование многих методов вычисления для получения их решений наталкивается на значительные вычислительные трудности. Актуальность приобретает привлечение в этот раздел механики новых методов вычислительной математики, получивших развитие в последнее время.

В публикуемой работе разработан и практически применен алгоритм решения смешанных задач теории потенциала и теории упругости, основанный на использовании функций и матриц Грина соответствующих классических задач.

1. Рассмотрим в полуполосе $\Omega = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq \pi\}$ смешанную краевую задачу теории потенциала

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) = 0, u(x, \pi) = u_x'(0, y) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \quad (x > a), u_y'(x, 0) = -q(x) \quad (x \leq a) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Функцию $q(x)$ полагаем достаточно гладкой. Известно, что решение такой задачи является бесконечно дифференцируемой функцией в Ω вплоть до границы, исключая точку смены типа граничных условий. В этой точке производная функции $u(x, y)$ имеет корневую особенность $|u_r'| = cr^{-1/2}$. Будем искать решение сформулированной задачи следующим образом. Доопределив $u(x, 0)$ на интервале $[0, a)$ неизвестной функцией $\varphi(x)$, приходим к задаче

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) = 0, u(x, \pi) = u_x'(0, y) = 0, u(x, 0) = \Phi(x) \\ \Phi(x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x < a); \Phi(x) = 0 \quad (a \leq x < \infty), \Phi'(0) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Далее отыскиваем функцию $u(x, y)$ в виде

$$u(x, y) = v(x, y) - \pi^{-1}(y - \pi)\Phi(x) \quad (1.3)$$

что приводит к следующим соотношениям:

$$\Delta v(x, y) = \pi^{-1}(y - \pi)\Phi''(x), v(x, 0) = v(x, \pi) = v_x'(0, y) = 0 \quad (1.4)$$

Производные функции $\Phi(x)$ здесь понимаются в обобщенном смысле. Решение задачи (1.4) можно представить потенциалом

$$v(x, y) = \pi^{-1} \iint_{\Omega} G(x, y; \xi, \eta) (\eta - \pi) \Phi''(\xi) d\Omega(\xi, \eta)$$

где $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина однородной краевой задачи, соответствующей (1.4). После этого, имея в виду (1.3), получаем

$$u(x, y) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} G(x, y; \xi, \eta) (\eta - \pi) \Phi''(\xi) d\eta d\xi + \pi^{-1}(\pi - y)\Phi(x) \quad (1.5)$$

В [1] выведено следующее представление для используемой здесь функции Грина:

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x, \xi) \sin ny \sin n\eta$$

$$g_n(x, \xi) = -1/2 [\exp(-n|x-\xi|) + \exp(-n(x+\xi))] / n$$

Взяв в (1.5) интеграл по η , получаем

$$u(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} g_n(x, \xi) \sin ny \right) \Phi''(\xi) d\xi + \frac{\pi-y}{\pi} \Phi(x)$$

Функция $u(x, y)$, определяемая последним равенством, является гармонической внутри Ω и удовлетворяет первым двум граничным условиям задачи (1.1). Удовлетворяя далее последнему граничному условию этой задачи, приходим к интегродифференциальному уравнению относительно функции $\Phi(x)$:

$$q(x) = \pi^{-1} \Phi(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^a \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x, \xi) \right) \Phi''(\xi) d\xi$$

которое с помощью подстановки $\Phi''(x) = \Psi(x)$ сводится к интегральному уравнению

$$q(x) = \int_0^a K(x, \xi) \Psi(\xi) d\xi, \quad K(x, \xi) = \frac{1}{\pi} \left[K_1(x, \xi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x, \xi) \right]$$

$$K_1 = x-a \quad (x \geq \xi); \quad K_1 = \xi-a \quad (x < \xi) \quad (1.6)$$

Ряд, входящий в представление ядра в (1.6), можно просуммировать

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x, \xi) = \ln [(1 - \exp(-|x-\xi|)) (1 - \exp(-(x+\xi)))]$$

