

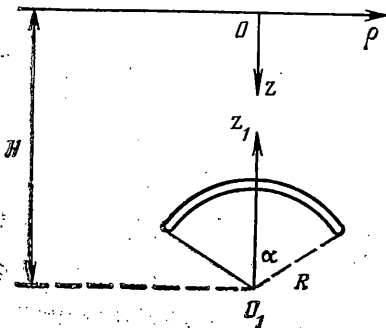
УДК 539.3

РАСТЯЖЕНИЕ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА
СО СФЕРИЧЕСКИМ РАЗРЕЗОМ

ГОЛОВЧЕНКО А. В., ПРОЦЕНКО В. С.

Решение задачи о растяжении полупространства со сферическим разрезом сведено к решению линейной алгебраической системы. Дано численное решение системы, исследованы распределения напряжений на поверхности сферы вне разреза и значения коэффициентов интенсивности нормальных напряжений и напряжений поперечного сдвига.

1. Рассмотрим полупространство с разрезом, расположенным на поверхности сферы, центр которой находится на расстоянии $H > R$ (R — радиус сферы) от границы полупространства (фиг. 1). Напряженное состояние упругого тела определяется следующими краевыми условиями: $\sigma_z^{(\infty)} = -P$, $u_p(\rho, z)|_{z=0} = 0$, $\tau_{\rho z}^{(\infty)} = 0$, $u_z(\rho, z)|_{z=0} = 0$, где индекс ∞ относится к усилиям на бесконечности, а берега разреза считаются свободными от нагрузки.



Фиг. 1

Задачу удобно решать в цилиндрической системе координат с центром в точке O , а также в сферической системе координат с центром в точке O_1 (центр сферы).

Поле напряжений, как обычно, ищем в виде суперпозиции напряженных состояний $T = T_0 + T_1$, где тензор T_0 описывает напряженное состояние пространства, которое характеризуется вектором перемещений $u^{(0)}$, имеющим вид

$$u_z^{(0)} = \frac{P}{2G} \frac{1-2\nu}{1-\nu} z, \quad u_p^{(0)} = 0$$

а напряженное состояние, определяемое тензором T_1 , характеризует локальное поведение упругого тела вблизи его границ и возникает при нагружении поверхности разреза усилиями, определяемыми вектором смещений $(u_z^{(0)}, u_p^{(0)})$. В дальнейшем исследуется напряженное состояние $T_1 = T - T_0$, причем $T_1(\rho, z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$.

Исследование локального напряженного состояния основано на общих формулах [1]. Так, для внутренней задачи (индекс 1) и внешней задачи (индекс 2) имеем

$$2Gu^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n W_{1,n}^{(1)}(r_1, \theta_1) + B_n W_{2,n}^{(1)}(r_1, \theta_1)] \quad (1.1)$$

$$2Gu^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n W_{1,n}^{(2)}(r_1, \theta_1) + D_n W_{2,n}^{(2)}(r_1, \theta_1)] +$$

$$+ \int_0^{\infty} \{M(\lambda) [-U_{10}^{(1)}(\rho_1, z_1) + H U_{20}^{(1)}(\rho_1, z_1)] + N(\lambda) U_{20}^{(2)}(\rho_1, z_1)\} e^{-\lambda H} d\lambda$$

где векторные функции, стоящие под знаком суммы и интеграла, являются решениями уравнения Ламе и имеют вид

$$W_{1,n}^{(1)}(r_1, \theta_1) = \frac{2n+3}{n+1} [(4\nu-3)e_{z_1} + z_1 \text{grad}] (P_{n+1}(\cos \theta_1) r_1^{n+1}) - \\ - \frac{\alpha_n^{(1)}}{n+1} \text{grad} (P_{n+2}(\cos \theta_1) r_1^{n+2})$$

$$W_{2,n}^{(1)}(r_1, \theta_1) = n^{-1} \text{grad} (P_n(\cos \theta_1) r_1^n)$$

$$W_{1,n}^{(2)}(r_1, \theta_1) = -W_{1,-n-1}^{(1)}(r_1, \theta_1), \quad W_{2,n}^{(2)}(r_1, \theta_1) = -W_{2,-n-1}^{(1)}(r_1, \theta_1)$$

$$U_{10}^{(1)}(\rho_1, z_1) = -[(4\nu-3)e_{z_1} + z_1 \text{grad}] (e^{\lambda z_1} J_0(\lambda \rho_1))$$

$$U_{20}^{(1)}(\rho_1, z_1) = -\text{grad} (e^{\lambda z_1} J_0(\lambda \rho_1))$$

