МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1987

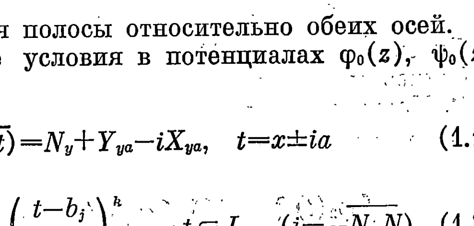
УДК 539.3.01

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД Д. И. ШЕРМАНА

МИРОНЕНКО Н. И.

Предлагаемый метод позволяет эффективно решать задачи теории упругости для областей, содержащих в качестве границ окружности. Ниже он демонстрируется на примере полосы с конечным числом круговых отверстий в случае симметрии относительно обеих осей. Данный метод несколько проще известного метода ω-функции [1], поскольку не предполагает введения новой неизвестной функции, а следовательно, отпадает необходимость в построении интегрального уравнения для ее определения и т. д. При этом потенциалы и системы уравнений для определения коэффициентов, входящих в потенциалы, полученные модифицированным методом и методом ω-функции, полностью совпадают.

1. Рассмотрим полосу с конечным $2N+1$ числом круговых отверстий при наличии симметрии относительно обеих осей. В этом случае (фигура) $b_{-j}=-b_j$, $b_0=0$, $R_{-j}=R_j$ $(j=\overline{1,N})$. Предполагается, что на бесконечности полоса растягивается напряжением $N_x=\text{const}$, по граням полосы $y=\pm a$ заданы нормальное $Y_{ya}(x)+N_y$ ($N_y=\text{const}$) и касательное $X_{ya}(x)$ напряжения, такие, что $Y_{ya}(-x)=Y_{ya}(x)$, $X_{ya}(-x)=-X_{ya}(x)$. Кроме того, предполагается, что эти напряжения удовлетворяют условиям, обеспечивающим применение интегрального преобразования Фурье. По контурам отверстий L_j $(j=\overline{-N,N})$ действуют напряжения, удовлетворяющие условиям симметрии напряженного состояния полосы относительно обеих осей.



В силу сказанного граничные условия в потенциалах $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ $(z=x+iy)$ выглядят так:

$$\varphi_0'(t)+\overline{\varphi_0'(t)}+t\overline{\varphi_0''(t)}+\overline{\psi_0'(t)}=N_y+Y_{ya}-iX_{ya},\quad t=x\pm ia \tag{1.1}$$

$$\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_{kj}\left(\frac{t-b_j}{R_j}\right)^k,\quad t\in L_j\quad (j=\overline{-N,N}) \tag{1.2}$$

Коэффициенты γ_{0j} $(j=\pm1,\pm2,\ldots,\pm N)$ неизвестны и определяются в процессе решения. Вследствие симметрии для γ_{kj} справедливы следующие соотношения:

$$\gamma_{\pm k,-j}=(-1)^{k+1}\gamma_{\pm k,j}\quad (j=\overline{1,N}),\qquad \gamma_{\pm 2k,0}=0\quad (k=\overline{0,\infty}) \tag{1.3}$$

Представим искомые потенциалы $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$:

$$\varphi_0(z)=\Gamma z+\varphi_1(z)+\varphi_2(z),\qquad \Gamma={}^1/_4(N_x+N_y) \tag{1.4}$$
$$\psi_0(z)=\Gamma' z+\psi_1(z)+\psi_2(z),\qquad \Gamma'=-{}^1/_2(N_x-N_y)$$

Здесь $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ — функции, аналитические в сплошной полосе и соответствующие напряжениям $Y_{ya}(x)$, $X_{ya}(x)$. Они определяются формулами [2, 3]:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1(z) \\ \psi_1(z) \end{Bmatrix} = \mp i \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{H_1(\mu)}{(1-i\lambda z)H_1(\mu)+2H_2(\mu)} \right\} e^{-i\lambda z} \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{1.5}$$

$$H_1(\mu) = (2\pi)^{-1/2}[-T_s(\mu) Y_{ya}^*(\lambda) + iT_c(\mu) X_{ya}^*(\lambda)], \quad \mu=\lambda a$$

$$H_2(\mu) = (2\pi)^{-1/2}[(T_s(\mu)+\mu T_c(\mu)) Y_{ya}^*(\lambda) - i\mu T_s(\mu) X_{ya}^*(\lambda)].$$

$$T_s(\mu) = \mathrm{sh}\,\mu/S(\mu), \qquad T_c(\mu) = \mathrm{ch}\,\mu/S(\mu), \qquad S(\mu) = 2\mu + \mathrm{sh}\,2\mu$$

$$\begin{Bmatrix} Y_{ya}^*(\lambda) \\ X_{ya}^*(\lambda) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} Y_{ya}(x) \\ X_{ya}(x) \end{Bmatrix} e^{i\lambda x} dx$$