Интегральное уравнение (1.6) аппроксимируем системой алгебраических уравнений на некотором множестве точек $x_i(\xi_j)$ на интервале $[0, a)$:

$$\sum_{j=1}^m A_{ij} \Psi(\xi_j) = q(x_i) \quad (i = \overline{1, m}) \quad (1.7)$$

$$A_{ij} = \int_{\xi_j - h/2}^{\xi_j + h/2} K(x_i, \xi) d\xi \quad (h = am^{-1})$$

Коэффициенты A_{ij} матрицы системы (1.7) при $i \neq j$ вычисляются по формулам

$$A_{ij} = h\pi^{-1} \{ \ln [1 - \exp(-(x_i + \xi_j))] [1 - \exp(-(x_i - \xi_j))] + x_i - a \} \quad (i > j)$$

$$A_{ij} = h\pi^{-1} \{ \ln [1 - \exp(-(x_i + \xi_j))] [1 - \exp(-(\xi_j - x_i))] + \xi_j - a \} \quad (i < j)$$

При вычислении коэффициентов A_{ii} возникают несобственные интегралы вида

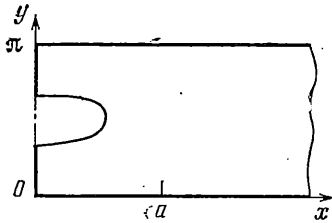
$$J_i = \int_{x_i - h/2}^{x_i} \ln(1 - \exp(-(x_i - \xi))) d\xi$$

Аппроксимация аргумента логарифма линейной частью его ряда Тейлора и интегрирование приводит к приближенному равенству

$$A_{ii} \approx h\pi^{-1} [1/2 \ln(1 - \exp(h/4 - 2x_i)) (1 - \exp(-h/4 - 2x_i)) + \ln(h/2) + x_i - a - 1]$$

Хорошая обусловленность матрицы системы (1.7) и, следовательно, устойчивость процедуры численного решения уравнения (1.6) по отношению к малым возмущениям исходных данных следует из того, что ядро $K(x, \xi)$ последнего обладает логарифмической особенностью, поэтому элементы главной диагонали матрицы A_{ij} преобладают над остальными ее элементами.

Используя полученные результаты, решение задачи (1.1) окончательно записываем в виде



Фиг. 1

$$u(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^a \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} g_n(x, \xi) \sin ny \right) \times \\ \times \varphi''(\xi) d\xi + \frac{\pi-y}{\pi} \Phi(x)$$

В п. 3 приведены результаты численной реализации описанного алгоритма.

Применим изложенный подход к решению собственно смешанной краевой задачи теории потенциала в полосе с отверстием произвольной формы (фиг. 1). Пусть на контуре L задано условие

$$u(x, y) = f(x, y) \quad (1.8)$$

где $f(x, y)$ — достаточно гладкая функция, а остальные граничные условия сформулированы так же, как в задаче (1.1). Если постановка задачи обладает физической и геометрической симметрией относительно оси OY , то, вводя новую искомую функцию $v(x, y)$ соотношением (1.3), получим

$$\Delta v(x, y) = \pi^{-1}(y-\pi)\Phi''(x), \quad v(x, 0) = v(x, \pi) = v_x'(0, y) = 0 \\ v(x, y) = f(x, y) + \pi^{-1}(y-\pi)\Phi(x), \quad (x, y) \in L \quad (1.9)$$

Решение этой задачи будем искать в виде суммы потенциалов

$$v(x, y) = \iint_{\Omega} \pi^{-1} G(x, y; \xi, \eta) (\eta-\pi) \Phi''(\xi) d\Omega(\xi, \eta) + \\ + \int_L G(x, y; \xi, \eta) v(\xi, \eta) dL(\xi, \eta)$$

ядро которых есть использовавшаяся функция Грина однородной задачи, соответствующей (1.4), а плотность $v(\xi, \eta)$ — пока неизвестная интегрируемая на L функция.