$$\alpha_n^{(1)} = n - 6 + 4s, \quad s = (m+1)/m, \quad m = 1/\nu$$

(где ν — число Пуассона, $P_n(x)$ — полиномы Лежандра, $J_0(y)$ — функция Бесселя). С помощью формул [2, 3]:

$$e^{\lambda z + i h \varphi} J_h(\lambda \rho) = (-1)^h \sum_{n=|h|}^{\infty} \frac{(\lambda r)^n}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\cos \theta) e^{i h \varphi}$$

$$\frac{P_n^{(k)}(\cos \theta)}{r^{n+1}} e^{i h \varphi} = \frac{(-1)^k}{(n-k)!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_k(\lambda \rho) \lambda^n d\lambda e^{i h \varphi} \quad (z > 0)$$

можно показать, что имеют место разложения

$$W_{1,n}^{(2)} = \frac{2n-1}{n!} \int_0^{\infty} \lambda^{n-1} U_{10}^{(2)}(\lambda, z_1, \rho_1) d\lambda + \\ + \frac{(n-1)\alpha_{-n-1}^{(1)}}{n!} \int_0^{\infty} \lambda^{n-2} U_{20}^{(2)}(\lambda, z_1, \rho_1) d\lambda \quad (z_1 > 0) \quad (1.2)$$

$$W_{2,n}^{(2)} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^{\infty} \lambda^n U_{20}^{(2)}(\lambda, \rho_1, z_1) d\lambda \quad (z_1 > 0)$$

$$U_{10}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{n!(2n+3)} W_{1,n}^{(1)}(r_1, \theta_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1} n \alpha_{-n-1}^{(2)}}{(n-1)!(2n-1)} W_{2,n}^{(1)}(r_1, \theta_1)$$

$$U_{20}^{(1)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} W_{2,n+1}^{(1)}(r_1, \theta_1), \quad \alpha_n^{(2)} = n + 9 - 4s$$

$$U_{10}^{(2)}(\lambda, \rho_1, z_1) = U_{10}^{(1)}(-\lambda, \rho_1, z_1), \quad U_{20}^{(2)}(\lambda, \rho_1, z_1) = U_{20}^{(1)}(-\lambda, \rho_1, z_1)$$

На основании формул (1.2) перемещения (1.1) можно выразить как в сферических, так и в цилиндрических координатах.

Компоненты вектора напряжений $F_{r_i}^{(k)} = \sigma_{r_i}^{(k)} e_{r_i} + \tau_{r_i \theta_i}^{(k)} e_{\theta_i}$ ($k=1, 2$) подсчитаем по формуле [1]:

$$2G[\mathbf{n}_i \text{div} \mathbf{u}^{(k)} / (m-2) + (\mathbf{n}_i \text{grad} \mathbf{u}^{(k)} + \frac{1}{2} \mathbf{n}_i \times \text{rot} \mathbf{u}^{(k)})]_{S_i} = \mathbf{F}_{n_i} \quad (i=1, 2)$$

выбирая в качестве \mathbf{n}_i внешнюю нормаль к поверхности S_i .

Неизвестные величины в формулах (1.1) можно определить, если потребовать выполнения следующих граничных условий и условий сопря-

жения:

$$u_{r_1}^{(1)} = u_{r_1}^{(2)}, \quad u_{\theta_1}^{(1)} = u_{\theta_1}^{(2)}, \quad \sigma_{r_1}^{(1)} = \sigma_{r_1}^{(2)}$$

$$\tau_{r_1\theta_1}^{(1)} = \tau_{r_1\theta_1}^{(2)} \quad (r_1=R, \alpha < \theta_1 \leq \pi) \quad (1.3)$$

$$\sigma_{r_1}^{(1)} = \sigma_{r_1}^{(2)} = -P \cos^2 \theta_1, \quad \tau_{r_1\theta_1}^{(1)} = \tau_{r_1\theta_1}^{(2)} = P \cos \theta_1 \sin \theta_1$$

$$(r_1=R, 0 \leq \theta_1 < \alpha) \quad (1.4)$$

$$u_{z_1}^{(2)} = 0, \quad u_{r_1}^{(2)} = 0, \quad z_1 = -H \quad (1.5)$$

Сравнение граничных условий (1.4) с последними двумя равенствами (1.3) приводит к выводу, что напряжения при $r_1=R$ равны на всем промежутке ортогональности полиномов Лежандра. Это утверждение дает возможность выразить неизвестные постоянные C_n и D_n внешней задачи через постоянные A_n и B_n внутренней задачи и плотности $M(\lambda)$ и $N(\lambda)$. Условия равенства перемещений вне разреза (1.3) и условия на разрезе (1.4) приводят к системам парных уравнений, а именно:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta_1) [\alpha_n^{(4)} A_n R^n + (n-1) B_n R^{n-2}] = -P \cos^2 \theta_1$$