Потенциалы $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$ — функции, аналитические вне отверстий L_j $(j=\overline{-N, N})$. Граничные условия для определения этих потенциалов получим подставив (1.4), (1.5) в (1.1), (1.2). В результате будем иметь

$$\varphi_2'(t) + \overline{\varphi_2'(t)} + \overline{t\varphi_2''(t)} + \overline{\psi_2'(t)} = 0, \qquad t = x \pm ia \tag{1.6}$$

$$\varphi_2(t) + t\overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{kj}^* \left(\frac{t-b_j}{R}\right)^k, \quad t \in L_j \quad (j=\overline{-N,N}) \tag{1.7}$$

$$\gamma_{0j}^* = \gamma_{0j} - (2\Gamma+\Gamma')b_j - \delta_{0j}^{01} - \delta_{1j}^{01}/\varepsilon_{jj} - 2\delta_{2j}^{01} - \delta_{0j}^{02}$$

$$\gamma_{kj}^* = \gamma_{kj} - \delta_{k1} 2\Gamma R_j - (1+\delta_{k1})\delta_{kj}^{01}, \qquad k \geqslant 1$$

$$\overset{*}{\gamma}_{-k,j} = \gamma_{-k,j} - \delta_{k1}\Gamma' R_j - \delta_{kj}^{03}, \qquad \delta_{kj}^{01} = -\frac{2\varepsilon_j^k}{k!} \int_0^{\infty} \mu^{k-1} H_1(\mu) \sin\theta_{kj}\, d\mu \tag{1.8}$$

$$\delta_{kj}^{02} = \frac{2\varepsilon_j^k}{k!} \int_0^{\infty} \mu^{k-1} \{H_1(\mu)[(k+1)\sin\theta_{kj} + \varepsilon_j^* \mu \cos\theta_{kj}] + 2H_2(\mu)\sin\theta_{kj}\} d\mu$$

$$\delta_{kj}^{03} = \frac{2\varepsilon_j^k}{k!} \int_0^{\infty} \mu^{k-1} \left\{ H_1(\mu)\left(k+1+\frac{\varepsilon_j^2\mu^2}{k+1}\right) + 2H_2(\mu) \right\} \sin\theta_{kj}\, d\mu$$

$$\varepsilon_j = R_j/a, \qquad \varepsilon_j^* = b_j/a, \qquad \varepsilon_{jn} = R_j/b_n, \qquad \theta_{kj} = \varepsilon_j^*\mu + k\pi/2$$

Здесь δ_{kj} — символ Кронекера, а δ_{kj}^{0n} $(n=1, 2, 3)$ — действительные коэффициенты, удовлетворяющие соотношениям, аналогичным (1.3).

2. Предполагая, что функции $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$ непрерывны вплоть до контуров, разложим их на L_j $(j=\overline{-N, N})$ в ряды Фурье

$$\begin{Bmatrix} \varphi_2(t) \\ \psi_2(t) \end{Bmatrix} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \alpha_{kj} \\ \beta_{kj} \end{Bmatrix} \left(\frac{t-b_j}{R_j}\right)^k, \quad t \in L_j \quad (j=\overline{-N,N}) \tag{2.1}$$

В силу симметрии задачи коэффициенты α_{kj}, β_{kj} действительные и удовлетворяют соотношениям, аналогичным (1.3). Подстановка (2.1) в (1.7) позволяет выразить β_{kj} через α_{kj}:

$$\beta_{-k,j} = -\alpha_{kj} + (k-2)\alpha_{-(k-2),j} + (k-1)\alpha_{-(k-1),j}/\varepsilon_{jj} + \gamma_{kj}^* \quad (k=0, \pm1, \pm2, \ldots) \tag{2.2}$$

Следовательно, неизвестными в (2.1) являются только коэффициенты α_{kj} $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$. Перепишем теперь выражение для $\varphi_2(t)$ в (2.1) следующим образом (знак суммы со штрихом вверху здесь и далее означает, что в сумме отсутствует слагаемое, соответствующее $j=n$):

$$\varphi_2(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k,n} \left(\frac{R_n}{t-b_n}\right)^k - \sum_{j=-N}^{N}{}' \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k,j} \left(\frac{R_j}{t-b_j}\right)^k = \tag{2.3}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{kn}\left(\frac{t-b_n}{R_n}\right)^k-\sum_{j=-N}^{N}{}'\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{-k,j}\left(\frac{R_j}{t-b_j}\right)^k\qquad t\in L_n\quad (n=-\overline{N,N})$$