С учетом (1.3) далее имеем

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} G(x, y; \xi, \eta) (\eta-\pi) \Phi''(\xi) d\Omega(\xi, \eta) + \\ + \int_L G(x, y; \xi, \eta) v(\xi, \eta) dL(\xi, \eta) + \frac{y-\pi}{\pi} \Phi(x) \quad (1.10)$$

Удовлетворив представлением (1.10) последнему из соотношений задачи (1.1), получим пару интегродифференциальных уравнений

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x, \xi) \varphi''(\xi) d\xi - \int_L G_y'(x, y; \xi, \eta) v(\xi, \eta) dL(\xi, \eta) + \frac{1}{\pi} \varphi(x) \\ f(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^a \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} g_n(x, \xi) \sin ny \right) \varphi''(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_L G(x, y; \xi, \eta) v(\xi, \eta) dL(\xi, \eta) + \frac{\pi-y}{\pi} \Phi(x), \quad (x, y) \in L$$

которые сводятся к интегральным

$$q(x) = \int_0^a K(x, \xi) \psi(\xi) d\xi - \int_L G_v'(x, 0; \xi, \eta) v(\xi, \eta) dL(\xi, \eta) \quad (1.11)$$

$$f(x, y) = \int_0^a K_2(x, y, \xi) \Psi(\xi) d\xi + \int_L G(x, y; \xi, \eta) v(\xi, \eta) dL(\xi, \eta) \quad (1.12)$$

$$K_2(x, y, \xi) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} g_n(x, \xi) \sin ny - \theta \left(\frac{y}{\pi} - 1 \right) K_1(x, \xi)$$

$$\theta = 1 \quad (0 \leq x < a), \quad \theta = 0 \quad (x \geq a)$$

Обозначим интервал $[0, a)$ через ω , а весь контур полуполосы Ω через Γ . Пусть

$$\theta_1(P) = 1 \quad (P \in \omega), \quad \theta_1(P) = 0 \quad (P \in \Omega);$$

$$\theta_2(P) = 1 \quad (P \in L), \quad \theta_2(P) = 0 \quad (P \in \Omega)$$

где P — точка, принадлежащая контуру полуполосы Ω . Тогда уравнения (1.11), (1.12) можно записать в виде системы

$$\theta_1(P) q(P) = \int_{\Gamma} \theta_1(P) K(P, M) \theta_1(M) \psi(M) d\Gamma(M) +$$

$$+ \int_{\Gamma} \theta_1(P) G_v'(P, M) \theta_2(M) v(M) d\Gamma(M)$$

$$\theta_2(P) f(P) = \int_{\Gamma} \theta_2(P) K_2(P, M) \theta_1(M) \psi(M) d\Gamma(M) +$$

$$+ \int_{\Gamma} \theta_2(P) G(P, M) \theta_2(M) v(M) d\Gamma(M) \quad (1.13)$$

Введем параметризацию точек (x, y) на контуре с помощью соотношений $x = x(t)$; $y = y(t)$; $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Тогда (1.13) аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений

$$q(x_i) = \sum_{j=1}^n C_{ij} \Psi(\xi_j) + \sum_{j=n+1}^m D_{ij} v(\tau_j) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.14)$$

$$f(\tau_i) = \sum_{j=1}^n H_{ij} \Psi(\xi_j) + \sum_{j=n+1}^m T_{ij} v(\tau_j) \quad (i=n+1, \dots, m)$$

на некотором множестве точек $x_i(\xi_j)$ на интервале $[0, a)$ и $t_i(\tau_j)$ на контуре L . Определив функции $\Psi(x)$ и $v(x, y)$, окончательно получаем решение задачи в виде

$$u(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^a \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} g_n(x, \xi) \sin ny \right) \varphi''(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_L G(x, y; \xi, \eta) v(\xi, \eta) dL(\xi, \eta) + \frac{\pi-y}{\pi} \Phi(x) \quad (1.15)$$

2. Рассмотрим собственно смешанную краевую задачу теории упругости. Пусть полуплоскость $\Omega = \{0 < x < \infty, 0 \leq y \leq \pi\}$ покоится без трения на недеформируемом основании $y=0$. На всей границе $y=\pi$, отсутствуют ка-

сательные напряжения, на интервале этой границы $[a, \infty)$ заданы нормальные перемещения, а на $[0, a)$ нормальные напряжения равны нулю. На границе $x=0$ нормальные перемещения и касательные напряжения равны нулю. Указанная задача относительно вектора смещений точек полуполосы (знак T означает транспонирование): $\bar{U}=[u_1(x, y), u_2(x, y)]^T$ формулируется системой уравнений Ламе без массовых сил и соответствующими граничными условиями

$$LU=0 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} u_2(x, 0) = u_1(0, y) = (u_2)_x'(0, y) = 0, \tau_{yx}(x, 0) = \tau_{yx}(x, \pi) = 0 \\ u_2(x, \pi) = f(x) \quad (x > a), \sigma_y(x, \pi) = 0 \quad (x < a) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь L — дифференциальный оператор Ламе.