$$(0 \leq \theta_1 < \alpha) \quad (1.6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{\Delta_n(n+2)} P_n(\cos \theta_1) [(2n+3) \alpha_{-n-1}^{(3)} A_n R^n +$$

$$+ (2n-1)(n+2) B_n R^{n-2} + G_n^{(4)}] = 0 \quad (\alpha < \theta_1 \leq \pi)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n^{(1)}(\cos \theta_1)}{n(n+1)} [n \alpha_n^{(3)} A_n R^n + (n^2-1) B_n R^{n-2}] = P \cos \theta_1 \sin \theta_1 \quad (0 \leq \theta_1 < \alpha)$$

$$(1.7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) P_n^{(1)}(\cos \theta_1)}{\Delta_n(n+2)n(n+1)} [n(2n+3) \alpha_{-n-1}^{(4)} A_n R^n +$$

$$+ (2n-1)(n+1)(n+2) B_n R^{n-2} + G_n^{(2)}] = 0 \quad (\alpha < \theta_1 \leq \pi)$$

$$\alpha_n^{(3)} = (n-1)(n+3) + 2s, \quad \alpha_n^{(4)} = n(n-1) - 2s$$

$$\Delta_n = 2s(2n+1) - 2(n+1)(n+2)$$

$$G_n^{(j)} = \frac{R^{n-2}}{n!} \frac{[n(n+1)]^{j-1}}{(2n+1)\Delta_0} \int_0^{\infty} \lambda^{n-1} e^{-\lambda H} d\lambda$$

$$[M(\lambda) T_n^{(2j-1)}(\lambda) + N(\lambda) T_n^{(2j)}(\lambda)] d\lambda \quad (1.8)$$

$$T_n^{(2j-1)}(\lambda) = (\lambda R)^2 [\mu_{n1}^{(j)} - (n+2) \Delta_n c_n^{(j)}] -$$

$$-(\lambda H + n \alpha_{-n-1}^{(2)} 2^{1-n}) [(n-1) \mu_{n2}^{(j)} - n^{2-j} \Delta_n (n+2)]$$

$$T_n^{(2j)}(\lambda) = \lambda n^{(2-j)} (n+2) [(n-1)(4s(2n+1) - 14n - 8) + \Delta_n]$$

$$\mu_{n1}^{(j)} = \alpha_n^{(4)} k_n^{(2j-1)} / (2n+3) + \alpha_n^{(3)} k_n^{(2j)} / [(n+1)(2n+3)]$$

$$\mu_{n2}^{(j)} = k_n^{(2j)} + n k_n^{(2j-1)}, \quad k_n^{(1)} = -n(n+2) \alpha_{-n-1}^{(1)} - (n+1) \alpha_{-n-1}^{(3)}$$

$$k_n^{(2)} = n(n+1) [-\alpha_{-n-1}^{(1)}(n+2) - \alpha_{-n-1}^{(4)}]$$

$$k_n^{(3)} = (n+2)\alpha_{-n-1}^{(3)} + \alpha_{-n-1}^{(3)}, \quad k_n^{(4)} = (n+1)(n+2)\alpha_{-n-1}^{(2)} + n\alpha_{-n-1}^{(4)}$$

$$c_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)}, \quad c_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} / (n+1) \quad (j=1, 2)$$

2. Придерживаясь методики, изложенной в [4], решение систем (1.6) и (1.7) приведем к решению системы интегродифференциальных уравнений относительно вспомогательных функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, которые вводятся следующим образом [5]:

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \varphi(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt &= \frac{2n+1}{(n+2)\Delta_n} [(2n+3)\alpha_{-n-1}^{(3)}A_n R^n + \\ &+ (2n-1)(n+2)B_n R^{n-2} + G_n^{(1)}] \\ \int_0^\alpha \psi(t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt &= \frac{1}{(n+2)\Delta_n} [n(2n+3)\alpha_{-n-1}^{(4)}A_n R^n + \\ &+ (2n-1)(n+1)(n+2)B_n R^{n-2} + G_n^{(2)}] \\ \varphi(0) = 0, \quad \int_0^\alpha \psi(t) \cos \frac{t}{2} dt &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Система интегродифференциальных уравнений имеет вид (штрих сверху означает производную):

$$\begin{aligned} \varphi'(x) - \frac{m+4}{m}\psi(x) + \int_0^\alpha [\varphi(t)K_{11}(x,t) + \psi(t)K_{12}(x,t)] dt &= \\ = \frac{4P}{3\pi} \left(\cos \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{5}{2}x \right) - \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \Gamma_n^{(1)} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x & \\ \frac{m+4}{m}\varphi(x) + 4\psi'(x) + \int_0^\alpha [\varphi(t)K_{21}(x,t) + \psi(t)K_{22}(x,t)] dt &= \\ = -\frac{32P}{5\pi} \sin \frac{5}{2}x - \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \Gamma_n^{(2)} \frac{\sin(n+1/2)x}{(n+1/2)} & \\ \Gamma_n^{(i)} = x_n^{(2i-1)}G_n^{(1)} + x_n^{(2i)}G_n^{(2)} \quad (i=1, 2) & \\ x_n^{(1)} = -2[n(n^2-1)(n+2) + s(2n^2+2n-1)]/z_n & \\ x_n^{(2)} = [s(4n^2+4n-5) - 3(n-1)(n+2)]/z_n & \\ x_n^{(3)} = -n(n+1)x_n^{(2)}, \quad x_n^{(4)} = [(n-1)(n+2) + 3s]/z_n & \\ z_n = (4n^2-1)(2n+3)(n+2)\Delta_n\Delta_0 & \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $G_n^{(i)}$ ($i=1, 2$) вычисляются по формулам (1.8), а ядра K_{ij} ($i, j=1, 2$) приведены в [4].

К системе (2.2) применим метод вариации произвольной постоянной. Удовлетворяя условиям (2.1), получим следующую систему функциональных уравнений:

$$\varphi(x) - \int_0^\alpha [\varphi(t)K_{11}^{(1)}(x,t) + \psi(t)K_{12}^{(1)}(x,t)] dt - \int_0^\alpha M(t)e^{-\pi t}L_1(x,t) dt =$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{\infty} N(t) e^{-Ht} L_2(x, t) dt = - \frac{P}{3\pi} \frac{m^2}{m+2} \sin \frac{x}{2} + \\
 & + \frac{2P}{15\pi} \frac{31m+24}{(m-1)(3m+2)} \sin \frac{5}{2} x + \beta \sin m_1 x \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi(x) & - \int_0^{\alpha} [\varphi(t) K_{21}^{(1)}(x, t) + \psi(t) K_{22}^{(1)}(x, t) dt - \int_0^{\infty} M(t) e^{-Ht} L_3(x, t) dt - \\
 & - \int_0^{\infty} N(t) e^{-Ht} L_4(x, t) dt = - \frac{P}{6\pi} \frac{m(m+4)}{m+2} \cos \frac{x}{2} + \\
 & + \frac{P}{3\pi} \frac{m(7m+4)}{(m-1)(3m+2)} \cos \frac{5}{2} x + \frac{\beta}{2} \cos m_1 x
 \end{aligned}$$

$$\beta = \gamma \frac{Pm}{6\pi} \left[\frac{m+4}{2(m+2)} (\alpha + \sin \alpha) - \frac{7m+4}{(m-1)(3m+2)} \left(\frac{\sin 3\alpha}{3} + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) \right]$$

$$\gamma = 4 \{ [m/(m+2)] \sin[(m+2)\alpha/m] + {}^{1/2} m \sin(2\alpha/m) \}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{(1)}(x, t) & = K_{ij}^{(2)}(x, t) - 2^{i-1} \gamma Q_i(t) \sin[m_1 x + {}^{1/2} \pi (i-1)] \quad (i, j=1, 2), \\
 m_1 & = (m+4)/(2m)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{41}^{(2)} & = {}^{1/16} (7m+12) a \cos x \sin t^{-3/16} [(m-8)/(m+4)] t - 2b \sin m_1 t \cos m_1 x \\
 & \quad (t < x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{41}^{(2)} & = {}^{1/16} (7m+12) a \sin x \cos t^{-3/16} [(m-8)/(m+4)] x - 2b \cos m_1 t \sin m_1 x \\
 & \quad (t > x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{12}^{(2)} & = {}^{1/4} (7m+12) a \cos t \cos x + {}^{3/4} [(7m-8)/(m+4)] - 2c \cos m_1 t \cos m_1 x \\
 & \quad (t < x)
 \end{aligned}$$