Здесь справа и слева от знака равенства добавлены одинаковые слагаемые, определяемые двойной суммой. Слева от знака равенства в (2.3) стоят предельные значения функций, аналитических вне L_n, справа — предельные значения функций, аналитических внутри L_n. Для осуществления аналитического продолжения (2.3) на всю полосу введем аналитическую в сплошной полосе функцию $\varphi(z)$:

$$\varphi(z)=\varphi_2(z)-\sum_{j=-N}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{-k,j}\left(\frac{R_j}{z-b_j}\right)^k,\quad z\overline{\in}S_n\quad (n=-\overline{N,N})\tag{2.4}$$

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{kn}\left(\frac{z-b_n}{R_n}\right)^k-\sum_{j=-N}^{N}{}'\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{-k,j}\left(\frac{R_j}{z-b_j}\right)^k,\quad z\in S_n\quad (n=-\overline{N,N})$$

где S_n — область внутри окружности L_n. Аналогично вводится также аналитическая в сплошной полосе функция $\psi(z)$:

$$\psi(z)=\psi_2(z)-\sum_{j=-N}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{-k,j}\left(\frac{R_j}{z-b_j}\right)^k,\quad z\overline{\in}S_n\quad (n=-\overline{N,N})\tag{2.5}$$

$$\psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{kn}\left(\frac{z-b_n}{R_n}\right)^k-\sum_{j=-N}^{N}{}'\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{-k,j}\left(\frac{R_j}{z-b_j}\right)^k,\quad z\in S_n\quad (n=-\overline{N,N})$$

Выразим $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$ из первых формул (2.4) и (2.5):

$$\varphi_2(z)=\varphi(z)+\sum_{j=-N}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{-k,j}\left(\frac{R_j}{z-b_j}\right)^k\tag{2.6}$$

$$\psi_2(z)=\psi(z)+\sum_{j=-N}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{-k,j}\left(\frac{R_j}{z-b_j}\right)^k,\quad z\overline{\in}S_n\quad (n=-\overline{N,N})$$

Подставим теперь (2.6) в (1.6), тем самым получим граничное условие для определения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитических в сплошной полосе

$$\varphi'(t)+\overline{\varphi'(t)}+t\overline{\varphi''(t)}+\overline{\psi'(t)}=\sum_{j=-N}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{R_j}\left\{\alpha_{-k,j}\left(\frac{R_j}{t-b_j}\right)^{k+1}+\right.$$
$$\left.+\overset{**}{\gamma}_{-k,j}\left(\frac{R_j}{\bar t-b_j}\right)^{k+1}-(k+1)\alpha_{-k,j}\frac{t}{R_j}\left(\frac{R_j}{\bar t-b_j}\right)^{k+2}\right\}$$
$$t=x+ia,\qquad \overset{**}{\gamma}_{-k,j}=\alpha_{-k,j}+\beta_{-k,j}$$

Решение этой задачи, очевидно, будет иметь такой же вид, как и (1.5):

$$\left\{\begin{matrix}\varphi(z)\\ \psi(z)\end{matrix}\right\}=\mp i\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{matrix}M_1(\mu)\\ (1-i\lambda z)M_1(\mu)+2M_2(\mu)\end{matrix}\right\}e^{-i\lambda z}\frac{d\lambda}{\lambda}\tag{2.7}$$

$$M_1(\mu)=\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}G_{kj}(\mu)\left[\alpha_{-k,j}(\delta_k(\mu)\sin\theta_{kj}-\varepsilon_j{}^*\mu\cos\theta_{kj})+\beta_{-k,j}\sin\theta_{kj}\right],\quad \mu>0$$

$$M_2(\mu)=\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}G_{kj}(\mu)\left\{\alpha_{-k,j}\left[((k-2)\gamma_1(\mu)-g(\mu))\sin\theta_{kj}+\varepsilon_j{}^*\mu\gamma_1(\mu)\cos\theta_{kj}\right]-\right.$$

$$-\beta_{-k,j}\gamma_1(\mu)\sin\theta_{kj}\},\quad \mu>0;\qquad G_{kj}(\mu)=(2-\delta_{0j})\varepsilon_j^k\mu^k[2S(\mu)\,(k-1)\,!]^{-1}$$

$$2\gamma_1(\mu)=1+2\mu-\exp(-2\mu) \tag{2.8}$$

$$\delta_k(\mu)=2\gamma_1(\mu)-k-1,\quad 2g(\mu)=-2\gamma_1(-\mu)\exp(-2\mu)$$

Функции $M_1(\mu)$, $M_2(\mu)$, как и $H_1(\mu)$, $H_2(\mu)$, действительные, четные, поэтому здесь приведены их выражения только для $\mu>0$.