Полагая $f(x)$ достаточно гладкой функцией, заключаем, что всюду, кроме точки смены типа граничных условий, решение поставленной задачи имеет непрерывные производные вплоть до второго порядка. В окрестности особой точки нормальные напряжения имеют корневую особенность.

Доопределив компоненту u_2 вектора \bar{U} при $y=\pi$ на интервале $[0, a)$ неизвестной функцией $\Phi(x)$, приходим к задаче для системы (2.1):

$$\begin{aligned} u_2(x, 0) = u_1(0, y) = (u_2)_x'(0, y) = 0 \\ \tau_{yx}(x, 0) = \tau_{yx}(x, \pi) = 0, u_2(x, \pi) = \Phi(x) \\ \Phi(x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x < a), \Phi(x) = f(x) \quad (a \leq x < \infty); \Phi'(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решение задачи (2.3) будем искать в виде

$$\bar{U} = \bar{V} + \bar{S}, \bar{V} = [v_1(x, y), v_2(x, y)]^T, \bar{S} = [-1/2 y \Phi'(x) / \pi, y \Phi(x) / \pi]^T \quad (2.4)$$

что позволяет записать

$$\begin{aligned} LV = \bar{F}, v_2(x, 0) = v_2(x, \pi) = 0 \\ \tau_{yx}(x, 0) = \tau_{yx}(x, \pi) = 0, v_1(0, y) = (v_2)_x'(0, y) = 0 \\ \bar{F} = [1/2(\lambda + 2\mu)y^2 \Phi''(x) / \pi - \lambda \Phi'(x) / \pi, \lambda y \Phi''(x) / \pi]^T \end{aligned} \quad (2.5)$$

Производные функции $\Phi(x)$ здесь понимаются в обобщенном смысле. Далее вектор \bar{V} с помощью соответствующей матрицы Грина можно записать в форме потенциала

$$\bar{V} = \iint_{\Omega} G(x, y; \xi, \eta) \bar{F}(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) \quad (2.6)$$

Выражения для элементов G_{ij} матрицы Грина получены в [1]. Тогда вектор \bar{U} в соответствии с (2.4) будет иметь вид

$$\bar{U} = \iint_{\Omega} G(x, y; \xi, \eta) \bar{F}(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \bar{S} \quad (2.7)$$

Удовлетворив этим представлением последнему граничному условию задачи (2.1), получим интегродифференциальное уравнение относительно $\Phi(x)$:

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{\pi} \left\{ \lambda^2 (g_{11}^0)_x'(x, \xi) \Phi'(\xi) + 2(\lambda + 2\mu) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda / n^2 (g_{11}^n)_x'(x, \xi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\lambda + 2\mu) g_{21}^n(x, \xi) + \frac{\pi^2 \lambda}{12} (\lambda + 2\mu) (g_{11}^0)_x'(x, \xi) \right] \times \right. \\ \left. \times \Phi''(\xi) + 2\lambda \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{n} (g_{12}^n)_x'(x, \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda + 2\mu) g_{22}^n(x, \xi) \right] \Phi''(\xi) \right\} d\xi + \\ + \frac{\lambda \pi}{2} \Phi''(x) - \frac{1}{\pi} (\lambda + 2\mu) \Phi(x) + R(x, \xi) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
R(x, \xi) = & \int_a^\infty \frac{1}{\pi} \left\{ \lambda^2 (g_{11}^\circ)'_x(x, \xi) f'(\xi) + 2\lambda \left[\sum_{n=1}^\infty (\lambda+2\mu) g_{22}^n(x, \xi) + \right. \right. \\
& + \left. \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda}{n} (g_{12}^n)'_x(x, \xi) \right] f''(\xi) - 2(\lambda+2\mu) \left[\sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda}{n^2} (g_{11}^n)'_x(x, \xi) + \right. \\
& \left. \left. + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} (\lambda+2\mu) g_{21}^n(x, \xi) + \frac{\pi^2 \lambda}{12} (\lambda+2\mu) (g_{11}^\circ)'_x(x, \xi) \right] f'''(\xi) \right\} d\xi
\end{aligned}$$