$$K_{12}^{(2)} = -{}^{1/4} (7m+12) a \sin t \sin x + 2c \sin m_1 t \sin m_1 x \quad (t > x)$$

$$K_{21}^{(2)} = -{}^{1/4} (m+4) a \sin t \sin x + b \sin m_1 x \sin m_1 t \quad (t < x)$$

$$K_{21}^{(2)} = {}^{1/4} (m+4) a \cos t \cos x + {}^{3/4} d - b \cos m_1 x \cos m_1 t \quad (t > x)$$

$$K_{22}^{(2)} = -(m+4) a \cos t \sin x + c \sin m_1 x \cos m_1 t \quad (t < x)$$

$$K_{22}^{(2)} = -(m+4) a \sin t \cos x + c \sin m_1 t \cos m_1 x \quad (t > x)$$

$$a = \frac{7m-8}{(3m+4)(m-4)}, \quad b = \frac{(m+4)(m^3+6m^2-12m-32)}{(m-4)(m+4)^2(3m+4)}$$

$$c = \frac{2m(7m-8)(m+4)}{(m-4)(m+4)(3m+4)}, \quad d = \frac{(m+4)(m+8)}{(m+4)^2}$$

$$\begin{aligned}
 Q_1(t) & = \{ -(m+4) a / 6 + {}^{3/2} d + {}^{1/4} b m^2 / (m+2) \} \sin(t/2) + \\
 & + {}^{1/3} (m+4) a \cos^3(\alpha/2) \sin t - \{ [m/(m+2)] \\
 & \cos[(m+2)\alpha/m] + (m/2) \cos(2\alpha/m) \} \sin m_1 t
 \end{aligned}$$

$$Q_2(t) = (m+4) a [{}^{1/3} \cos^3(\alpha/2) \cos t - [m/(m+4)]$$

$$\{ [m/(m+2)] \cos[(m+2)\alpha/m] + (m/2) \cos(2\alpha/m) \} \cos m_1 t$$

$$L_i(x, t) = L_i^{(1)}(x, t) - 2^{-i_1} \gamma r_{i_2}(t) \tau_i(x)$$

$$i_1 = [(i-1)/2], \quad i_2 = 1 \quad (i=1, 3), \quad i_2 = 2 \quad (i=2, 4; \quad 1 \leq i \leq 4)$$

$$L_i^{(1)}(x, t) = \frac{\alpha_i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n-2} t^{n-1}}{n!} \xi_n^{(i)}(x)$$

$$[V_n^{(i)} y_n^{(k)}(t) - W_n^{(i)} y_n^{(k-2)}(t)] / [(n-2/m)(n+1+2/m)]$$

$$\alpha_i=4 \quad (i=1, 2), \quad \alpha_i=2 \quad (i=3, 4), \quad k=3 \quad (i=1, 3), \quad k=4 \quad (i=2, 4)$$

$$\tau_i(x) = \sin m_i x \quad (i=1, 2), \quad \tau_i(x) = \cos m_i x \quad (i=3, 4)$$

$$\xi_n^{(i)}(x) = \sin(n+1/2)x \quad (i=1, 2), \quad \xi_n^{(i)}(x) = \cos(n+1/2)x \quad (i=3, 4)$$

$$V_n^{(i)} = 2(m+4) / [(n+1)m] \quad (i=1, 2), \quad V_n^{(i)} = 2 \quad (i=3, 4)$$

$$W_n^{(i)} = 2n+1 \quad (i=1, 2), \quad W_n^{(i)} = (m+4)/m \quad (i=3, 4)$$

$$y_n^{(2j-1)}(t) = x_n^{(2j-1)} T_n^{(1)}(t) + n(n+1) x_n^{(2j)} T_n^{(3)}(t)$$

$$y_n^{(2j)}(t) = x_n^{(2j-1)} T_n^{(2)}(t) + n(n+1) x_n^{(2j)} T_n^{(4)}(t)$$

$$r_j(t) = \int_0^{\alpha} L_{j+2}^{(1)}(x, t) \cos(x/2) dx \quad (j=1, 2)$$

Условия (1.5) с учетом соотношений (1.2) и формулы обращения Ханкеля приводят к системе двух функциональных уравнений относительно функций $M(\lambda)$ и $N(\lambda)$ (δ_{ik} — символ Кронекера):

$$\{M(\lambda), N(\lambda)\} + \int_0^{\infty} M(t) e^{-H(t+\lambda)} Y_{(1,2)}(\lambda, t) dt + \quad (2.4)$$