3. Первые два слагаемых в (1.4) определены полностью, так как они связаны с заданной нагрузкой и являются функциями, аналитическими в сплошной полосе. Последние слагаемые определены с точностью до коэффициентов $\alpha_{-k,j}$, $\beta_{-k,j}$ ($k\geqslant1$) (см. (2.6), (2.7)). Для определения этих коэффициентов (или, что то же, коэффициентов α_{kj} ($k=\pm1, \pm2, \ldots$)) необходимо построить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим аналитические в сплошной полосе функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Для функции $\varphi(z)$ имеем выражения (2.4) и (2.7). Следовательно, разложения этих выражений в ряды Тейлора в кругах с центрами, скажем, в точках $z=b_n$ ($n=\overline{-N,N}$) должны совпадать. Поэтому должны совпадать и коэффициенты при всех степенях $(z-b_n)/R_n$. Таким образом будет получена первая группа уравнений. Практически для получения этой группы уравнений необходимо вычислить производные порядка m в точке $z=b_n$ ($n=\overline{0,N}$) от второго выражения (2.4) и первого выражения (2.7) и приравнять их. В результате после некоторых преобразований с использованием (2.2) получим

$$\beta_{-m,n}=(m-2)\alpha_{-(m-2),n}+(m-1)\alpha_{-(m-1),n}/\varepsilon_{nn}-(1+\delta_{1m})\times \tag{3.1}$$

$$\times[f_{mn}(\alpha_{-k,j})+2\delta_{mn}^{11}]+\gamma_{mn}^*,\qquad m\geqslant1,\quad \alpha_{-1,n}=\alpha_{0n}\equiv0$$

$$f_{mn}(\nu_{kj})=(-1)^m\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(1-\delta_{jn})\left(\frac{R_j}{b_n-b_j}\right)^k\left(\frac{R_n}{b_n-b_j}\right)^m+\right.$$

$$\left.+(-1)^{k+1}(1-\delta_{0j})\left(\frac{R_j}{b_n+b_j}\right)^k\left(\frac{R_n}{b_n+b_j}\right)^m\right\}C_{k+m-1}^{m}\nu_{kj}$$

Коэффициенты δ_{mn}^{11} определяются первой формулой (1.8) с заменой $H_1(\mu)$ на $M_1(\mu)$ (см. (2.8)). Аналогично получается вторая группа уравнений. Только здесь необходимо рассмотреть выражения для $\psi(z)$ (см. (2.5) и (2.7)). Запишем окончательный результат

$$\alpha_{-m,n}=-(m+2)f_{m+2,n}(\alpha_{-k,j})-((m+1)/\varepsilon_{nn})f_{m+1,n}(\alpha_{-k,j})-$$

$$-f_{mn}(\beta_{-k,j})+\gamma_{-m,n}^{*}-\delta_{mn}^{13},\qquad m\geqslant1 \tag{3.2}$$

Коэффициенты δ_{mn}^{13} определяются третьей формулой в (1.8) с заменой в ней $H_1(\mu)$ и $H_2(\mu)$ на $M_1(\mu)$ и $M_2(\mu)$ соответственно (см. (2.8)).

Две группы (3.1) и (3.2) образуют необходимую систему уравнений, которая, как можно показать, является квазирегулярной.

Если решать задачу при помощи метода ω-функции [1—3] и ввести новую неизвестную функцию $\omega(t)$ соотношением

$$\varphi_2(t)-t\overline{\varphi_2'(t)}-\overline{\psi_2(t)}=2\omega(t)-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_{kj}^*\left(\frac{t-b_j}{R_j}\right)^k,\qquad t\in L_j\quad (j=\overline{-N,N})$$

то получим, как уже отмечалось, те же потенциалы (1.4), (1.5), (2.6), (2.7) и ту же систему уравнений (3.1) и (3.2) для определения коэффициентов α_{kj}, входящих в потенциалы.

В [2, 3] при помощи ω-функции были рассмотрены задачи, аналогичные изучаемой здесь для случая двух и четырех отверстий. В них приведен численный анализ напряженного состояния полосы. В силу изложенного этот анализ является иллюстрацией и для данного метода в случае двух и четырех отверстий.

Поскольку предложенный здесь метод восходит к идеям метода ω-функции [1], то его естественно назвать модифицированным методом Д. И. Шермана. Для случая двухсвязной области это метод был рассмотрен в кратком сообщении [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шерман Д. И.* О напряжениях в весомой полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 3. С. 297—316.
2. *Мироненко Н. И.* О напряженном состоянии полосы, ослабленной двумя одинаковыми круговыми отверстиями, расположенными в продольном направлении // Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 4. С. 95—100.
3. *Ержанов Ж. С., Мироненко Н. И., Жетписов Т. Х.* Напряженное состояние полосы с четырьмя сближенными круговыми отверстиями // Прикл. механика. 1982. Т. 18. № 11. С. 65—69.
4. *Мироненко Н. И.* Об одном способе решения основных задач плоской теории упругости для двусвязных областей // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1978. № 5. С. 81—82.

Алма-Ата

Поступила в редакцию
3.X.1985