а коэффициенты $g_{ij}^n(x, \xi)$ разложений элементов G_{ij} матрицы Грина приведены в [1]. Уравнение (2.8) с помощью интегрирования по частям и подстановки $\varphi''(x) = \psi(x)$ сводится к интегральному уравнению

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \left\{ \ln(1-\exp(x+\xi)) (1-\exp(-|x-\xi|)) + \frac{x+\xi}{\exp(x+\xi)-1} + \right. \\
& \left. + \frac{x-\xi}{\exp|x-\xi|-1} + 2K_1(x, \xi, a) \right\} \psi(\xi) d\xi + \varphi''(a) \left[(\lambda+\mu)(x-a) \times \right. \\
& \left. \times \ln(1-\exp|a-x|) - (\lambda+\mu)(x+a) \ln(1-\exp(-(x+a))) - \frac{\pi^2 \lambda}{6} - \right. \\
& \left. - \sum_{n=1}^\infty \lambda n^{-2} (\exp(-n(x+a)) + \exp(-n(a-x))) \right] = -(\lambda+2\mu)f(a) - R(x, \xi)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Получив после решения уравнения (2.9) функцию $\varphi(x)$, записываем в соответствии с (2.7) окончательное представление вектора $U(x, y)$. Воспользовавшись изложенной методикой, можно получить решение собственно смешанной задачи теории упругости в полосе с отверстием произвольной формы (фиг. 1). Для примера была рассмотрена полуполоса с жестко окантованной выемкой

$$u_1(x, y) = u_2(x, y) = 0, \quad (x, y) \in L \tag{2.10}$$

находящаяся в условиях задачи (2.2). Учитывая влияние отверстия, искомое решение представлялось суммой потенциалов

$$U = \iint_{\Omega} G(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_L G(x, y; \xi, \eta) N(\xi, \eta) dL(\xi, \eta) + S$$

$$N = [v_1(x, y), v_2(x, y)]^T$$

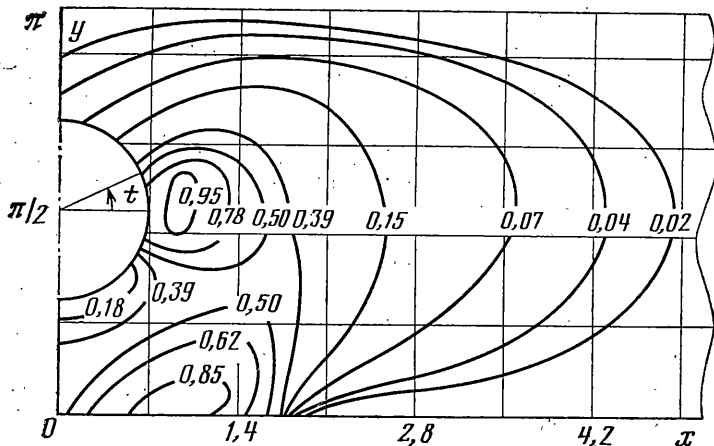
где N — вектор неизвестных интегрируемых на L функций.

Удовлетворение граничным условиям (2.2), (2.10) приводит к системе интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\varphi(x)$, $v_1(x, y)$, $v_2(x, y)$, которые и определили окончательный вид искомого решения. Ограничимся примером численного решения данной задачи, который помещен в следующем разделе.

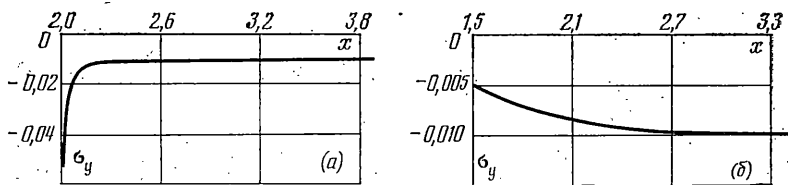
3. Приведем некоторые результаты расчетов температурных полей и напряженно-деформированного состояния однородной упругой полуполосы, находящейся в условиях задач (1.1), (1.8), (2.2), (2.10). Для задач (1.1), (1.9) были подобраны модельные примеры. Пусть $\Phi(x) = x^2 - a^2$ ($0 \leq x < a$); $\Phi(x) = 0$ ($a \leq x < \infty$), тогда функция

$$W(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty n^{-1} \sin ny g_n(x, \xi) \right) \Phi''(\xi) d\xi + \frac{\pi-y}{\pi} \Phi(x)$$