$$+ \int_0^{\alpha} \varphi(y) S_{(1,3)}(\lambda, y) dy + \int_0^{\alpha} \psi(y) S_{(2,4)}(\lambda, y) dy = 0$$

$$Y_i(\lambda, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1} R^{2n-1}}{\Delta_n (n!)^2} \Pi_n^{(i)}(\lambda, t) + x_0(t) \delta_{i2}$$

$$\begin{aligned} \Pi_n^{(i)}(\lambda, t) = & n b_n^{(i)}(\lambda) f_{n1}(t) + (-2)^{2-i} \lambda R^2 f_{n2}(t) / (n+2) - \\ & - [R^2(2n+1) \Delta_0]^{-1} \{ [(n+1)/(2n+3)] a_n^{(2i-1)}(\lambda) f_{n3}(t) + \\ & + n[(2n-1)(n+2)]^{-1} a_n^{(2i)}(\lambda) f_{n4}(t) \} \end{aligned}$$

$$S_j(\lambda, y) = e^{-\lambda H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda R)^{n-1}}{n!} \theta_n^{(j)}(y) q_n^{(j)}(\lambda) + q_0(y) \delta_{j3}$$

$$\begin{aligned} q_n^{(j)}(\lambda) = & (-1)^j \{ [(n+2)(n+1)/(2n+3)]^{i_3} a_n^{(i_4)}(\lambda) - \\ & - n^{i_3} \alpha_{-n-1}^{(i_3+3)} a_n^{(i_4+1)}(\lambda) / (2n-1) \} \end{aligned}$$

$$i_3 = [1 - (-1)^j] / 2, \quad i_4 = 2[(j+1)/2] - 1 \quad (1 \leq i \leq 2, \quad 1 \leq j \leq 4)$$

$$b_n^{(1)}(\lambda) = [2\lambda H(2n-1) - 2n^2 + 2n + 7 - 4s] / (7-4s)$$

$$b_n^{(2)}(\lambda) = -(n-1) \alpha_{-n-1}^{(1)} / \lambda - H(2n-1)$$

$$a_n^{(k)}(\lambda) = R^2 [-2(\lambda R)^2 P_n^{(k)} / [(n+1)(n+2)] +$$

$$+ (n-1)(2n+5-2k)n^{2-k} b_n^{(1)}(\lambda)] / [(7-4s)\Delta_n] \quad (k=1, 2)$$

$$a_n^{(k)}(\lambda) = R^2 [n^{k-h}(n-1)(2n+9-2k)b_n^{(k)}(\lambda) + \lambda R^2 P_n^{(k-2)} / [(n+1)(n+2)]] / \Delta_n \quad (k=3, 4)$$

$$P_n^{(1)} = [n(n^2-1)(n+2) + 8s-4s^2](2n+1)$$

$$P_n^{(2)} = (n^2-1)(n+2)(2n-1)$$

$$f_{n1}(t) = (n-1) [(Rt)^2 - Ht(2n+1) + n(2n+1)\alpha_{-n-1}^{(2)} / (2n-1)]$$

$$f_{n2}(t) = (Rt)^2 P_n^{(1)} / [(n+1)(2n+3)] - n(n-1)(n+2) [Ht(2n-1) + n\alpha_{-n-1}^{(2)}]$$

$$f_{n3}(t) = (Rt)^2 (2n+1) \Delta_n \Delta_0 / (n+1)$$

$$f_{n4}(t) = \alpha_{-n-1}^{(4)} T_n^{(4)}(t) - (n+1) \alpha_{-n-1}^{(3)} T_n^{(3)}(t)$$

$$\theta_n^{(k)}(y) = \sin(n+1/2)y / (n+1/2) \quad (k=1, 3)$$

$$\theta_n^{(k)}(y) = \cos(n+1/2)y \quad (k=2, 4)$$

$$q_0(y) = {}^2/s R^3 \sin^2 y, \quad x_0(t) = {}^2/9 R^3 (3s-4)(s-1)t/\Delta_0$$

Объединяя уравнения систем (2.3), (2.4), получаем систему интегральных уравнений с непрерывными ядрами и свободными членами, выписанными выше. Для сведения последней системы к алгебраической положим

$$M(\lambda) = e^{-\lambda H} \sum_{h=0}^{\infty} a_h L_h(2\lambda H), \quad N(\lambda) = e^{-\lambda H} \sum_{h=0}^{\infty} b_h L_h(2\lambda H)$$

$$\int_0^{\alpha} \varphi(t) \sin(n+1/2)t dt = \sum_{i=0}^{m_0-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (a_i^{(1)} t + b_i^{(1)}) \sin(n+1/2)t dt$$

$$\sin(n+1/2)t dt = \sum_{i=0}^{m_0} d_i l_i^{(1)}, \quad \varphi(t) = a_i^{(1)} t + b_i^{(1)} \quad (t \in [t_i, t_{i+1}])$$

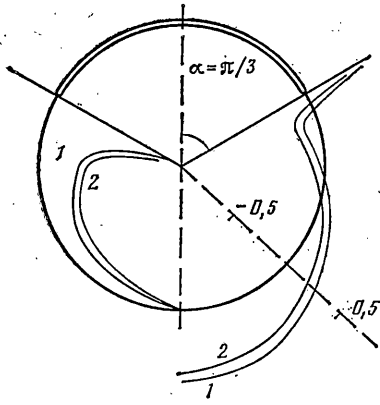
$$\int_0^{\alpha} \psi(t) \cos(n+1/2)t dt = \sum_{i=0}^{m_0-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (a_i^{(2)} t + b_i^{(2)}) \cos(n+1/2)t dt$$

$$\cos(n+1/2)t dt = \sum_{i=0}^{m_0} e_i l_i^{(2)}, \quad \psi(t) = a_i^{(2)} t + b_i^{(2)} \quad (t \in [t_i, t_{i+1}])$$

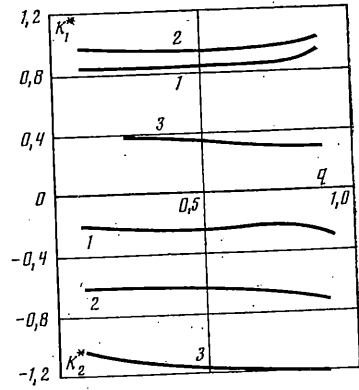
где m_0+1 — количество точек разбиения интервала $[0, \alpha]$, $d_i = \varphi(t_i)$, $e_i = -\psi(t_i)$, $l_i^{(1)}$ и $l_i^{(2)}$ — константы, которые легко определяются, если выполнить интегрирование, а $L_h(y)$ — многочлены Лагерра. В результате получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a_h, b_h, e_i, d_i , которую можно записать в виде

$$y + Sy = g \quad (2.5)$$

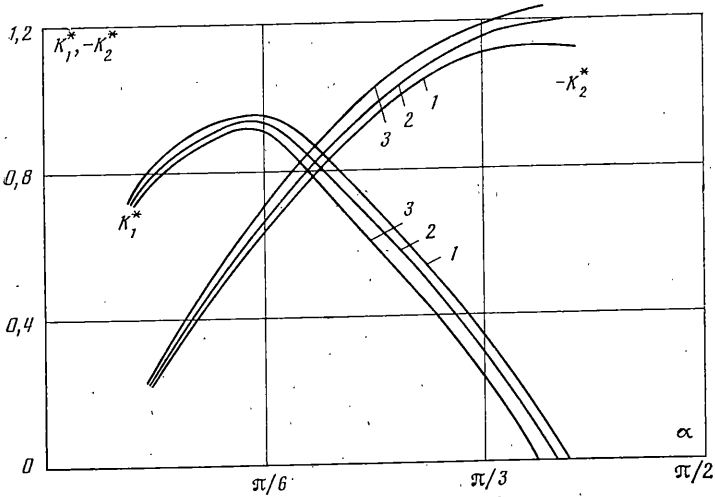
где y — вектор-столбец, состоящий из неизвестных системы, g — вектор-столбец, состоящий из свободных членов системы, а S — матрица системы. Можно показать, что двойные ряды, составленные из квадратов модулей матричных элементов системы (2.5), сходятся при условии $R/H < 1$ и, следовательно, матрица системы (2.5) определяет вполне непрерывный оператор, отображающий гильбертово пространство l_2 в себя, так как столбец правых частей также принадлежит l_2 , то в силу альтернативы Гильберта и однозначной разрешимости исходной краевой задачи теории упругости существует единственное решение системы (2.5), принадлежащее l_2 . Оно может быть получено методом редукции [6].



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Численная реализация метода проводилась при различных значениях отношения R к H : $R/H=0,1; 0,25; 0,5; 0,8; 0,9$. При значении $R/H > 0,9$ метод редуцирования становится малоэффективным, так как для достижения достоверных результатов необходимо увеличивать размерность матрицы системы (2.5), что влечет за собой ухудшение стабильности результатов, увеличение машинного времени.