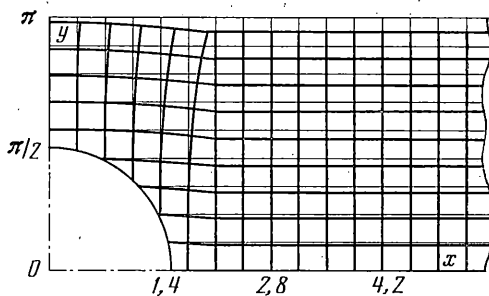
где $\Phi''(\xi)$ — производная в обобщенном смысле, является гармонической внутри Ω



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

и удовлетворяет граничным условиям задачи (1.2). Задавая в качестве $q(x)$ производную по y функции $W(x, y)$, получаем контрольный пример для задачи (1.1). Первые три столбца таблицы содержат результаты расчета модельной и контрольной функции в сечении $y = \pi/2$. Относительная погрешность приближенного решения не превышает 0,5%.

Поместим в точке с координатами (ξ_0, η_0) сосредоточенный источник, тогда функция влияния $G(x, y; \xi_0, \eta_0)$ однородной краевой задачи, соответствующей (1.4), будет решением задачи (1.8), если на контуре отверстия L задать значения этой функции, а на контуре ω — ее производную по y . Точные и приближенные значения функции $G(x, y; \xi_0, \eta_0)$ в сечении $y = \pi/2$ приведены в последних трех столбцах таблицы. Относительная погрешность приближенного решения не превышает 0,2%. При этом число участков разбиения каждого из контуров L и ω выбиралось в резуль-

x	u	W	x	u	G
0	-1,483	-1,472	0,975	-0,247	-0,247
0,325	-1,452	-1,441	1,3	-0,175	-0,175
0,65	-1,362	-1,351	1,62	-0,125	-0,124
0,975	-1,222	-1,212	1,95	-0,039	-0,039
1,3	-1,046	-1,037	2,275	-0,064	-0,064
1,625	-0,849	-0,847	2,6	-0,046	-0,046

тате, проведения вычислительного эксперимента. Рассчитанная по изложенной схеме функция $u(x, y)$ задачи (1.8) для $q(x, y)=1$ и $u|_L = [\cos(t/2)]^{16}$ изображена на фиг. 2 с помощью линий уровня. На фиг. 3, а показано распределение нормальных напряжений на верхней кромке в задаче (2.2) для значений параметров $a=2$, $f(x)=-0,1$, $\lambda=0,16$, $\mu=0,08$. На некотором удалении от точки a σ_y приближаются к константе, равной нормальному напряжению в одномерном случае. Распределение нормальных напряжений σ_y на нижней кромке в задаче (2.2), (2.10) с круглой выемкой радиуса $R=1,5$ для тех же значений остальных исходных данных приведено на фиг. 3, б. Деформация первоначально прямоугольной сетки этой задачи изображена на фиг. 4.

Применимость описанного здесь подхода к решению собственно смешанных краевых задач, очевидно, существенно зависит от набора функций и матриц Грина, записанных в компактном виде с аналитически выраженной сингулярной частью [1-3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельников Ю. А., Красникова Р. Д. Построение функций Грина некоторых граничных задач математической физики. Учебное пособие. Днепропетровск: Изд-е ДГУ. 1981. 55 с.
2. Долгова И. М., Мельников Ю. А. Построение функций и матриц Грина для уравнений и систем эллиптического типа // ПИММ. 1978. Т. 42. Вып. № 4. С. 695-700.
3. Давыдов И. А., Мельников Ю. А., Никулин В. А. К построению функций Грина оператора Лапласа в криволинейных координатах // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 6. С. 1127-1128.

Днепропетровск, Москва

Поступила в редакцию
25.1.1985