Найденные функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $M(\lambda)$, $N(\lambda)$ позволяют исследовать напряженное состояние полупространства, ослабленного сферическим разрезом. Прежде всего напряжения на поверхности сферы вне разреза имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{r_1}|_{r_1=R} &= \frac{1}{2} \frac{\varphi(\alpha)}{F(\alpha, \theta_1)} - \frac{2P}{3\pi} \arcsin\left(\frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\theta_1/2)}\right) - \frac{4P}{3\pi} \int_0^\alpha \frac{\cos^{5/2}x}{F(x, \theta_1)} dx - \\ &\quad - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n^{(1)} \int_\alpha^{\theta_1} \frac{\cos(n+1/2)x}{F(x, \theta_1)} dx - J_1(\alpha)F(\alpha, \theta_1), \\ \tau_{r_1\theta_1}|_{r_1=R} &= \frac{1}{\sin \theta_1} \left\{ \frac{\psi(\alpha) \sin \alpha}{F(\alpha, \theta_1)} - \frac{1}{2} J_1(\alpha) (\cos \alpha + 2 \cos \theta_1) F(\alpha, \theta_1) - J_2(\alpha) F(\alpha, \theta_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3P}{5\pi} \int_0^\alpha \frac{\sin x \sin^{5/2}x}{F(x, \theta_1)} dx - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_n^{(2)}}{n+1/2} \int_\alpha^{\theta_1} \frac{\sin x \sin(n+1/2)x}{F(x, \theta_1)} dx \right\} \\ J_1(\alpha) &= \frac{7m-8}{32m} \int_0^\alpha [\sin t\varphi(t) + 4 \cos t\psi(t)] dt \end{aligned}$$

$$J_2(\alpha) = \frac{3}{4} \left\{ \frac{m-8}{16m} \int_0^\alpha t\varphi(t) dt - \frac{7m-8}{4m} \int_0^\alpha \psi(t) dt \right\}$$

$$F(x, y) = (2 \cos x - 2 \cos y)^{1/2}$$

Как видно из этих формул, напряжения σ_{r_1} и $\tau_{r_1\theta_1}$ стремятся к бесконечности при $r_1=R$ и $\theta_1=\alpha+0$. Эпюры напряжений $\tau_{r_1\theta_1}/P$ и $\sigma_{r_1}/(4P)$ при $\alpha=\pi/3$, $R/H=0,1$ и $R/H=0,8$ изображены на фиг. 2. Кривые 1 соответствуют значению параметра $R/H=0,1$, а кривые 2 — значению $R/H=0,8$. Положительные значения напряжений характеризуются эпюрами, расположенными вне сферы $r_1=R$, а отрицательные — внутри сферы.

Коэффициенты интенсивности нормальных напряжений (K_1) и напряжений поперечного сдвига (K_2), как и в [4], находятся по формулам

$$K_1 = 1/2 \varphi(\alpha) (R/\sin \alpha)^{1/2}, \quad K_2 = \psi(\alpha) (R/\sin \alpha)^{1/2}$$

На фиг. 3 показана зависимость коэффициентов $K_1^* = K_1/(R^{1/2}\omega_0)$ и $K_2^* = K_2/(R^{1/2}\omega_0)$ ($\omega_0 = 3Pm/(2\pi(m+1))$, $m=3$) от отношения $R/H=q < 1$ при различных значениях угла разреза α . Цифрами 1–3 обозначены кривые, соответствующие значениям $\alpha = \pi/12$, $\pi/6$, $\pi/3$. На фиг. 4 показана зависимость коэффициентов K_1^* и K_2^* от угла разреза α при значениях коэффициента $q = 0,1; 0,7; 0,9$. Из фиг. 3, 4 видно, что влияние плоской границы на коэффициент K_1^* начинает сказываться при $q > 0,5$. Изменение коэффициента K_2^* при изменениях q от 0,1 до 0,9 составляют 7–15% в зависимости от значений угла разреза α .

В заключение отметим, что аналогичным образом решается задача, если на бесконечности заданы условия $\sigma_r^{(\infty)} = P$, а на плоской границе либо напряжения равны нулю, либо заданы условия гладкой заделки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат. 1955. 492 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. М.: Наука. 1970. 327 с.
3. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. I. М.: Изд-во иностр. лит. 1949. 799 с.
4. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка. 1979. 263 с.
5. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука. 1977. 220 с.
6. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз. 1962. 708 с.

Харьков

Поступила в редакцию
23.I.1985